

Colisiones de carambola entre esferas elásticas sin rotación (y jugar billar, 2)

VIRGILIO BELTRÁN L.

Instituto de Ciencias Nucleares

Universidad Nacional Autónoma de México

Apartado postal 70-543, 04510 México, D.F., México

Recibido el 31 de enero de 1996; aceptado el 10 de abril de 1996

RESUMEN. Por medio de métodos geométricos y analíticos se encuentra el parámetro de impacto del choque de dos esferas elásticas, sin rotación, en colisión de carambola con una tercera esfera; esto es, el de una esfera que, sin girar, choca elásticamente en sucesión con otras dos esferas. La solución, en forma de gráficas y de funciones analíticas, se expresa en términos de la distancia entre las esferas que participan en la primera colisión y de los ángulos del triángulo con vértices en los centros de las esferas. Se presenta también un método geométrico simple para determinar el parámetro de carambola en colisiones centro-a-centro y rasantes sobre la tercera esfera y el diámetro transversal de colisión de carambola. Los resultados se aplican a colisiones de carambola entre bolas de billar. Se presentan programas en el lenguaje de "Mathematica" para calcular y graficar estos resultados.

ABSTRACT. The problem of finding the impact parameter for the collision between two non-rotating elastic spheres in a cannon shot collision with a third sphere —*i.e.*, a non-rotating sphere colliding elastically in succession with two other spheres— is solved by simple geometric and analytical methods. The solution, given in the form of graphs and of analytical functions, is expressed in terms of the distance between the first two colliding spheres and of the angles of the triangle with vertices in the centers of the spheres. A simple geometrical method for calculating the transverse diameter for a cannon shot collision is also shown. The results are applied to cannon shot collisions of billiard balls. Programs in the "Mathematica" language for calculating and plotting these results are given.

PACS: 01.50 Kw

1. INTRODUCCIÓN

En un artículo anterior [1] se presentó un método geométrico para encontrar los ímpetus resultantes de la colisión de dos esferas elásticas, sin rotación, y diagramas simples para determinar el parámetro de impacto de la colisión a partir del ímpetu final de la esfera proyectil.

En este trabajo se emplean los resultados de ese artículo para encontrar los parámetros de impacto de la colisión elástica de carambola de una esfera con otras dos; esto es, los parámetros de impacto de las colisiones elásticas sucesivas de una esfera con otras dos. Las esferas se suponen en movimiento traslacional sin rotación en todo el trabajo. Los resultados se ilustran, discuten y aplican tomando como modelo el juego de carambolas con bolas de billar con el movimiento aproximadamente traslacional puro que se consigue

impulsándolas apropiadamente, o con sólo una rotación moderada sobre un eje horizontal resultante de la fricción con la mesa.¹ Esta rotación no afecta mucho las trayectorias y los ángulos resultantes de una colisión sobre el plano horizontal de la mesa de billar.

Los diagramas de la Ref. [1] dan la magnitud p del ímpetu final del proyectil y el ángulo ϑ que forma con la dirección de su ímpetu inicial en términos del parámetro de impacto $p = b/D$, donde D es el diámetro promedio de las esferas y b la distancia entre los centros perpendicular a la línea de tiro. La Fig. 1a es el diagrama para esferas iguales como son las bolas de billar. Supondremos que la esfera proyectil se encuentra inicialmente en reposo, por lo que su ímpetu inicial tiene la misma dirección que la del cuerpo que la impulsa. En el juego del billar, esa dirección es la del "taco" con que se impulsa a la bola proyectil y la llamaremos línea de tiro (Fig. 1b).

El diagrama de la Fig. 1a, en general, no puede emplearse directamente para determinar el parámetro de impacto de la colisión de carambola de tres bolas de billar, como la ilustrada en la Fig. 1b, porque al no conocerse ese parámetro no se puede conocer la dirección de la línea de tiro ni el ángulo de desviación ϑ necesario para que ocurra la carambola. Sería así necesario buscar por tanteo distintas direcciones de tiro y los correspondientes parámetros de impacto hasta encontrar la dirección para la que se cumple la relación

$$p = \cos \vartheta. \quad (1)$$

El diagrama de la Fig. 1 se puede utilizar directamente sólo si la bola proyectil está muy lejos de la bola blanco; esto es, si $d \gg D$. En estas condiciones las líneas de tiro y de centros de esas dos bolas son prácticamente paralelas. El ángulo entre ellas,

$$x = \text{Arc sen}(b/d),$$

es prácticamente igual a cero y el parámetro de impacto necesario para desviar el proyectil al ángulo ϑ se obtiene directamente del diagrama de la Fig. 1a o de la ecuación $p = \cos \vartheta$.

En el juego de billar, sin embargo, esto es poco frecuente. Las bolas, en general, se encuentran a distancias comparables con los diámetros de las esferas, la línea de tiro no puede considerarse paralela a la de los centros y, como se dijo antes, se desconoce el ángulo x que debe formar la línea de tiro con la de centros para chocar con el parámetro de impacto p que se requiere para desviar la bola proyectil al ángulo ϑ y hacer la carambola (Fig. 2). Se desconoce también el punto de contacto de las esferas en la primera colisión y por lo tanto el propio ángulo ϑ que determina el valor de p . En general resultaría mucho más útil una fórmula, o un diagrama, referido a líneas conocidas de antemano como son las que pasan por los centros de las bolas.

En este trabajo se determina el parámetro de impacto p de las esferas en la primera colisión de una carambola de tres esferas elásticas iguales, con centros en los vértices de un triángulo de dimensiones comparables al diámetro de las esferas, en términos de la

¹ El movimiento traslacional con rotación sólo sobre un eje horizontal se consigue conservando el taco al golpear en un plano vertical que pase por el centro de la bola proyectil.

El movimiento traslacional sin rotación se consigue conservando el taco sobre ese plano, horizontal y golpeando la bola proyectil abajo del centro. La rotación inversa sobre un eje horizontal que así resulta tiende a cancelar la debida a la fricción con la mesa.

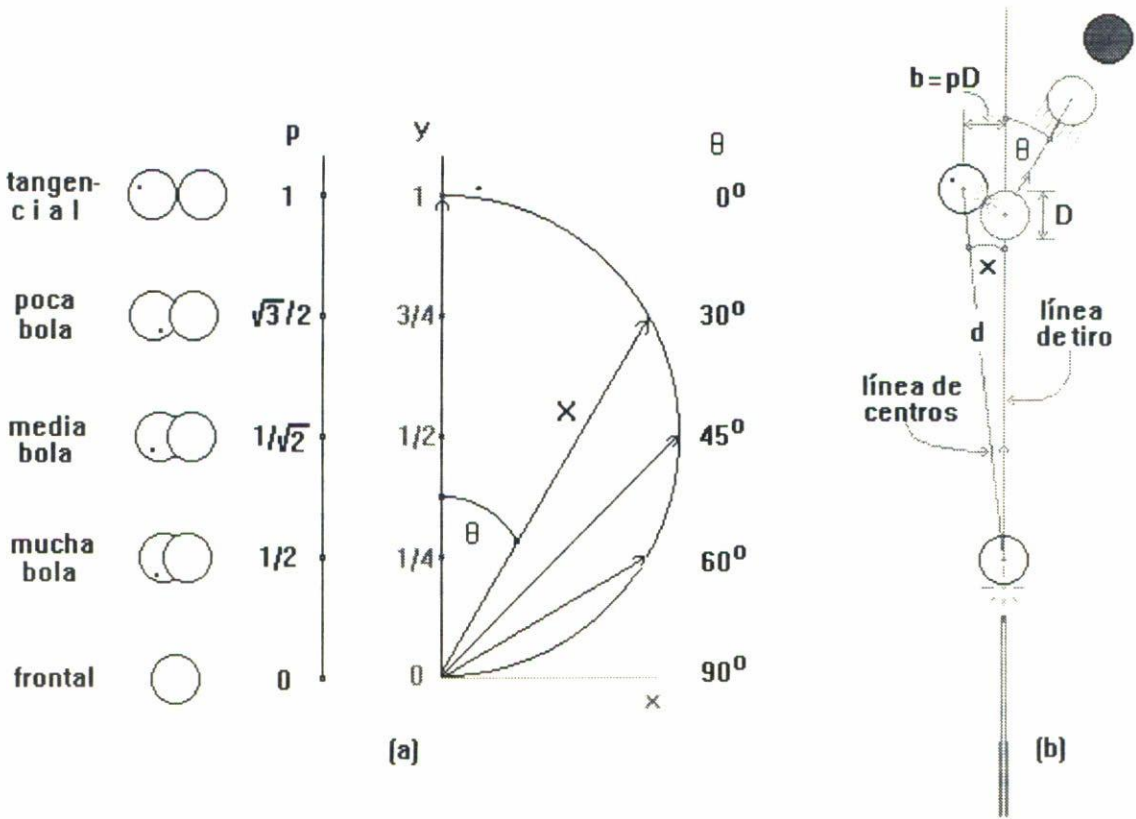


FIGURA 1. Diagrama de ímpetu final del proyectil en un choque elástico entre esferas rígidas de masas iguales. p es el parámetro de impacto de la colisión.

distancia d entre las esferas de la primera colisión y de dos ángulos, α y β , de ese triángulo (Fig. 2). El ángulo x de la línea de tiro y la de los centros en la primera colisión se puede determinar fácilmente con los valores de p y de d . Se encuentran también los parámetros de carambola en trayectorias rasantes, que apenas rozan, a la tercera bola. De estos últimos parámetros se obtiene el diámetro transversal, análogo unidimensional de la sección eficaz, de colisión de carambola.

2. SOLUCIÓN ANALÍTICA

La Fig. 2 muestra la posición inicial de las bolas así como la posición de la bola proyectil al hacer contacto con la bola blanco en la primera colisión. También muestra las líneas de los centros A , B y C en sus posiciones iniciales, las líneas de centros desde el centro F de la bola proyectil al hacer la primera colisión, y la línea de tiro AF . Los ángulos interiores de los diversos triángulos que forman estas líneas sobre cada centro, todos ellos determinados por propiedades sencillas de los triángulos, se muestran en el recuadro adjunto a esa figura.

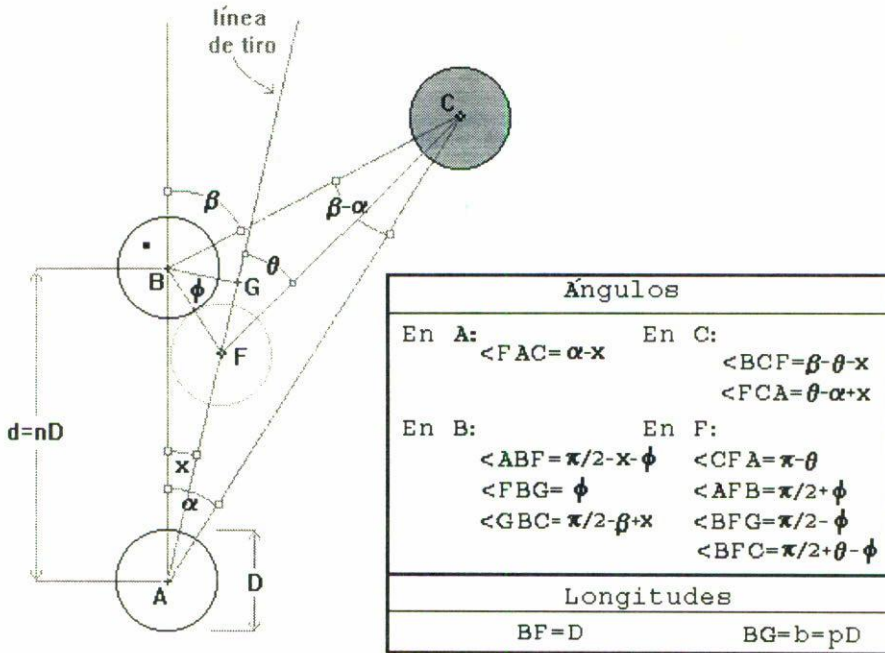


FIGURA 2. Arreglo de bolas de billar para estudiar colisiones elásticas de carambola. El proyectil es la bola blanca, el blanco en la primera colisión es la bola "negra" y la tercera bola, sobre la que se hace la segunda colisión, es la bola "roja". Las distancias entre las bolas se expresan en diámetros de bola D .

Expresamos la distancia original d entre los centros de las bolas proyectil y blanco (Fig. 2), así como la distancia b del centro de la bola blanco a la línea de tiro, en términos del diámetro D de las esferas; esto es, escribimos

$$d = nD$$

y

$$BG = b = pD; \tag{2}$$

n es el parámetro de distancia proyectil-blanco y p es el parámetro de impacto de la primera colisión.

De estas expresiones y del triángulo rectángulo BGA se obtiene para el ángulo de tiro x la expresión

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= \frac{BG}{BA} \\ &= b/d \\ &= p/n. \end{aligned} \tag{3}$$

Usando ahora el teorema de los senos en el triángulo BCF y con $BF = D$ y $\angle FBC =$

$\angle FBG + \angle GBC = \pi/2 - (\beta - \phi - x)$ se tiene

$$\frac{D}{\text{sen}(\beta - \vartheta - x)} = \frac{FC}{\cos(\beta - \phi - x)}. \tag{4}$$

El mismo teorema en el triángulo AFC da

$$\frac{AF}{\text{sen}(\vartheta - \alpha + x)} = \frac{FC}{\text{sen}(\alpha - x)}, \tag{5}$$

y dividiendo la Ec. (4) entre la (5) se obtiene

$$\frac{\text{sen}(\vartheta - \alpha + x)}{\text{sen}(\beta - \vartheta - x)} = \frac{AF}{D} \frac{\text{sen}(\alpha - x)}{\cos(\beta - \phi - x)}. \tag{6}$$

De los triángulos rectángulos ABG y FBG se obtiene ahora

$$\begin{aligned} AF &= AG - FG \\ &= \sqrt{(AB^2 - BG^2)} - \sqrt{(BF^2 - BG^2)} \\ &= \sqrt{(d^2 - b^2)} - \sqrt{(D^2 - b^2)}, \end{aligned}$$

que con $d = nD$ y $b = pD$ de las Ecs. (2), se escribe

$$AF = D\{\sqrt{(n^2 - p^2)} - \sqrt{(1 - p^2)}\}.$$

Sustituyendo en la Ec. (6) se obtiene

$$\frac{\text{sen}(\vartheta - \alpha + x)}{\text{sen}(\alpha - x)} = \{\sqrt{(n^2 - p^2)} - \sqrt{(1 - p^2)}\} \frac{\text{sen}(\beta - \theta - x)}{\cos(\beta - \phi - x)}. \tag{7}$$

Ésta es una relación puramente geométrica entre los elementos de los triángulos de la Fig. 2. Para que la bola proyectil rebote en la dirección FC y choque centro-a-centro con la tercera bola es necesario que el parámetro de impacto tenga precisamente el valor $p = \cos \theta$ [Ec. (1)]. Pero, por otra parte, de la Fig. 2 y de su recuadro se encuentra que $p = pD/D = BG/BF = \cos \phi$. Comparando con el valor anterior se concluye ahora que la condición para que la bola proyectil se desvíe al rebotar a un ángulo ϑ con la línea de tiro y por lo tanto que choque centro-a-centro con la tercera bola es $\phi = \vartheta$. Esta condición equivale a que BF sea perpendicular a FC ; o sea, $\angle BCF = \pi/2 + \theta - \phi = \pi/2$.

Sustituyendo $\phi = \vartheta$ en la Ec. (7) se tiene la ecuación de carambola centro-a-centro sobre la tercera bola:

$$\text{sen}(\vartheta - \alpha + x) \cos(\beta - \theta - x) = \left\{ \sqrt{(n^2 - p^2)} - \sqrt{(1 - p^2)} \right\} \text{sen}(\alpha - x) \text{sen}(\beta - \vartheta - x).$$

Desarrollando las funciones trigonométricas de esta ecuación en términos de las funciones de los ángulos α , β , ϑ y x , sustituyendo los valores de $\cos \vartheta = p$, $\sin x = p/n$ de las Ecs. (1) y (3), los de $\sin \vartheta = \sqrt{1-p^2}$ y $\cos x = \sqrt{(n^2-p^2)}/n$ que de éstos se obtienen y con un trabajo algebraico y trigonométrico pesado² se obtiene finalmente

$$p\{\sqrt{(n^2-p^2)} - \sqrt{(1-p^2)}\} \sin \beta - \{p^2 + \sqrt{(n^2-p^2)}\sqrt{(1-p^2)}\} \cos \beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin \alpha}. \quad (8)$$

Resolviendo esta ecuación para p se obtendría el parámetro de impacto $p = b/D$ en términos del parámetro de distancia $n = d/D$ y de los ángulos α y β que definen la posición de la tercera bola respecto a las otras dos. La carambola se tiraría simplemente apuntando desde la bola proyectil a la bola blanco orientando la línea de tiro hasta verla con el parámetro de impacto obtenido de la solución de esa ecuación. También se podría orientar la línea de tiro con el ángulo x obtenido de $\sin x = p/n$ [Ec. (3)]. Pero resolver la Ec. (8) para p no es fácil. Resulta mas sencillo resolverla para n en términos de α , β y p . El valor de p para distintos valores de α , β y n se puede obtener mas fácilmente de gráficas de n contra p para distintos valores de α y β .

Resolviendo la Ec. (8) para n se obtiene,

$$n = \sqrt{p^2 + \left[p \cot(\beta - \cos^{-1} p) + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin(\beta - \cos^{-1} p)} \right]^2}. \quad (9)$$

De esta ecuación se ve inmediatamente que $n = \infty$ si $\beta - \cos^{-1} p = 0$. O, inversamente, $p = \cos \beta$ resuelve la ecuación si $n = \infty$. Este valor del parámetro de impacto, que llamamos p_∞ , es el necesario para tirar la carambola cuando la bola proyectil se encuentra muy lejos de la bola blanco. Es independiente del ángulo α y es el que se obtendría directamente de la gráfica de la Fig. 1.

Este resultado se obtiene también de la Fig. 2 imaginando que el triángulo con vértices en los centros de las tres bolas cambia de dimensiones conservando los mismos valores de sus ángulos interiores. El ángulo x se reduce hacia cero, el ángulo $\vartheta \rightarrow \beta$ y el parámetro de impacto de carambola $p \rightarrow p_\infty = \cos \beta$ si las dimensiones del triángulo se hacen muy grandes; esto es, si $n \rightarrow \infty$.

Si, por el contrario, las dimensiones del triángulo se reducen, se llega al caso extremo mostrado en la Fig. 3 en que la bola proyectil apenas roza a la bola blanco y sigue sin desviarse a lo largo del lado AC hasta chocar con la tercera bola y hacer la carambola. En estas condiciones $p = 1$ y $n = 1/\sin \alpha$. Este resultado, desde luego, también se obtiene sustituyendo $p = 1$ en la Ec. (8).

Para triángulos con los mismos ángulos internos y de tamaños intermedios entre estos dos; o sea, para valores de n entre $1/\sin \alpha$ e ∞ , el valor del parámetro de impacto de carambola se encuentra entre 1 y p_∞ . Esto es, si $1/\sin \alpha \leq n \leq \infty$ se tiene $1 \geq p \geq p_\infty = \cos \beta$.

La Fig. 4 es la gráfica de $n(p)$ contra p para los valores $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$. La curva tiene dos ramas, una para $p \geq p_\infty$ y la otra para $p \leq p_\infty$. Esto parecería indicar que

² Los cálculos detallados para pasar de la Ec. (7) a la Ec. (8) se pueden conseguir solicitándolos por escrito al autor.

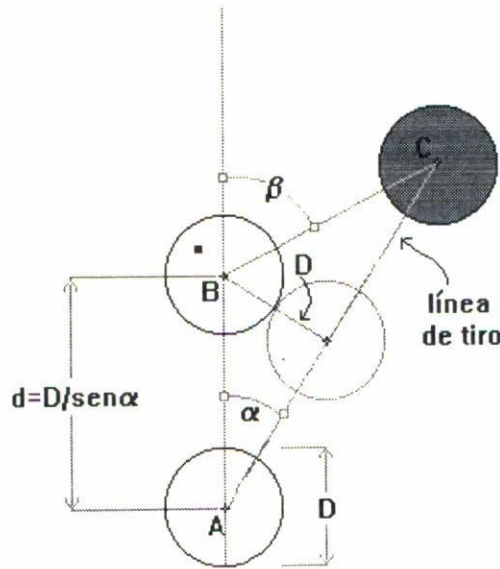


FIGURA 3. Distancia mínima entre proyectil y blanco para lograr una carambola “centro-a-centro”. El parámetro de impacto en la primera colisión es $p = 1$.

existen dos parámetros de impacto de carambola para cada valor finito de $n(p)$; o sea, dos posibilidades de tiro de la carambola. En realidad sólo la rama de la derecha corresponde a carambolas reales. La rama de la izquierda corresponde a carambolas ficticias entre bolas penetrables.

La rama a la derecha de $p_\infty = \cos 60^\circ = 0.5$ da los valores del parámetro de impacto de carambola entre 0.5 y 1 correspondientes a distancias proyectil blanco entre $n = \infty$ y la distancia mínima proyectil-blanco para carambola, que es $1/\text{sen } 30^\circ = 2$ y corresponde al parámetro de impacto $p = 1$ con la bola blanco. Con este valor el proyectil apenas roza el blanco (Fig. 3).

La rama a la izquierda de p_∞ daría valores del parámetro de impacto de carambola entre 0.5 y 0. El valor 0.5 corresponde, como en la otra rama, al valor $n = \infty$. El valor de n que corresponde a $p = 0$, obtenido haciendo $p = 0$ en la Ec. (9), es $n = \sqrt{[1 - \cot \alpha \tan \beta]^2}$, que para este ejemplo, $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, tiene también el valor $n(p = 0) = 2$. Las colisiones que describe esta rama de la curva no son reales. Las condiciones angulares se satisfacen con la bola proyectil en contacto con la mitad más lejana de la bola blanco, como lo muestra el diagrama en esta parte de la gráfica. Correspondería a una bola proyectil que pasara a través de la bola blanco y “chocara” con ella inmediatamente al salir.

3. SOLUCIÓN GEOMÉTRICA

El parámetro de impacto de carambola se puede encontrar también por un método geométrico sencillo basado en el hecho de que en la colisión elástica de dos cuerpos sólo la componente del ímpetu total normal a la superficie del contacto es efectiva en transmitir ímpetu [1]. Si los cuerpos en colisión son esferas, esta dirección coincide con la línea que

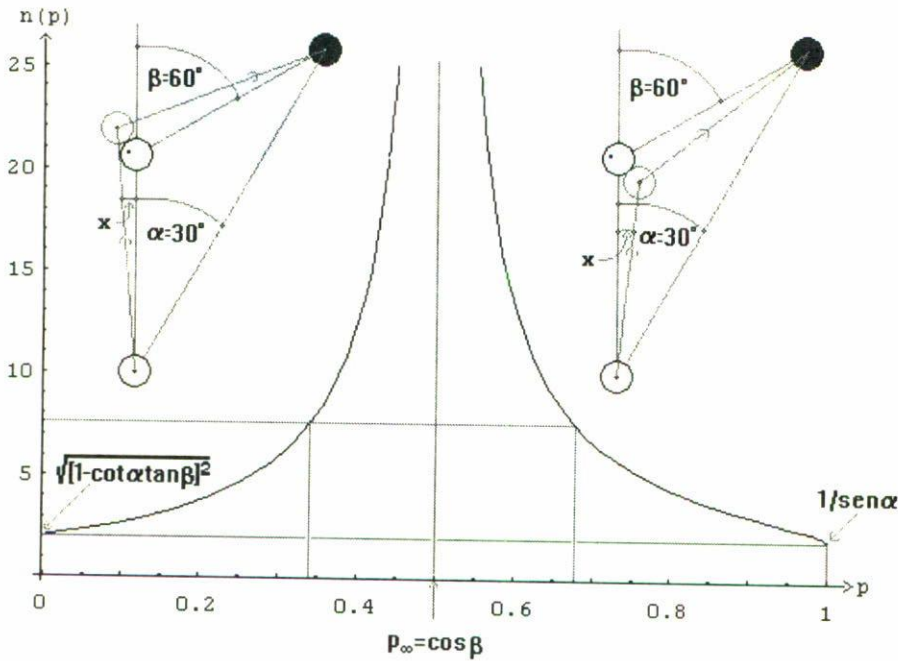


FIGURA 4. Gráfica de la distancia proyectil-blanco, $n(p)$, contra parámetro de impacto de carambola para los ángulos mostrados. Sólo la rama de la derecha corresponde a colisiones reales entre bolas impenetrables.

pasa por sus centros por lo que ésta sería la dirección del ímpetu final de una esfera blanco que estuviera en reposo antes del choque. Si además las esferas son iguales, la dirección del ímpetu final del proyectil es perpendicular a la del ímpetu del blanco; por lo que esta dirección es la de la tangente a las esferas en el punto de contacto.

En la Fig. 5 se muestran las esferas con sus centros en M , N y P antes del choque. La esfera con centro en M , la bola blanca, es el proyectil y la esfera con centro en N , la bola negra, es el blanco. La tercera bola, con centro en P , es la bola roja. Las tres bolas tienen el mismo diámetro D .

Al momento del choque con la bola blanco el centro de la bola proyectil se localiza a una distancia de dos radios, o sea un diámetro de bola D , del centro de la esfera blanco. Es decir, en este momento el centro de la bola proyectil se encuentra en algún punto Q de un círculo de radio D concéntrico con la bola blanco al que llamaremos círculo de centros.

Después del choque la bola blanco se mueve a lo largo de la línea QN que pasa por los centros al momento del choque (Fig. 5). Por ser iguales las bolas, la bola proyectil, después de chocar, se mueve perpendicularmente al movimiento de la bola blanco. Esto es, la bola proyectil se mueve sobre la perpendicular al radio QN , que es la dirección de la tangente al círculo de radio D por el punto Q . Si esta línea pasa por el centro P de la tercera bola, ocurre una carambola centro-a-centro.

Razonando ahora inversamente se deduce que si para empezar se conocen las posiciones M , N y P de los centros de las esferas, el problema de determinar el ángulo de tiro x para carambola se resuelve simplemente trazando la tangente PQ desde el centro de la tercera bola al círculo de centros trazado sobre N . La línea de tiro es la recta MQ que

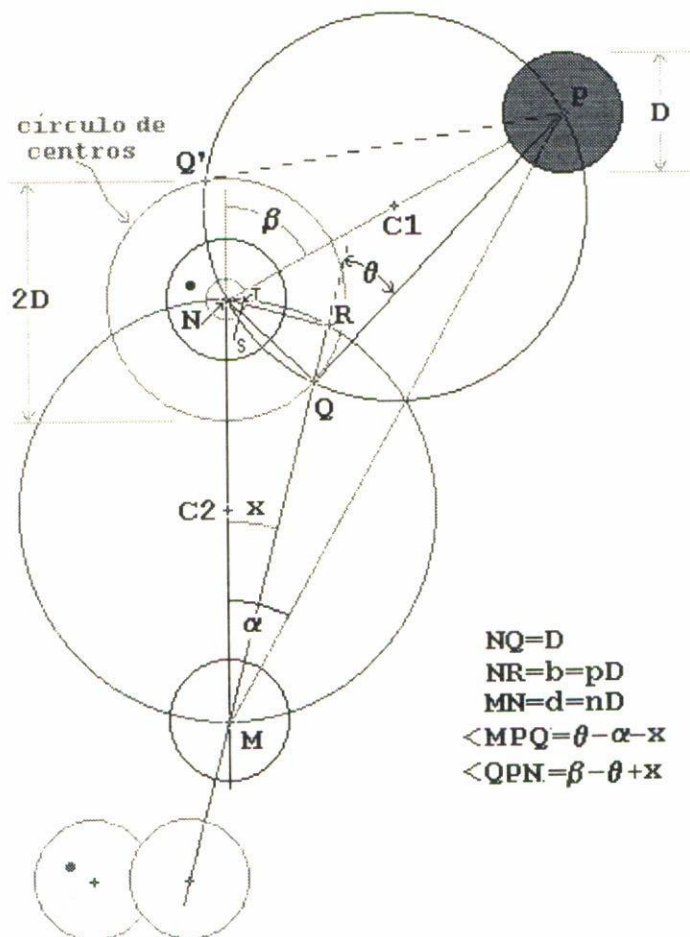


FIGURA 5. Método geométrico para encontrar el ángulo de tiro x y el parámetro de impacto de carambola centro-a-centro p_1 . La recta PQ es tangente al círculo de centros de radio D centrado en el blanco. Las bolas “se ven” a lo largo de la línea de tiro con ese parámetro como se muestra en la figura de abajo.

pasa por el centro de la bola proyectil y por el punto de tangencia Q . El ángulo de tiro es $x = \angle NMQ$.

El punto de tangencia Q es una de las dos intersecciones Q y Q' del círculo de diámetro PN centrado en $C1$, con el círculo de centros sobre N . La recta PQ , perpendicular al radio NQ porque el ángulo inscrito NQP subtiende media circunferencia, es tangente al círculo de centros sobre N en el punto de intersección Q .

El parámetro de impacto de carambola se obtiene de la distancia $b = NR$ desde el centro del blanco a la línea de tiro MQ . La línea de distancia NR , por ser perpendicular a MR , se puede obtener de la intersección R de la recta MQ con el círculo de diámetro MN y centro $C2$. El ángulo NRM inscrito en este círculo es recto porque subtiende media circunferencia. El parámetro p se obtiene de dividir la longitud b de NR entre D ; esto es, de $p = NR/D = b/D$. Esto se puede hacer directamente sobre la Fig. 5 trazando el triángulo

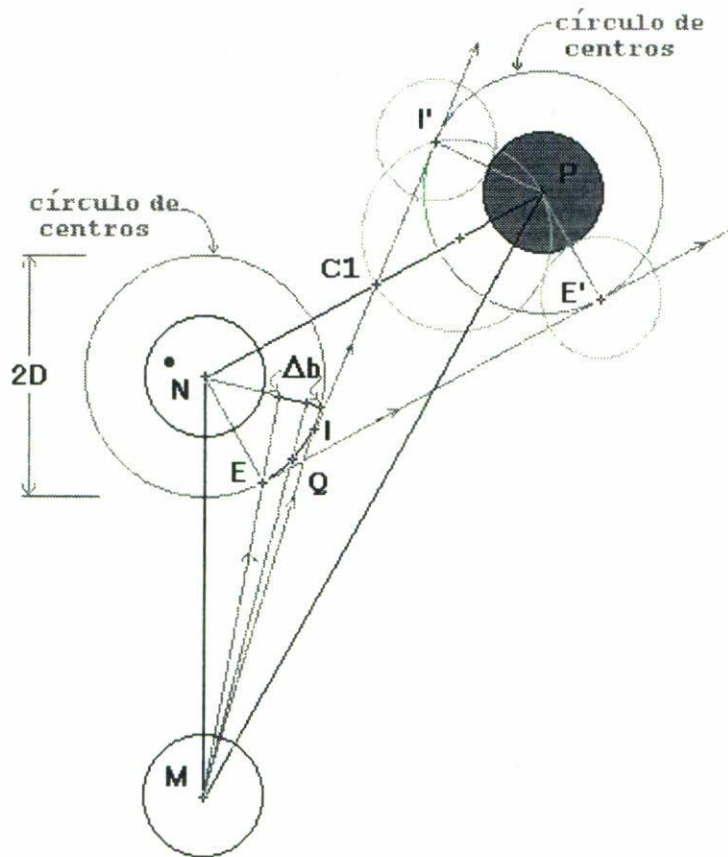


FIGURA 6. Método geométrico para encontrar los parámetros de impacto de carambola rasante por abajo, p_0 , y rasante por arriba, p_2 . Las rectas EE' e II' son las tangentes exterior e interior a los círculos de centros sobre la bola blanco y la tercera bola respectivamente. El diámetro transversal de colisión es Δb .

NST semejante al NQR y con lados reducidos en proporción de $1/D$. La longitud NT da directamente el valor $\cong 0.8$ del parámetro de impacto de carambola. En la figura esta construcción se hizo trazando primero un círculo unitario sobre N y después la recta ST paralela a QR por el punto de intersección del círculo unitario con la hipotenusa NQ , de longitud D , del triángulo rectángulo NRQ . A la escala de la figura las esferas tienen el diámetro $D = 6$ cm de las bolas de billar. Con $p = 0.8$ y mirando a lo largo de la línea de tiro las bolas se verían como se muestra al pie de la Fig. 5.

4. LONGITUD TRANSVERSAL DE CARAMBOLA

En las Figs. 2 y 5 la condición para que ocurra una carambola es que la dirección de movimiento de la bola blanco pase por el centro de la tercera bola. Esta condición es demasiado estricta. La carambola ocurre también si la dirección de movimiento es tal que la bola proyectil, después de chocar con la bola blanco, pasa rozando a la tercera

bola por arriba o por abajo, como se muestra en la Fig. 6 con las trayectorias MII' y MEE' . O si sigue cualquier trayectoria intermedia entre esas dos. Existe pues no sólo un parámetro de impacto de carambola sino un intervalo de valores Δp comprendidos entre los correspondientes a que pase rozando a la tercera bola. Si suponemos que al tirar todos los valores del parámetro de impacto entre el mínimo posible, $p_{\min} = 0$, y el máximo posible, $p_{\max} = 1$, son igualmente probables, la probabilidad de lograr un tiro de carambola es igual a $\Delta p / (p_{\max} - p_{\min}) = \Delta p$.

El grado de dificultad de la carambola se puede también estimar por la longitud, o diámetro transversal, Δb , que cubre el intervalo de valores Δp del parámetro de carambola sobre la perpendicular por el centro N del blanco a la línea de tiro. De la definición del parámetro de impacto, $p = b/D$, es claro que $\Delta b = D\Delta p$. Esta es aproximadamente igual a la longitud de una recta transversal a la línea de tiro por la que debe pasar el centro de la bola proyectil para que ocurra una carambola; es decir, es el tamaño del blanco de carambola. En analogía unidimensional con la llamada sección transversal en colisiones atómicas y nucleares se podría llamar diámetro transversal de carambola. La probabilidad de pasar el centro de la bola proyectil por Δb al tirar sobre un blanco de longitud transversal total D , que es la longitud del radio NQ en la Fig. 5, es $\Delta b/D = D\Delta p/D = \Delta p$.

El diámetro transversal de carambola también se puede calcular por medios geométricos (Fig. 6). Como en la Fig. 5, cualquier trayectoria de la bola proyectil, después de la primera colisión, es tangente al círculo de centros trazado sobre el centro N del blanco. Si la bola proyectil pasa apenas rozando a la tercera bola, su trayectoria es también tangente al círculo de centros de radio D trazado sobre el centro P de esta bola. La trayectoria de la bola rasante por abajo a la tercera bola es MEE' y la rasante por arriba es MII' . Resulta pues que las trayectorias del proyectil después de rebotar en la bola blanco son la tangente exterior EE' y la tangente interior II' a los círculos de centros trazados sobre la bola blanco y sobre la tercera bola.

Los puntos de tangencia de la tangente exterior, por ser iguales los diámetros de las bolas, son simplemente las intersecciones E y E' de las perpendiculares a la línea de centros NP por los centros, con los círculos de centros trazados sobre N y P . La tangente interior, también por ser iguales los diámetros de las bolas, pasa por el punto medio $C1$ de la recta que une los centros de las esferas N y P y por el punto de intersección I' del círculo de centros de radio D centrado en P , con el círculo de diámetro $C1P$ centrado en el punto medio de este segmento (no mostrado en la Fig. 7).

Trazando las tangentes interior II' y la exterior EE' se determinan los puntos extremos sobre el círculo de centros, I y E , para apenas lograr la carambola rozando la tercera bola. En la Fig. 6, el arco EQI del círculo de centros es el lugar geométrico del centro de la bola proyectil en la primera colisión de una carambola. Trazando las líneas de tiro ME y MI se determina el diámetro transversal de carambola Δb sobre la perpendicular a MQ por N . A la escala de la Fig. 6, $D = 6$ cm, $D_0 = 3.9$ cm, $D_2 = 5.7$ cm, $p_0 = 0.65$ y $p_2 = 0.95$. El subíndice 0 corresponde a la carambola rasante por abajo y el 2 a la carambola rasante por arriba a la tercera bola.

El diámetro transversal de carambola se puede expresar en una forma analítica simple. De la Fig. 7, y empleando los valores de ángulos y distancias contenidos en el recuadro de esa figura en los triángulos MEN y MIN , se obtiene:

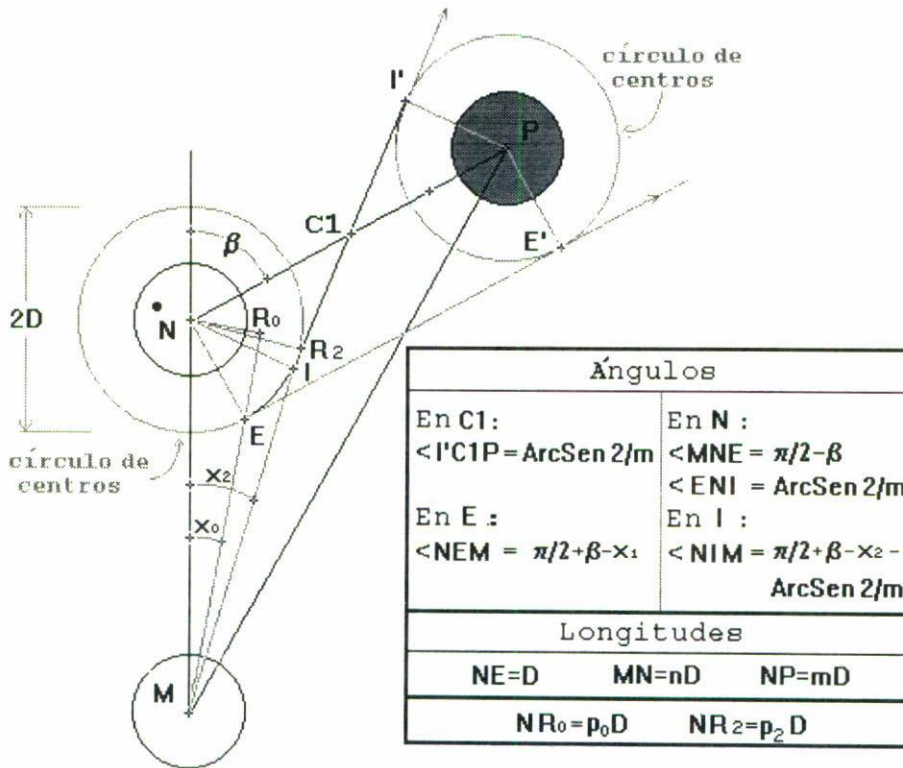


FIGURA 7. Diagrama para calcular el diámetro transversal de carambola. Los ángulos de tiro de las carambolas rasantes por abajo y por arriba son x_0 y x_2 respectivamente.

Del teorema de los senos en el triángulo MNE :

$$\frac{NE}{\text{sen}(\angle NME)} = \frac{MN}{\text{sen}(\angle MEN)}$$

que con los valores del recuadro da

$$\frac{D}{\text{sen } x_0} = \frac{nD}{\text{sen}(\pi/2 + \beta - x_0)}$$

O bien,

$$n \text{ sen } x_0 = \cos(\beta - x_0).$$

Desarrollando $\cos(\beta - x_0)$, reduciendo términos, elevando al cuadrado la expresión resultante, reduciendo términos nuevamente y tomando la raíz cuadrada se obtiene para $\text{sen } x_0$ la expresión

$$\begin{aligned} \text{sen } x_0 &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{(n - \text{sen } \beta)^2 + \cos^2 \beta}} \\ &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \text{ sen } \beta}} \end{aligned} \quad (10)$$

El parámetro de impacto p_0 para esta carambola en que la bola proyectil pasa apenas rozando a la tercera bola por abajo, por E' en la Fig. 7, se obtiene en el triángulo rectángulo NR_0M y de la relación

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x_0 &= \frac{NR_0}{NM} \\ &= \frac{p_0 D}{nD} \\ &= \frac{p_0}{n}.\end{aligned}$$

Y en vista al resultado de la Ec. (10) se obtiene

$$p_0 = \frac{n \cos \beta}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \operatorname{sen} \beta}}. \quad (11)$$

Es notable que este valor no dependa del ángulo α , sino sólo del ángulo β y de la distancia entre las bolas proyectil y blanco de la primera colisión. Nótese también que para valores muy grandes de n esta expresión, tal como debe, tiende a $\cos \beta$ que es el parámetro de impacto para colisiones centro-a-centro a distancias grandes.

El parámetro de impacto de la carambola que apenas pasa rozando por arriba a la tercera bola se obtiene del triángulo MNI en la Fig. 7. Del teorema de los senos se tiene

$$\frac{NI}{\operatorname{sen}(\angle NMI)} = \frac{NM}{\operatorname{sen}(\angle NIM)},$$

que con las expresiones en el recuadro de la Fig. 7 da

$$\frac{D}{\operatorname{sen} x_2} = \frac{nD}{\operatorname{sen}(\pi/2 + \beta - x_2 - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m)}.$$

De esta ecuación se obtiene ahora

$$n \operatorname{sen} x_2 = \cos[\beta - x_2 - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m].$$

Y con los mismos pasos seguidos en la deducción de la Ec. (10) se obtiene de esta ecuación

$$\operatorname{sen} x_2 = \frac{\cos(\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m)}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \operatorname{sen}(\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m)}} \quad (12)$$

y el valor del parámetro de impacto p_2 de la carambola que apenas pasa rozando por arriba a la tercera bola es

$$p_2 = \frac{n \cos(\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m)}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \operatorname{sen}(\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 2/m)}}. \quad (13)$$

Es notable también que p_2 , al contrario de p_0 , dependa de la distancia $NP = mD$ entre la bola blanco y la tercera bola, y por lo tanto del ángulo $NMP = \alpha$ entre las líneas de centros MN y MP .

El diámetro transversal de carambola se obtiene ahora simplemente sustituyendo las Ecs. (11) y (13) en la expresión

$$\Delta b = (p_2 - p_0)D. \quad (14)$$

Suponiendo un arreglo de las esferas con los valores de los ángulos empleados en la gráfica de la Fig. 4, $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, y para una distancia $n = m = 3.5$ diámetros de esfera entre la bola blanco y cada una de las otras dos, de las Ecs. (11) y (13) se obtienen los valores de los parámetros $p_0 = 0.65$ y $p_2 = 0.99$, Fig. 4, que para un diámetro de bola $D = 6$ cm corresponden a puntos a la derecha del centro de la bola blanco a distancias de $D_0 = 3.9$ cm y $D_2 = 5.9$ cm respectivamente.

El diámetro transversal de carambola es $\Delta b = (0.99 - 0.65)6$ cm $\cong 2$ cm; es decir, solamente hace falta pasar el centro de la bola proyectil por un diámetro transversal igual a $1/3$ del diámetro de la bola para que ocurra una carambola. Es interesante notar, sin embargo, que este diámetro transversal se encuentra totalmente fuera de la bola blanco; empieza casi a 1 cm y termina casi a 3 cm del borde derecho de la bola blanco. Para hacer la carambola hay que apuntar fuera de la bola blanco; donde no hay nada.

Otro ejemplo interesante es la carambola a ángulo recto, Fig. 8. Ésta suele tomarse como un caso difícil porque, como puede verse en la gráfica de la Fig. 1, aunque para que la bola proyectil rebote sobre la bola blanco a 90° sólo se requiere que el parámetro de impacto sea igual a cero, su ímpetu resultante al rebotar a $p = 0$, también es cero, la bola no se mueve a ninguna parte y no hay carambola. Pero esto, sin embargo, sólo ocurre si se trata de la carambola rasante por abajo a la tercera bola. Si la trayectoria pasa por cualquier otra parte de la tercera bola, la carambola sí es posible. Si, por ejemplo, suponemos $n = 3.5$, $m = 3.5$ y hacemos $\beta = \pi/2$ en las Ecs. (11) y (13) obtenemos los valores $p_0 = 0$, $p_2 = 0.73$ y $\Delta b = (p_2 - p_0)D = 0.73 \times 6$ cm $\cong 4.4$ cm. Esto es, la carambola rasante por arriba se consigue dirigiendo el movimiento del centro de la bola proyectil por un punto 4.4 cm a la derecha del centro del blanco. Pasándolo por cualquier otro punto entre éste y el centro se consigue una trayectoria del proyectil entre la rasante por arriba y la rasante por abajo, y una carambola. La probabilidad de conseguirla es, en realidad, considerable. Es igual a $\Delta b/D = 4.4/6 = 0.733$; o sea, de 73.3% si procuramos no tirar precisamente sobre el centro de la bola blanco sino sobre cualquier punto entre éste y uno a 4.4 cm a la derecha. Rebotando el proyectil exactamente sobre el centro del blanco, la carambola no ocurre.

5. PARÁMETRO DE IMPACTO DE CARAMBOLA

El método seguido antes para encontrar los valores de los parámetros de carambolas rasantes se puede emplear también para encontrar el parámetro de impacto de carambola centro-a-centro; es decir, el de la que da una trayectoria que pasa por el centro de la tercera

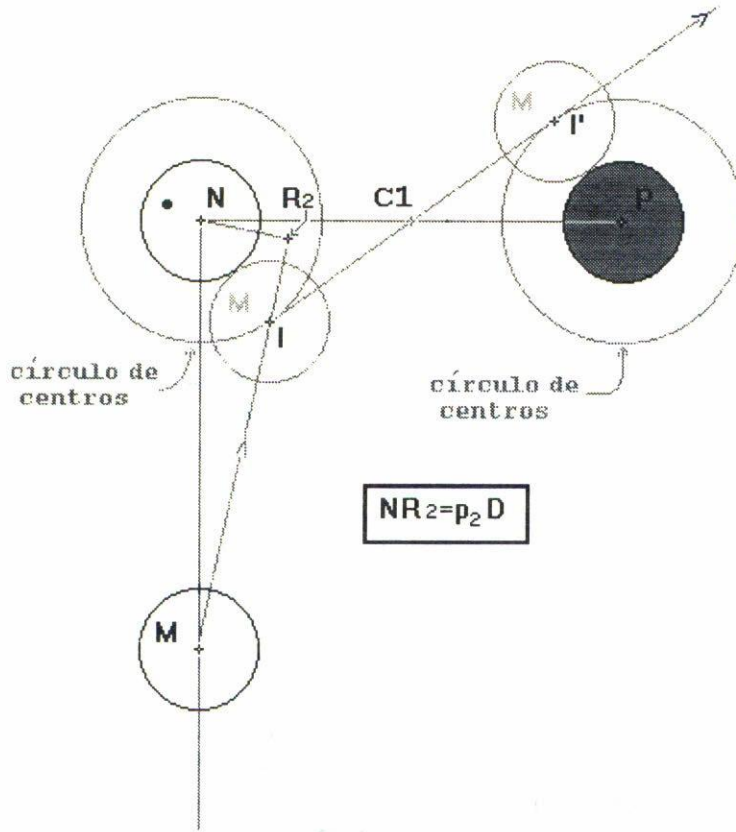


FIGURA 8. Carambola rasante por arriba para líneas de centros en ángulo recto.

bola. Esto además es un método para resolver la Ec. (8); es decir, para despejar p de esa ecuación.

La Fig. 9 es el diagrama de colisión de la carambola centro-a-centro. Es el análogo de las Figs. (7) y (8) para la trayectoria que pasa por el centro de la tercera esfera. Los valores de los ángulos interiores en los triángulos de la figura, obtenidos de la definición de las funciones trigonométricas y de que los ángulos interiores en un triángulo suman dos ángulos rectos, se muestran en el recuadro de la Fig. 9. Empleando el teorema de los senos en el triángulo MNQ se tiene

$$\frac{NQ}{\text{sen}(\angle NMQ)} = \frac{NM}{\text{sen}(\angle MQN)}$$

Y con las expresiones del recuadro de la Fig. 9 y $\angle QPN = \text{Arc sen}(1/m)$

$$\frac{D}{\text{sen } x} = \frac{nD}{\text{sen}[\pi/2 + \beta - \text{Arc sen}(1/m) - x]}$$

O bien,

$$n \text{ sen } x = \cos[\beta - \text{Arc sen}(1/m) - x].$$

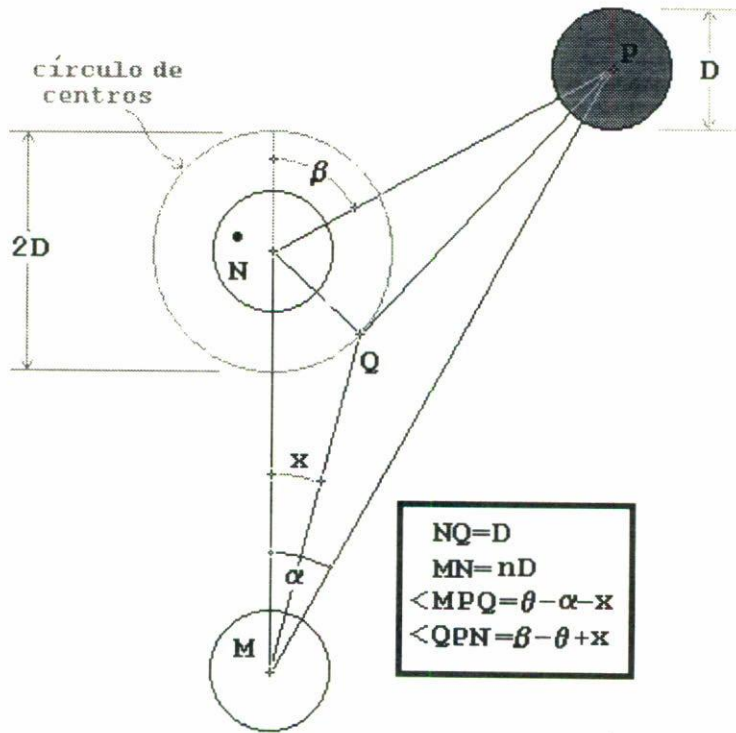


FIGURA 9. Diagrama para calcular el parámetro de impacto de carambola centro-a-centro.

Desarrollando el miembro derecho en funciones trigonométricas del ángulo x , reduciendo términos, elevando al cuadrado, reduciendo términos otra vez y tomando la raíz cuadrada del resultado se obtiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{\cos[\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(1/m)]}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \cos[\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(1/m)]}}$$

El parámetro de impacto p_1 se obtiene ahora de $\operatorname{sen} x = p/n$, Ec. (3).

$$p_1 = \frac{n \cos[\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(1/m)]}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \cos[\beta - \operatorname{Arc} \operatorname{sen}(1/m)]}} \quad (15)$$

Esta es la ecuación del parámetro de carambola centro-a-centro p_1 en términos de los parámetros de distancia de las bolas, n y m , y del ángulo β . Escribiéndola en términos del parámetro n y los ángulos α y β se encuentra la solución de la Ec. (8) de la distancia de carambola; o sea, el resultado de despejar p de esa ecuación.

El teorema de los senos aplicado al triángulo NMP da

$$\frac{NP}{\operatorname{sen}(\angle NMP)} = \frac{MN}{\operatorname{sen}(\angle MPN)}$$

O sea,

$$\frac{mD}{\text{sen } \alpha} = \frac{nD}{\text{sen}(\beta - \alpha)}.$$

De esta ecuación se obtiene

$$\frac{1}{m} = \frac{\text{sen}(\beta - \alpha)}{n \text{sen } \alpha}.$$

Y sustituyendo en la Ec. (15) se obtiene finalmente

$$p_1 = \frac{n \cos \Phi_1}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \text{sen } \Phi_1}}, \quad (16)$$

con

$$\Phi_1 = \beta - \text{Arc sen}\{\text{sen}(\beta - \alpha)/n \text{sen } \alpha\}.$$

Ésta es, aunque usted no lo crea, la solución de la Ec. (9) para el parámetro p .

Comparando ahora las Ecs. (11), (13) y (15) para los tres parámetros de carambola, p_0, p_1 y p_2 se encuentra que estos pueden ser escritos con la fórmula general

$$p_j = \frac{n \cos \Phi_j}{\sqrt{n^2 + 1 - 2n \text{sen } \Phi_j}}, \quad (17)$$

donde

$$\Phi_j = \beta - \text{Arc sen}\{j \text{sen}(\beta - \alpha)/n \text{sen } \alpha\},$$

donde $j = 0, 1, 2$ y estos valores de j corresponden al parámetro de carambola rasante por abajo, al de carambola centro-a-centro y al de carambola rasante por arriba, respectivamente.

El diámetro transversal de carambola es

$$\Delta b = (p_2 - p_0)D. \quad (18)$$

Las Figs. 10 y 11 muestran los tres parámetros de carambola p_0, p_1 y p_2 como funciones de la distancia $n(p)$ entre la bola proyectil y la bola blanco, y para valores del ángulo β entre las líneas de centros, en la bola blanco, de 60° y de 90° , respectivamente. El Apéndice es un programa sencillo no optimizado, en el lenguaje de "Mathematica" [2], para calcular y trazar esas gráficas para distintos valores de β y de m .

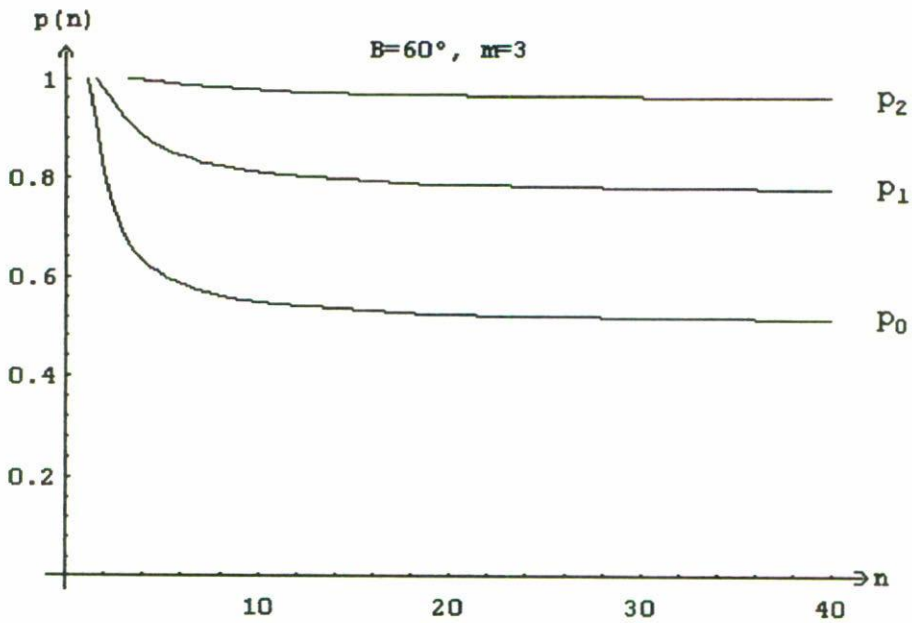


FIGURA 10. (a)

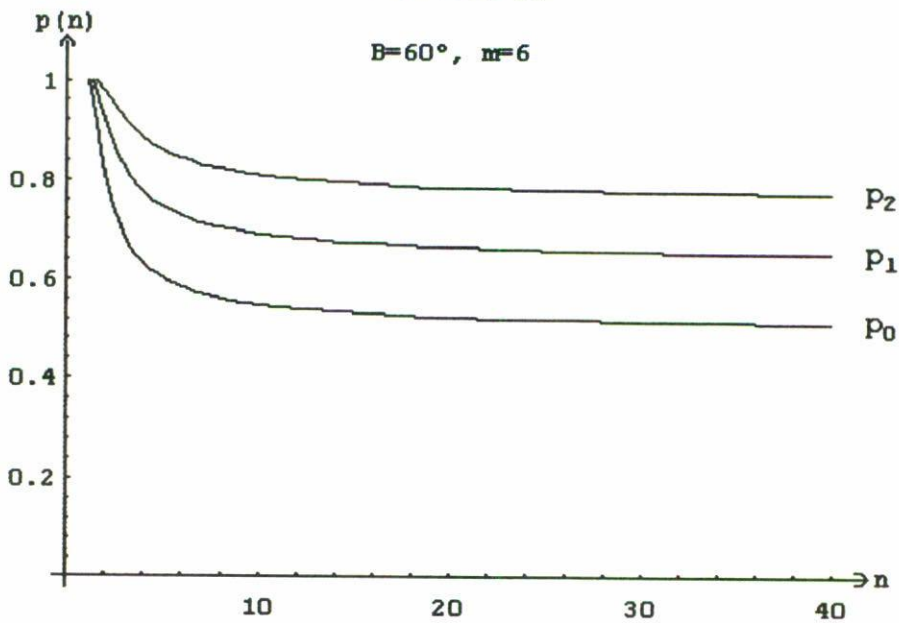


FIGURA 10. (b)

6. CONCLUSIONES

Las condiciones para lograr colisiones elásticas de carambola de esferas rígidas se pueden expresar matemáticamente por fórmulas sencillas en términos del parámetro de impacto de la primera colisión. Los resultados obtenidos se aplican muy bien al juego del billar.

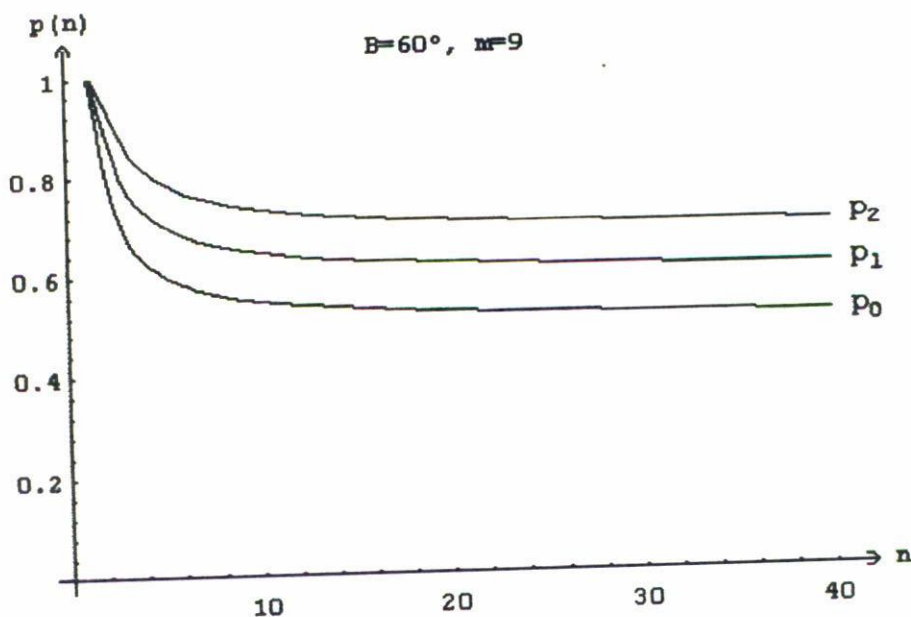


FIGURA 10. Parámetros de impacto de carambola contra distancia proyectil-blanco para un ángulo entre líneas de centros $\beta = 60^\circ$ y parámetro de distancia blanco-tercera bola $m = d_2/D$ de: a) $m = 3$, b) $m = 6$, c) $m = 9$. p_0 , p_1 y p_2 son los parámetros de carambola rasante por abajo, centro-a-centro y rasante por arriba, respectivamente.

Éste, a su vez, puede emplearse como instrumento de laboratorio para enseñar colisiones cuantitativamente con cuerpos macroscópicos tanto en salones de billar como en algún museo de la ciencia que tenga mesa, tacos y bolas. Los resultados obtenidos también pueden emplearse para aprender a hacer carambolas utilizando métodos cuantitativos precisos. Por ejemplo, para explicar por qué es necesario apuntar fuera de la bola blanco para lograr ciertas carambolas, por qué se necesita "agarrar más bola" cuando la bola blanco está cerca y menos bola cuando está lejos o como tirar carambolas rasantes por abajo que dejen a la bola proyectil del mismo lado de las otras dos. Las ecuaciones de carambola son tan sencillas que se pueden programar en calculadoras de mano para calcular p cuando sea necesario.

Un problema matemático interesante es formalizar el método geométrico seguido para calcular p , como método algebraico para resolver la Ec. (8).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Yuri Gabriel Beltrán y a otros artistas de la carambola su paciente ayuda y los tiros de precisión y de fantasía que me brindaron para demostrar los principales resultados de este trabajo en el Club Familiar Ariel. Y a la administración del club por permitir el uso de sus mesas de billar como laboratorio de colisiones. Gracias también al Dr. Jorge Flores por sus expertas demostraciones de carambola y por permitir el empleo de la sala de colisiones de UNIVERSUM como clínica de billar.

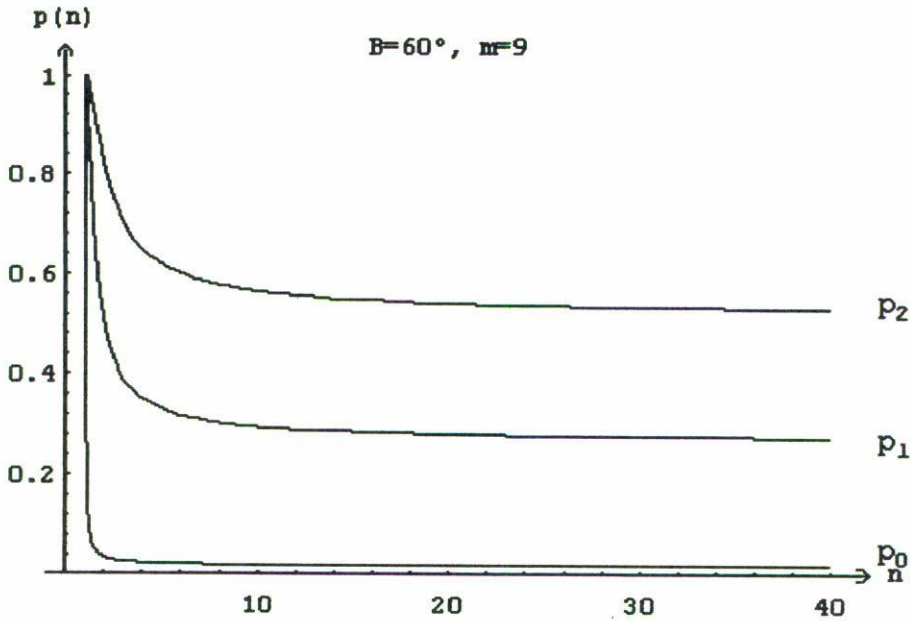


FIGURA 11. Parámetros de impacto de carambola como en la Fig. 10 para bolas en ángulo casi recto; $\beta = 89^\circ$ y parámetro de distancia blanco-tercera bola $m = 3$.

REFERENCIAS

1. V. Beltrán L., *Rev. Mex. Fís.* **40** (1994) 323.
2. "Mathematica". *A system for doing mathematics by computer*. Wolfram Research, Inc. Champaign, Il., EU.

Programa para calcular parámetros de impacto de carambola

Para programa de cálculo "Mathematica"

Calcula los parámetros de impacto de carambola en términos de las distancias d_1 entre el blanco y el proyectil, d_2 entre el blanco y la tercera bola y del ángulo beta de las líneas de centros en la bola blanco.

Programa Gráfico

```

In[1]:=
<<Graphics`Graphics`
Angulo de las líneas de centros proyectil-blanco y proyectil-tercera bola
In[2]:=
ag[i_] := 15*3.1416*i/180;
Angulo de las líneas de centros proyectil-blanco y blanco-tercera bola
In[3]:=
bg[j_] := 10*3.1416*j/180;
Distancia proyectil-blanco en bolas
In[4]:=
en[n_] := n;
Distancia blanco-tercera bola en bolas
In[5]:=
em[m_] := m;
Función angular para parámetro rasante por abajo
In[6]:=
fi0[j_] := bg[j];
■ Datos
Valor del ángulo de las líneas proyectil-blanco y blanco-tercera bola en decenas de grados
In[7]:=
j=6;
Valor de la distancia blanco-tercera bola en bolas
In[8]:=
m=6;
Función angular para parámetro centro-a-centro
In[9]:=
fi1[j_,m_] := bg[j] - ArcSin[1/em[m]];
Función angular para parámetro rasante por arriba
In[10]:=
fi2[j_,m_] := bg[j] - ArcSin[2/em[m]];
Parámetro rasante por abajo
In[11]:=
pg0[j_,n_] := en[n]*Cos[fi0[j]]/Sqrt[n^2+1-
2*en[n]*Sin[fi0[j]]];
Parámetro centro-a-centro
In[12]:=
pg1[j_,m_,n_] := en[n]*Cos[fi1[j,m]]/Sqrt[n^2+1-
2*en[n]*Sin[fi1[j,m]]];

```

Parámetro rasante por arriba

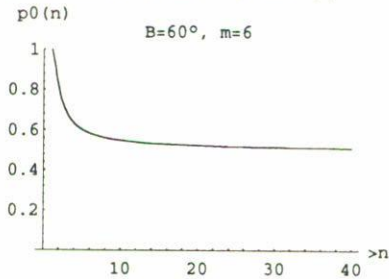
In[13]:=

```
pg2[j_,m_,n_] := en[n]*Cos[fi2[j,m]]/Sqrt[n^2+1-
                2*en[n]*Sin[fi2[j,m]]];
```

Gráfica parámetro rasante por abajo

In[14]:=

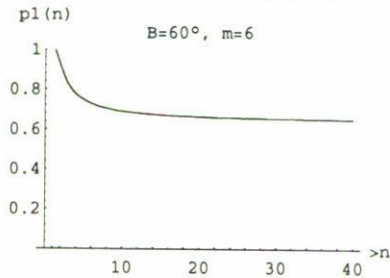
```
r0 = Plot[pg0[j,n],{n,1/Sin[fi0[j]],40},
  AxesLabel->{">n", "p0(n)"},
  PlotRange->{0, 1},
  Ticks->{{{2,""},{4,""},{6,""},{8,""},10,{12,""},
  {14,""},{16,""},{18,""},20,{22,""},{24,""},
  {26,""},{28,""},30,{32,""},{34,""},{36,""},
  {38,""},40},
  Automatic},
  DefaultFont->{"Courier",9},
  AxesOrigin->{0, 0},
  PlotLabel->"B=60°, m=6";
```



Gráfica parámetro centro-a-centro

In[15]:=

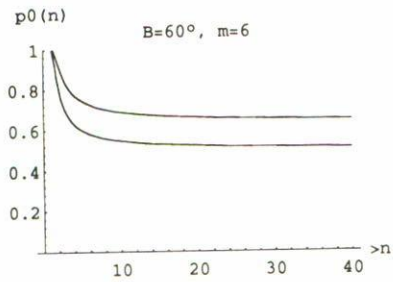
```
r1 = Plot[pg1[j, m, n],{n,1/Sin[fi1[j,m]],40},
  AxesLabel->{">n", "p1(n)"},
  PlotRange->{0, 1},
  Ticks->{{{1,""},{2,""},{4,""},{6,""},{8,""},10,{12,""},
  {14,""},{16,""},{18,""},20,{22,""},{24,""},
  {26,""},{28,""},30,{32,""},{34,""},{36,""},
  {38,""},40},
  Automatic},
  DefaultFont->{"Courier",9},
  AxesOrigin->{0, 0},
  PlotLabel->"B=60°, m=6";
```



Gráfica parámetros rasante abajo y centro-a-centro

In[16]:=

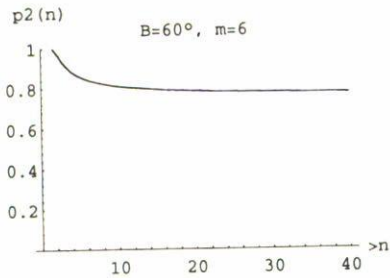
Show[r0, r1];



Gráfica parámetro arriba

In[17]:=

```
r2 = Plot[pg2[j, m, n], {n, 1/Sin[fi2[j, m]], 40},
  AxesLabel->{">n", "p2(n)"},
  PlotRange->{0, 1.0},
  Ticks->{{2, ""}, {4, ""}, {6, ""}, {8, ""}, {10, ""}, {12, ""},
  {14, ""}, {16, ""}, {18, ""}, {20, ""}, {22, ""}, {24, ""},
  {26, ""}, {28, ""}, {30, ""}, {32, ""}, {34, ""}, {36, ""},
  {38, ""}, {40, ""}},
  Automatic,
  DefaultFont->{"Courier", 9},
  AxesOrigin->{0, 0},
  PlotLabel->"B=60°, m=6";
```



In[18]:=

```
Show[r0, r1, r2, PlotLabel->"B=60°, m=6",
  DefaultFont->{"Courier", 9},
  AxesLabel->{">n", "p(n)"}];
```

