Revista Mexicana de Física **42**, *No. 6 (1996) 1051–1059*

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica: consideraciones en torno a su estructura matemática

J.E. MARQUINA, R. RIDAURA, J.L. ÁLVAREZ, V. MARQUINA Y R. GÓMEZ
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
Apartado postal 70-646, 04510 México, D.F., México

Recibido el 9 de febrero de 1996; aceptado el 7 de junio de 1996

RESUMEN. En este trabajo se hace un análisis de las formulaciones matemáticas utilizadas por Newton en su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. A pesar de la aparentemente intencionada omisión del análisis fluxional, por él desarrollado, Newton no pudo evitar su utilización, al menos en su aspecto conceptual, en el desarrollo de algunas de sus demostraciones. Así, el discurso matemático en dicho libro abarca desde la geometría tradicional hasta la teoría de fluxiones (Cálculo), siendo la parte predominante una formulación geométrica del movimiento, o "geometría fluyente", la cual se encuentra a medio camino entre ambas.

ABSTRACT. We analyze the mathematical formulations used by Newton in his *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Apparently, Newton intentionally omitted in all his book the use of the fluxional analysis that he developed. However, he could not avoid its use, at least in its conceptual frame, in some of the demonstrations he provided. The result is that his mathematical discourse in this book drifts from traditional geometry to fluxional theory (Calculus), being the central part a geometrical formulation of movement, or "flowing geometry", which lies in between the two former approaches.

PACS: 01.40.-d

> "Y bien puede gloriarse la Geometría de que de tan pocos principios postulados de otro sitio logre tan grandes resultados. Se funde, pues, la Geometría en la práctica mecánica y no es otra cosa que aquella parte de la Mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir".[1]
>
> Isaac Newton.

1. INTRODUCCIÓN

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica es, seguramente, el libro más importante en la historia de la física. Editado en 1687, corrió con una suerte peculiar, ya que aunque muy pocos estaban capacitados para entenderlo cabalmente, fue aceptado casi incondicionalmente de manera inmediata y le permitió a su autor, Isaac Newton (1642–1727), gozar en vida de una extraordinaria popularidad, no sólo en los ámbitos académicos, sino incluso en los políticos. Sin embargo, aunque el mismo Newton realizó durante su larga vida dos nuevas ediciones de los *Principia* (1713 y 1726), esta auténtica joya del pensamiento científico envejeció de una manera extraordinariamente rápida, no en el sentido conceptual sino en

[1] I. Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Alianza Editorial, Madrid (1987) 98.

el uso del libro mismo. Las generaciones siguientes aprendieron la física newtoniana, traducida a los nuevos algoritmos del Cálculo, y solamente en Inglaterra se siguieron leyendo los *Principia*. Este hecho podrá parecer extraño a todos aquellos estudiantes y profesores de física que, como es natural hoy en día, nunca hayan tenido contacto directo con este libro, pues resulta sorprendente que el creador del Cálculo no lo haya utilizado, de manera prioritaria, en la redacción de su obra cumbre. Aunque Newton aseguró en el *Account of Commercium Epistolicum* (1715)[2] que la primera versión de los *Principia* estaba escrita en estilo fluxional, que luego transcribió a una representación geométrica, hoy en día se admite que tal versión no existió nunca y que la aseveración de Newton debe ubicarse en la controversia con Leibnitz por la paternidad del Cálculo.

Para responder a la pregunta ¿qué matemática utilizó Newton en los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*?, hay que empezar por analizar la estructura general de dicho libro.

2. Estructura de los *Principia*

La obra empieza con un conjunto de definiciones en las que se establecen conceptos tales como masa, cantidad de movimiento, fuerza centrípeta, etc. A continuación, en un "Escolio" se explican los conceptos de lugar, espacio, tiempo y movimiento absolutos, diferenciándolos de los relativos. Newton señala la distinción entre absoluto y relativo, verdadero y aparente, matemático y común. Inmediatamente y con sólo una discusión superficial de cada una de ellas, aparecen las leyes de movimiento, enunciadas de manera axiomática. Finalmente, antes de entrar al Libro Primero —El Movimiento de los Cuerpos— Newton plantea seis corolarios en los que, entre otras cosas, trata sobre el carácter vectorial de las fuerzas, la cantidad de movimiento y el centro común de gravedad.

En los Libros Primero y Segundo —El movimiento de los Cuerpos. (En medios resistentes)—, Newton tratará "...todo lo relativo a la gravedad, levedad, elasticidad, resistencia de los fluidos y fuerzas por el estilo, ya sean de atracción o de repulsión...",[3] que representan los principios matemáticos en filosofía, ya que "...toda la dificultad de la filosofía parece consistir en que, a partir de los fenómenos del movimiento, investiguemos las fuerzas de la naturaleza y después desde estas fuerzas demostremos el resto de los fenómenos".[4]

Una vez sentados los principios matemáticos, en el Libro Tercero —El Sistema del Mundo. (En tratamiento matemático)— Newton plantea la explicación del sistema del mundo, en el que "...a partir de los fenómenos celestes, por medio de proposiciones demostradas matemáticamente en los libros anteriores, se deducen las fuerzas de la gravedad por las que los cuerpos tienden hacia el Sol y a cada uno de los planetas".[5]

[2] Cfr. I.B. Cohen, *Introduction to Newton's "Principia"*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1978) 79. Cfr R.S. Westfall, *Never at Rest*, Cambridge University Press, USA, (1986) 728.

[3] I. Newton, *op. cit. p. 98.*

[4] I. Newton, *op. cit. p. 98.*

[5] I. Newton, *op. cit. p. 98.*

Los *Principia* terminan con un Escolio General en donde, entre otras cosas, Newton señala que "Tan elegante combinación de Sol, planetas y cometas sólo puede tener origen en la inteligencia y poder de un ente inteligente y poderoso".[6]

3. La matemática de los *Principia*

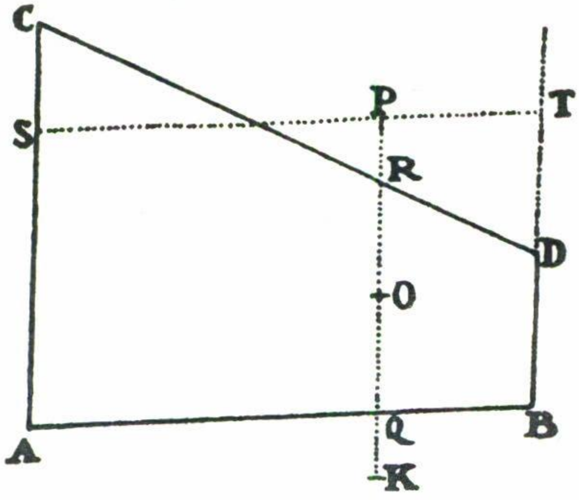
La matemática utilizada predominantemente por Newton en los Libros Primero y Segundo de los *Principia*, es una compleja estructura conceptual, que podría denominarse "geometría fluyente", que basándose en la geometría tradicional, introduce elementos que la acercan a lo que hoy en día conocemos como Cálculo. Sin embargo, esto no obsta para que en algunas partes haya demostraciones estrictamente geométricas y también se encuentren pinceladas de teoría de fluxiones (nombre dado por Newton al Cálculo).

3.1. Geometría tradicional

Como ejemplo de la utilización de la geometría tradicional, basta ver el lema siguiente:

LEMA XVII, SECCIÓN V, LIBRO PRIMERO

Si de un punto cualesquiera **P** de una sección cónica dada se trazan las líneas rectas **PQ**, **PR**, **PS**, **PT** según ángulos dados sobre los lados prolongados infinitamente **AB**, **CD**, **AC**, **DB** de un trapecio **ABDC** que se halla inscrito en la dicha sección cónica y trazadas la líneas una a cada uno; ocurrirá que el rectángulo de las rectas trazadas sobre los dos lados opuestos **PQ** × **PR** estará con respecto al rectángulo de las trazadas sobre los otros dos lados opuestos **PS** × **PT** en una razón dada.



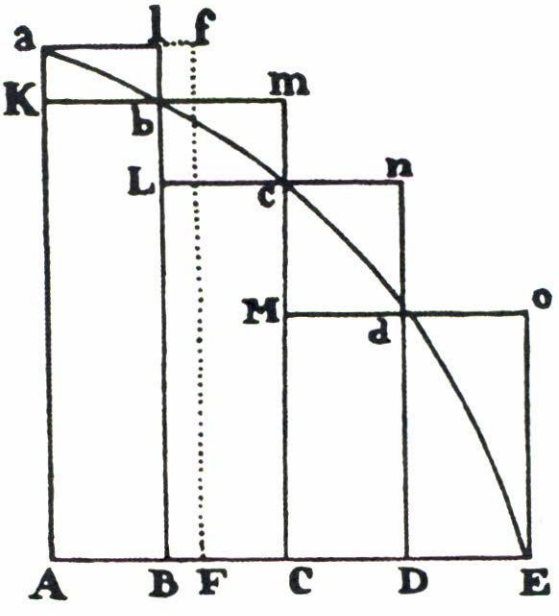
[6] I. Newton, *op. cit.* p. 782.

3.2. *Teoría de fluxiones*

En la Sección I del Libro Primero, Newton plantea un conjunto de lemas en los que fácilmente podemos apreciar el concepto de integral definida, como se observa en el Lema II:

LEMA II, SECCIÓN I, LIBRO PRIMERO

Si en una figura **AacE** comprendida entre las rectas **Aa**, **AE**, y la curva **acE** se inscriben varios paralelogramos **Ab**, **Bc**, **Cd**, etc. construidos sobre bases iguales **AB**, **BC**, **CD**, etc. y con lados **Bb**, **Cc**, **Dd** paralelos al lado **Aa** de la figura; y se completan los paralelogramos **aKbl**, **bLcm**, **cMdn**, etc., si entonces se disminuye la anchura de estos paralelogramos y se aumenta infinitamente el número de ellos: digo que las razones últimas que se dan entre la figura inscrita **AKbLcMdD**, la circunscrita **AalbmcndoE** y la curvilínea **AabcdE** son razones de igualdad.



Al final de esta sección, en un Escolio, en donde Newton se permitía a sí mismo especular, discute lo que el lector debe entender por "cantidades evanescentes" y "cantidades nacientes", en el que podemos visualizar un concepto intuitivo de límite, que es central para todos los desarrollos ulteriores. En dicho Escolio se señala:

ESCOLIO, SECCIÓN I, LIBRO PRIMERO

...Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas veces tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones... Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna... ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquélla con la que desaparecen... Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico... Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum*...

Más adelante, en el Libro Segundo, aparece con absoluta claridad tanto el concepto de derivada como el algoritmo para derivar suma, producto, cociente de funciones, así como funciones potenciales y función de funciones:

LEMA II, SECCIÓN II, LIBRO SEGUNDO

El momento de una generada es igual a los momentos de cada lado generador multiplicados por los índices de las potencias de dichos lados y sus coeficientes continuamente.

Llamo generada a cualquier cantidad que se engendra, en aritmética por multiplicación, división y extracción de raíces de lados o términos cualesquiera... Considero aquí a dichas cantidades como indeterminadas y variables y como si creciesen y decreciesen con un movimiento o flujo continuo; y a sus incrementos o decrementos momentáneos es a lo que llamo momentos... el sentido del lema es que si los momentos de unas cantidades $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, etc., que aumentan o disminuyen en flujo continuo, o las velocidades de las mutaciones proporcionales a aquéllos se llaman $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, etc., el momento o mutación del rectángulo generado $\mathbf{AB}$ sería $\mathbf{aB}+\mathbf{bA}$, el momento del área generada $\mathbf{ABC}$ sería $\mathbf{aBC}+\mathbf{bAC}+\mathbf{cAB}$: y los de las potencias generadas $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$, $\mathbf{A}^{1/2}$, $\mathbf{A}^{3/2}$, $\mathbf{A}^{1/3}$, $\mathbf{A}^{2/3}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{-2}$ y $\mathbf{A}^{-1/2}$ serán respectivamente: $\mathbf{2aA}$, $\mathbf{3aA}^2$, $\mathbf{4aA}^3$, $(\mathbf{1/2})\mathbf{aA}^{-1/2}$, $(\mathbf{3/2})\mathbf{aA}^{1/2}$, $(\mathbf{1/3})\mathbf{aA}^{-2/3}$, $(\mathbf{2/3})\mathbf{aA}^{-1/3}$, $-\mathbf{aA}^{-2}$, $-\mathbf{2aA}^{-3}$, y $(-\mathbf{1/2})\mathbf{aA}^{-3/2}$; y, en general, que el momento de una potencia cualquiera $\mathbf{A}^{\mathbf{n/m}}$ sería $(\mathbf{n/m})\mathbf{aA}^{(\mathbf{n-m})/\mathbf{m}}$. También que el momento de la cantidad generada $\mathbf{A^2B}$ será $\mathbf{2aAB}+\mathbf{bA^2}$, que el momento de la generada $\mathbf{A^3B^4C^2}$ será $\mathbf{3aA^2B^4C^2}+\mathbf{4bA^3B^3C^2}+\mathbf{2cA^3B^4C}$, y de la generada $\mathbf{A^3/B^2}$ o de $\mathbf{A^3B^{-2}}$ será $\mathbf{3aA^2B^{-2}}-\mathbf{2bA^3B^{-3}}$, etc.

3.3. Geometría fluyente

Esta forma matemática, a mitad de camino entre geometría tradicional y cálculo, se nutre con la problemática física, aceptando que el movimiento interviene en los razonamientos y admitiendo lo infinitamente pequeño, como se observa en los siguientes ejemplos:

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XXIV, SECCIÓN VII, LIBRO PRIMERO

Supuesto que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, determinar los espacios que, en tiempos dados, recorre un cuerpo cayendo en línea recta.

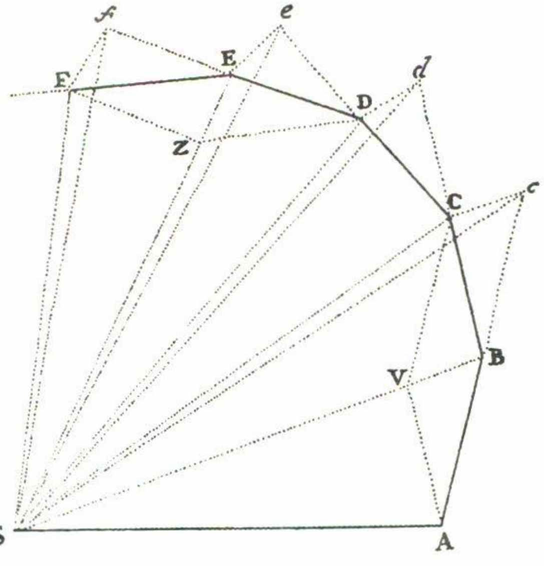
PROPOSICIÓN VI. TEOREMA V, SECCIÓN II, LIBRO PRIMERO

Si en un espacio sin resistencia un cuerpo gira en una órbita alrededor de un centro inmóvil y describe en un tiempo muy pequeño un arco naciente en ese instante e imaginamos trazada la sagita del arco que a su vez divida en dos la cuerda y, prolongada, pase por el centro de fuerzas: la fuerza centrípeta en el punto medio del arco será directamente como la sagita e inversamente como el cuadrado del tiempo.

Para ilustrar el discurso matemático newtoniano, a continuación discutiremos la demostración de la Proposición I, Teorema I de la Sección II del Libro Primero, la cual es un magnífico ejemplo del espíritu que anima a lo que hemos denominado "geometría fluyente":

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I, SECCIÓN II, LIBRO PRIMERO

Las áreas, descritas por cuerpos que giran sujetos a un centro de fuerzas inmóvil por radios unidos a dicho centro, están en el mismo plano inmóvil y son proporcionales a los tiempos.



Para la demostración Newton supone al tiempo partido en intervalos iguales y a un cuerpo que se mueve de **A** a **B** en el primer intervalo de tiempo. Si no actuase alguna fuerza sobre el cuerpo, llegaría al punto **c** (como consecuencia de la primera ley), de tal manera que las trayectorias **AB** y **Bc** fuesen iguales.

Trazando los segmentos **AS, BS** y **cS**, demuestra que las áreas de Δ**ASB** y Δ**BSc** son iguales por tener un lado común (**SB**) y **AB** = **Bc** con **AB** $\|$ **Bc**.

Si cuando el cuerpo llega a **B** actúa sobre él una fuerza centrípeta instantánea dirigida hacia **S**, su trayectoria se modificará, digamos en la dirección **Bd**.

Trazando una paralela a **BS** a través de **c**, sobre la línea **Bd** encuentra el punto **C** y al completarse el segundo intervalo de tiempo (por el Corolario 1 de las Leyes,[7]) el cuerpo se encontrará en **C** (ver paralelogramo **VBcC**), en el mismo plano que el Δ**ASB**.

Trazando el segmento **SC** y comparando el Δ**BSC** y el Δ**BSc**, demuestra que sus áreas son iguales, ya que **SB** es paralelo a **Cc** (por construcción) y, por lo tanto, el área del Δ**BSC** es igual a la del Δ**ASB**.

Con argumentos similares, si una fuerza centrípeta actúa sucesivamente en **C**, **D**, **E**, etc, haciendo que el cuerpo en cada intervalo de tiempo describa las trayectorias **CD**, **DE**, **EF**, etc, se demuestra que todas esas trayectorias están en el mismo plano y que los

[7] COROLARIO PRIMERO: Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que los dos lados bajo las dos acciones por separado.

ΔCSD, **ΔDSE**, **ΔESF**, etc, tendrán áreas iguales. Por lo tanto, "... en tiempos iguales se describen áreas iguales en un plano inmóvil".

Hasta ahora Newton ha utilizado para la demostración: 1) Primera y segunda ley (Corolario Primero), 2) el tiempo, considerado en intervalos iguales y 3) geometría tradicional.

A partir de este punto de la demostración, Newton introduce un concepto de límite al "... Aumentar el número de triángulos y disminuir su altura *ad infinitum*", haciendo tender el intervalo de tiempo a cero para concluir que el perímetro **ABCDE**... es una línea curva en la que la fuerza centrípeta, por la que un cuerpo es continuamente separado de la tangente de dicha curva, actúa de manera continua y que las áreas barridas son siempre proporcionales a los tiempos en que estas áreas son descritas.

Si para la demostración anterior Newton hubiera utilizado el Cálculo, ésta podría haber sido como sigue:

Tomando en cuenta que la fuerza es central (y puesto que para la demostración de que el cuerpo se mueve en un plano no es necesario el cálculo) podemos elegir el sistema de referencia tal que el plano xy contenga a la fuerza y a la velocidad. En este sistema

$$\vec{F} = |F|(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{1}$$

y el vector de posición en coordenadas cartesianas será.

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}. \tag{2}$$

Ahora bien, cuando la partícula se mueve de **A** a **B** el arco que recorre el radio vector **AS** = **r** barre el área del triángulo **ASB**, que es igual a

$$\Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta, \tag{3}$$

en donde $\Delta\theta$ es el ángulo **ASB**. Dividiendo entre Δt y tomando la razón última de las cantidades evanescentes (Escolio, Sección I, Libro Primero), el área barrida por unidad de tiempo será

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}. \tag{4}$$

Por otro lado, derivando dos veces el vector de posición con respecto al tiempo, la expresión que se obtiene para la aceleración es

$$\vec{a} = (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)(\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\jmath}\cos\theta), \tag{5}$$

y, por la segunda ley,

$$\vec{F} = |F|(\hat{\imath}\cos\theta+\hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta) = m\Big[(\ddot{r}+r\dot{\theta}^2)(\hat{\imath}\cos\theta+\hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta)+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})(-\hat{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta+\hat{\jmath}\cos\theta)\Big]. \tag{6}$$

Esta igualdad implica que el segundo término del miembro derecho debe ser cero; es decir,

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \tag{7}$$

Multiplicando por r y utilizando el Lema II, Sección II, Libro II, se obtiene

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \tag{8}$$

y por tanto,

$$r^2\dot{\theta} = \text{cte}. \tag{9}$$

Comparando esta última expresión con la Ec. (4), se sigue que el radio vector barre áreas iguales en iguales intervalos de tiempo, que es lo que se quería demostrar. Desde luego, en lenguaje moderno este resultado sería una constante de movimiento (multiplicado por la masa nos da la conservación de la magnitud del momento angular), pero Newton nunca habla de ellas en su discurso.

4. La filosofia natural

Los principios matemáticos demostrados en los Libros Primero y Segundo, le permiten a Newton: "...investigar las magnitudes de las fuerzas y las razones que se siguen en cualesquiera condiciones supuestas...",[8] para después, al descender a la Filosofía Natural en el Libro Tercero, "... comparar estas razones con los fenómenos, para que aparezca cuáles condiciones de esas fuerzas corresponden a cada clase de cuerpos atractivos".[9]

En este sentido, utilizando el resultado previamente analizado (Proposición I. Teorema I, Sección II, Libro Primero) que aunado al Corolario I[10] y a la Proposición XI,[11] que son de carácter general, al llevarlas al "Sistema del Mundo", le permite a Newton demostrar la primera y segunda leyes de Kepler, como se muestra en la siguiente Proposición:

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA XIII, LIBRO TERCERO

> Los planetas se mueven en elipses que tienen un foco en el centro del Sol, y con radios trazados a dicho centro describen áreas proporcionales a los tiempos.
>
> Ya hemos considerado estos movimientos más arriba partiendo de los fenómenos. Ahora que se conocen los principios del movimiento, de ellos deducimos "a priori" los movimientos celestes. Puesto que los pesos de los planetas hacia el Sol son inversamente como los cuadrados de las distancias al centro del Sol, si el Sol reposase y los demás planetas no actuasen mutuamente entre ellos, sus órbitas serían elípticas, teniendo al Sol en el foco común, y describirían áreas proporcionales a los tiempos (por las Proposiciones

---

[8] I. Newton, *op. cit. p. 360.*

[9] I. Newton, *op. cit.* p. 360

[10] COROLARIO I. PROPOSICIÓN XIII, SECCIÓN III, LIBRO PRIMERO: Se sigue de las tres últimas proposiciones que si un cierto cuerpo **P** parte del punto **P** con una velocidad cualquiera según la dirección de cierta línea recta **PR** y bajo la acción simultánea de una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, dicho cuerpo se moverá en alguna de las secciones cónicas que tenga su foco en el centro de fuerzas y viceversa...

[11] PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA VI, SECCIÓN III, LIBRO PRIMERO: Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la elipse.

I y XI y el Corolario I de la Proposición XIII del Libro Primero), pero las acciones de los planetas entre ellos son mínimas (de suerte que pueden despreciarse) y perturban menos los movimientos en elipses de los planetas en torno al Sol (por la Proposición LXVI del Libro Primero) que si tales movimientos se realizasen en torno a un Sol en reposo...

En el ejemplo anterior, llama la atención el método de demostración utilizado por Newton a lo largo de todo el Libro Tercero, en el cual ya no es necesaria la herramienta matemática, dejando a la lógica el papel de, en el "Sistema del Mundo", engarzar las demostraciones matemáticas generales realizadas en los dos primeros libros.

5. Conclusiones

Los *Principia* de Newton son considerados, por sus conceptualizaciones, como un libro fundamental en la historia de la física, pero además, representa un auténtico parteaguas metodológico en la historia de la ciencia. El estilo absolutamente riguroso que va de lo general y abstracto del mundo matemático a lo particular y concreto del mundo físico, le permite a Newton construir un edificio conceptual en el que de tajo elimina planteamientos en boga (como los vórtices cartesianos), demostrando la certidumbre de otros (como las leyes de Kepler), integrados en una nueva cosmovisión.

En esta tarea, la matemática juega un papel primordial, no sólo como herramienta de cálculo, sino como un nuevo lenguaje, absolutamente imbricado con el desarrollo mismo de los nuevos conceptos.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer la valiosa colaboración de C. Munive en la elaboración de este trabajo.

Referencias

1. I. Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Alianza Editorial, Madrid (1987).
2. I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, trad. de A. Motte (1729), revisada por F. Cajori, University of California Press, USA (1934).
3. F. De Gandt, *Mathesis* **VI** (1990) 163.
4. I.B. Cohen, *Introduction to Newton's "Principia"*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1978).
5. R.S. Westfall, *Never at Rest*, Cambridge University Press, USA (1986).