

# Argumento de Popper con dependencia temporal

MAURICIO BELLINI\*

*Departamento de Física, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Mar del Plata  
Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina*

Recibido el 17 de mayo de 1996; aceptado el 9 de diciembre de 1996

RESUMEN. Se estudia la no separabilidad en el argumento de Popper teniendo en cuenta su evolución temporal. Se muestra que la correlación entre las posiciones de un par de partículas correlacionadas disminuye, conforme éstas se alejan.

ABSTRACT. It's studied the no-separability in the Popper's argument taking into account its temporal evolution. It shows that the correlation between the positions of a pair of particles decreases whenever they are separated.

PACS: 03.65.Bz

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1934 Karl Popper propuso un argumento [1] con el que intentaba mostrar que el principio de incerteza de Heisenberg, o más en general, el formalismo de la mecánica cuántica, implican la no separabilidad de ciertos sistemas cuánticos correlacionados. Su formalización muestra que (una vez corregido un error menor) contiene los mismos ingredientes esenciales que el sistema físico propuesto por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) en su trabajo [2], esto es, la no separabilidad de ciertos sistemas cuánticos correlacionados. En un trabajo anterior [3] se formalizó el argumento de Popper para un sistema sin que se tuviera en cuenta su dependencia temporal, y se mostró la factibilidad de medir correlaciones entre posiciones de un par de partículas, y no de orientaciones de espín [4-10]. En este trabajo se estudia el mismo argumento con la inclusión de tal dependencia.

La versión original del argumento dice así: considérese un sistema  $S$  (puede ser positronio) desde el cual se emiten, en sentidos opuestos, pares de partículas que han interactuado (es decir, correlacionadas). Considérense a estas partículas moviéndose hacia dos ranuras  $A$  y  $B$ . Éstas, tendrán un ancho ajustable  $\Delta R_A$  y  $\Delta R_B$ , respectivamente. Más allá de las ranuras, a los lados, hay contadores colocados en semicírculo (véase la Fig. 1).

En lo que sigue se supondrá que las intensidades de los haces son muy bajas, de modo que el tiempo medio entre emisiones sucesivas de pares de partículas sea mucho mayor que el tiempo transcurrido desde la emisión del par hasta ser detectadas por los contadores. Estos contadores son de coincidencia, lo cual significa que sólo cuentan partículas que han

---

\*Electronic mail: mbellini@mdp.edu.ar

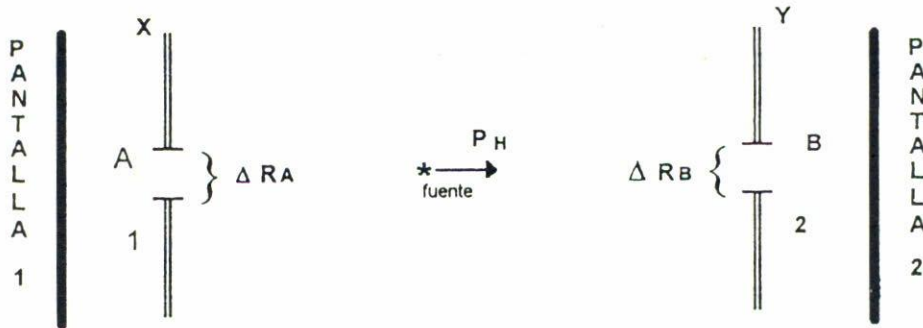


FIGURA 1. Representación del argumento de Popper (los detectores han sido reemplazados por una pantalla para cada rendija).

pasado por  $A$  y  $B$  al mismo tiempo. De este modo es casi seguro que sólo se detectarán las partículas que han interactuado.

En la medida en que las rendijas  $A$  y  $B$  se hagan más angostas, las incertezas en la posición de ambas partículas sobre las rendijas ( $\Delta X$  y  $\Delta Y$ ) disminuirán, debiendo aumentar las incertezas de los momentos lineales ( $\Delta P_x$  y  $\Delta P_y$ ), para que se cumpla el principio de incerteza de Heisenberg.

Se supondrá que se hace muy angosta la ranura  $A$  y muy ancha la ranura  $B$ ; es decir que  $\Delta R_A \ll \Delta R_B$  (recordar que  $\Delta R_A$  es el ancho de la rendija  $A$  y  $\Delta R_B$  el de la rendija  $B$ ). Las incertezas en las posiciones estarán asociadas a las incertezas de las cantidades de movimiento  $\Delta P_x$  y  $\Delta P_y$  para las partículas que pasan por las rendijas  $A$  y  $B$ . Debido al principio de incerteza de Heisenberg debe cumplirse que

$$\Delta R_A \Delta P_x \geq \hbar \quad \text{y} \quad \Delta R_B \Delta P_y \geq \hbar. \quad (1)$$

Según Popper, al medir la posición de la partícula que pasa por  $A$  con precisión  $\Delta R_A$ , debido a que la posición del centro de masa del sistema en la dirección vertical dada por  $R_v = \frac{1}{2}(X + Y)$  ya se conoce ( $X$  es la posición de la partícula que pasa por  $A$  e  $Y$  la de la que pasa por  $B$ ), existe una propagación de error sobre la posición de la partícula que pasa por  $B$ , y el desconocimiento de ésta ( $\Delta Y$ ) será el mismo que el de la posición de la partícula que pasa por  $A$  ( $\Delta R_A$ ), esto es,  $\Delta R_A = \Delta Y$ . Esto debería suceder a pesar de que la rendija  $B$  es mucho más ancha que la rendija  $A$  ( $\Delta R_A \ll \Delta R_B$ ). Si lo anterior fuera cierto, el producto de las incertezas de posición y momento de la partícula que pasa por  $B$  estaría dado por

$$\Delta Y \Delta P_y = \Delta R_A \Delta P_y \ll \Delta R_B \Delta P_y \approx \hbar, \quad (2)$$

lo cual violaría el principio de incerteza dado por Heisenberg.

Según Popper [1], para que esto no suceda, debe aumentar la dispersión (incerteza) del momento de la partícula que pasa por  $B$  ( $\Delta P_y$ ), lo que sería observable experimentalmente. Este hecho implicaría una acción a distancia que estaría contradiciendo el principio de localidad dado por Einstein [1] en el año 1948.

1.1. PRINCIPIO DE SEPARABILIDAD Y FUNCIÓN DE COVARIANCIA CUÁNTICA

A continuación se presentará una forma simple y clara del principio de separabilidad que facilita el formalismo sin perder generalidad [3].

Considérese un sistema físico  $S$  (cuántico o clásico) descrito en forma completa por un estado  $\psi$  ( $\in \mathcal{H}$  si es un sistema cuántico,  $y \in \Phi \equiv$  espacio de fase, si es un sistema clásico), tal que  $S = S_1 + S_2$  se descompone en dos subsistemas  $S_1$  y  $S_2$ , que se separan una distancia mayor que sus propias extensiones. Ambos subsistemas pueden haber interactuado, lo que significa que sus estados pueden estar correlacionados. Sea  $A$  un observable de  $S_1$  con posibles autovalores  $a_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), y  $B$  uno de  $S_2$  con posibles autovalores  $b_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Definimos  $(A = a_k|\psi) \equiv (a_k|\psi)$  a la probabilidad de medir  $a_k$  en  $S_1$  y, similarmente,  $(b_n|\psi)$  a la probabilidad de medir  $b_n$  en  $S_2$ . Si además  $(A = a_k|B = b_n) \equiv (a_k|\psi, b_n)$  es la probabilidad condicional de medir  $a_k$  en  $S_1$ , habiendo medido  $b_n$  en  $S_2$ , entonces se dice que el sistema  $S$  (descrito por un estado  $\psi$ ) es separable, si la distancia  $D(S_1, S_2)$  entre los dos subsistemas puede hacerse tan grande como para que se cumpla

$$(a_k|\psi) = (a_k|\psi, b_n), \tag{3}$$

para  $A$  y  $B$  observables de  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente.

Para estudiar la separabilidad de un sistema se utilizará la función de covariancia cuántica (FCC). Considérense los operadores  $\tilde{A} = \tilde{A} \otimes \mathbf{1}$ ,  $\tilde{B} = \mathbf{1} \otimes \tilde{B}$  y  $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}$ . La FCC evaluada entre ellos  $T(\tilde{A}, \tilde{B}|\psi)$ , para un estado

$$\psi = \sum_{i,j} C_{ij}(\varphi_i \otimes \phi_j), \tag{4}$$

será

$$T(\tilde{A}, \tilde{B}|\psi) = \langle \tilde{A}\tilde{B} \rangle - \langle \tilde{A} \rangle \langle \tilde{B} \rangle. \tag{5}$$

En este trabajo requeriremos que la FCC sea nula [3] para que la función de estado del sistema describa un sistema cuántico separable. En particular, todo sistema cuántico caracterizado por una función de estado  $\psi$  factorizable es separable, pero no todo sistema separable implica que el estado que lo describe deba ser factorizable.

2. FORMALIZACIÓN DEL ARGUMENTO DE POPPER CON DEPENDENCIA TEMPORAL

Sea  $\Psi$  la función de estado que caracteriza al sistema  $S = S_1 + S_2$  y que pertenece al espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Sean  $X(t_i) \otimes \mathbf{1}$  la posición de la partícula 1 en la dirección vertical en el instante  $t_i$ , y  $\mathbf{1} \otimes Y(t_i)$  la posición de la partícula 2 en la dirección vertical en el instante  $t_i$ , que actúan sobre  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente.  $R_v(t_i) = \frac{1}{2}[X(t_i) + Y(t_i)]$ , es la posición del centro de masa del sistema en la dirección vertical en el instante  $t_i$ . El momento total del sistema en la dirección vertical está dado por  $P_v = P_x + P_y$ , donde  $P_x$  es el momento de la partícula 1 en la dirección vertical y  $P_y$  el de la partícula 2. Las

posiciones  $X(t_i)$  e  $Y(t_i)$  están dadas por las relaciones

$$X(t_i) = X(0) + \frac{P_x}{m} t_i, \quad (6)$$

$$Y(t_i) = Y(0) + \frac{P_y}{m} t_i, \quad (7)$$

donde  $m$  es la masa de cada una de las partículas.

Se considera la siguiente preparación del sistema:

$$R_v(0) = \frac{1}{2} [X(0) + Y(0)] = 0, \quad (8)$$

$$\langle P_v \rangle = \langle P_x \rangle + \langle P_y \rangle = P_{ox} - P_{oy} = 0, \quad (9)$$

$$P_H = 0. \quad (10)$$

La función de estado del sistema en la representación posición estará dada por

$$\Psi = N \int dx dy \Psi(x, y) (\varphi_x \otimes \phi_y), \quad (11)$$

donde los  $\Psi(x, y)$  son los coeficientes de Fourier y  $\{\varphi_x\}$ ,  $\{\phi_y\}$  son las autofunciones de  $X(t_i)$  e  $Y(t_i)$  que actúan sobre los espacios  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente. Teniendo en cuenta la preparación (8), (9) y (10), se pueden calcular los coeficientes de Fourier

$$\Psi(x, y) = \exp[-\alpha x^2 + (i/\hbar)P_{0x} \cdot x] \exp[-\beta y^2 - (i/\hbar)P_{0y} \cdot y] \delta(x + y), \quad (12)$$

con lo que la función de estado del sistema será

$$\Psi = N \int dx dy \exp[-\alpha x^2 + (i/\hbar)P_{0x} \cdot x] \exp[-\beta y^2 - (i/\hbar)P_{0y} \cdot y] (\varphi_x \otimes \phi_y). \quad (13)$$

Aquí  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas con los anchos de las rendijas  $A$  y  $B$ , de tal manera que  $\Delta R_A = 2/\sqrt{\alpha}$  y  $\Delta R_B = 2/\sqrt{\beta}$ . Si la función de estado del sistema está normalizada a la unidad,

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = 1, \quad (14)$$

se puede calcular la constante de normalización  $N$  y se obtiene

$$N = \left[ \frac{2(\alpha + \beta)}{\pi} \right]^{1/4}. \quad (15)$$

Las incertezas en las posiciones en la dirección vertical de las partículas 1 y 2 en el instante  $t_i = 0$  estarán dadas por

$$[\Delta X(0)]^2 = [\Delta Y(0)]^2 = \frac{1}{4(\alpha + \beta)}. \quad (16)$$

Este resultado muestra que la afirmación de Popper, de que las incertezas de ambas partículas sobre las rendijas está dada por el ancho de la rendija más pequeña, no es

exacta. Si bien es cierto que las incertezas en las posiciones de ambas partículas son iguales (y que  $\alpha > \beta$  cuando la rendija  $B$  es mucho más ancha que la  $A$ ), no están estrictamente dadas por el ancho de la rendija más angosta (rendija  $A$ ). La FCC calculada sobre los operadores  $X(t_i)$  e  $Y(t_i)$  es

$$T(X(t_i), Y(t_i)) = -\frac{1}{4(\alpha + \beta)} - \frac{t_i^2}{2m^2} (\alpha + \beta) \hbar^2. \quad (17)$$

Esto es, la FCC calculada entre posiciones de ambas partículas tiene una dependencia cuadrática con el tiempo. Obsérvese que para partículas inicialmente muy poco localizadas, (esto es, para  $\alpha$  y  $\beta$  muy pequeños) el valor del módulo de la FCC es muy grande y permanece prácticamente constante. En cambio, cuando las partículas están muy localizadas (para  $\alpha$  y  $\beta$  muy grandes), domina el segundo término en la Ec. (17), y la dependencia temporal en la FCC se hace muy importante. Además, dado que  $\langle X(t) \rangle = \langle Y(t) \rangle = 0$ , la FCC coincide con la correlación entre las posiciones  $X$  e  $Y$  evaluadas en el mismo instante  $t$ , esto es,

$$T(X(t_i), Y(t_i)) = \langle X(t_i) Y(t_i) \rangle. \quad (18)$$

### 3. CONCLUSIONES

En un artículo anterior se mostró que una formalización del argumento de Popper tiene la virtud de brindar una versión contrastable experimentalmente del argumento de EPR donde se puede verificar que hay correlación entre las incertezas en las posiciones en ambas rendijas. Si se reformula este argumento y se tiene en cuenta la evolución temporal del sistema, se observa que la FCC calculada entre posiciones de un par de partículas disminuye cuadráticamente con el tiempo, esto es, conforme éstas se alejan entre sí. Pero, además, cuando las partículas se alejan, la correlación entre posiciones evaluadas en el mismo instante [que en este caso coincide con la FCC  $T(X(t_i), Y(t_i))$ ], disminuye mucho más significativamente, en la medida en que la localización inicial de las partículas es mayor.

### REFERENCIAS

1. K.R. Popper, *Teoría cuántica y sisma en física*, (Tecnos, Madrid, 1985).
2. A. Einstein, B. Podolsky, and R. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
3. Mauricio Bellini, *Rev. Mex. Fís.* **42** (1996) 376.
4. S.J. Freedman and J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 938.
5. R.A. Holt and F.M. Pipkin, Harvard University, Preprint (1973).
6. J.F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 465.
7. E.S. Fry and R.C. Thomson, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 465.
8. A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
9. F.M. Pipkin, *Progr. in Atomic and Mol. Phys.* **14** (1978) 281.
10. J.F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Progr. Phys.* **41** (1978) 1881.