

Creación y aniquilación de solitones en la ecuación no-lineal de la cuerda

M.A. AGÜERO GRANADOS*

*Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias, Instituto Literario 100
50000 Toluca, México.*

A.A. ESPINOSA GARRIDO†

*Universidad Autónoma de Zacatecas
Escuela de Física Calle Jaime Antonio Dovalí s/n
98000 Zacatecas, Zac., México*

J. MARTINEZ ORTIZ‡

*Universidad Autónoma de Zacatecas
Centro de Estudios Multidisciplinarios, Apartado 597-C
98068 Zacatecas, Zac., México*

Recibido el 23 de noviembre de 1995; aceptado el 3 de octubre de 1996

RESUMEN. Se deriva de la ecuación cúbica-quinta de Schrödinger a la ecuación no lineal de la cuerda. Este sistema soporta solitones regulares y singulares. Se muestra que mediante interacciones de solitones regulares es posible la generación de solitones singulares y viceversa.

ABSTRACT. Starting from the cubic-quintic Schrödinger equation it is obtained the nonlinear string equation. This system supports regular and singular solitons. It is shown that two singular solitons could be generated after the interaction of two regular solitons and vice versa.

PACS: 11.27.+d; 11.30.Na

1. INTRODUCCIÓN

La búsqueda de solitones en sistemas no lineales ha sido y es un campo muy activo de investigación teórica y experimental en los últimos tiempos. El término solitón se usa aquí en un sentido físico amplio, asumiendo que es cualquier solución clásica de ecuaciones no lineales, concentrado en una región del espacio en todo el tiempo y que tiene energía finita [1].

Existen diversos modelos que estudian solitones. En este trabajo nosotros analizamos la versión no relativista del modelo φ^6 de la teoría no lineal de campos. A la ecuación no lineal que describe el modelo φ^6 no relativista, se le conoce también como ecuación

*Electronic mail: mag@coatepec.uaemex.mx

†Electronic mail: agarrido@cantera.reduaz.mx

‡Electronic mail: jmoo@cantera.reduaz.mx

no lineal cúbica-quinta ($\varphi^3 - \varphi^5$) de Schrödinger (ECQS) que en 1 + 1 dimensiones del espacio-tiempo tiene la forma

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - \left[3|\varphi|^2 - (2A + \rho_0)\right] \left(|\varphi|^2 - \rho_0\right) \varphi = 0. \quad (1)$$

Esta versión unidimensional permite encontrar analíticamente las soluciones solitónicas en forma explícita y los parámetros A y ρ_0 están determinados por las propiedades del sistema físico en estudio.

La ECQS aparece en varias áreas de la física, en donde las ecuaciones diferenciales correspondientes describen la propagación de ondas no lineales en medios dispersivos. Tal es el caso de la teoría del ferromagnetismo [2], de la hidrodinámica nuclear con la fuerza de Skyrme [3], de la física del plasma [4] y de las partículas elementales [5]. Además, este modelo se extiende hasta la fenomenología de las transiciones de fase [6, 7] mediante métodos de estados coherentes [8], óptica no lineal [9] y estudio de sistemas biológicos [10]. En el trabajo [11] fue realizado el análisis desde el punto de vista de grupos de simetría. La variante relativista de la ECQS se obtiene haciendo el reemplazo formal de $i\varphi_t$ por φ_{tt} .

Aquí nosotros estudiaremos las soluciones 1- y 2-solitónicas (regulares y singulares) de la ecuación no lineal de la cuerda tipo Boussinesq obtenida a partir de (1).

Cabe mencionar, que es bien conocida la existencia de teoremas sobre soluciones reales que colapsan después de un cierto tiempo en problemas de Cauchy para ecuaciones tipo Boussinesq [12, 13] y además, la existencia de soluciones singulares definidos en todo el espacio no son raras excepciones (por ejemplo, véanse Refs. 14 y 15). Las soluciones singulares poseen propiedades importantes. Suficiente con mencionar las soluciones singulares en la teoría de gravitación de Einstein (las soluciones tipo huecos negros o de Schwarzschild) y todos aquellos que tienen singularidades cósmicas. En este trabajo analizamos casos concretos de comportamientos de solitones singulares y regulares.

En la siguiente sección obtenemos la ecuación no lineal de la cuerda o ecuación especial de Boussinesq (10). La Sec. 3 esta dedicada a las perturbaciones en el vacío estable de la ENC. Las soluciones exactas 1- y 2-solitónica se estudian en la Sec. 4. En la Sec. 5 se analiza el comportamiento concreto de dos solitones singulares o regulares inicialmente separados uno de otro en la ecuación no lineal de la cuerda. Por último, en la Sec. 6 se dan las conclusiones.

2. ECUACIÓN NO LINEAL DE LA CUERDA

El hamiltoniano que da origen a la Ec. (1) se escribe como

$$E = \int \left(|\varphi_x|^2\right) dx + \int \left(|\varphi|^2 - \rho_0\right)^2 \left(|\varphi|^2 - A\right) dx = T + V. \quad (2)$$

Se puede demostrar que bajo ciertas transformaciones de escala, la solución de la ecuación $\psi^3 - \psi^5$ (QNSE), depende sólo de la relación paramétrica A/ρ_0 . Por lo cual, sin pérdida de generalidad, podemos hacer $\rho_0 = 1$. En diversos trabajos [2, 10, 16] se estudio la Ec. (1) para distintos valores del parámetro relevante A y para diferentes dimensiones.

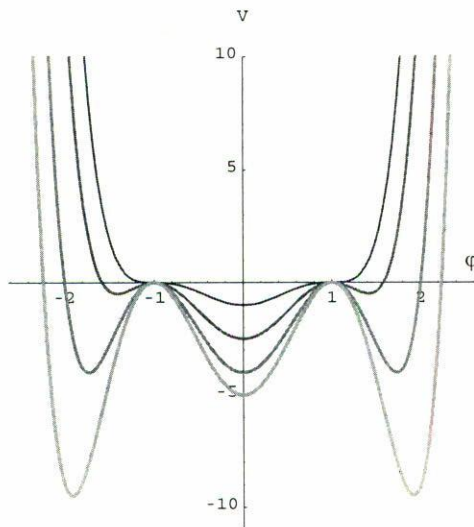


FIGURA 1. El potencial $U(\varphi)$ para varios valores del parámetro A . Los mínimos de este potencial están ubicados en los puntos $\varphi = 0$ y $\varphi = \pm\sqrt{\beta}$.

Cuando $A > 1$, es fácil comprobar que la densidad del potencial V en el hamiltoniano (2) se hace mínimo cuando el campo toma el valor de $|\varphi|^2 = \beta = \frac{1}{3}(2A + 1)$. La representación gráfica de la densidad potencial U está dada en la Fig. 1. La forma de este potencial para cierto valor de A en cosmología es similar al potencial del campo que gobierna el proceso inflacionario [17].

Analicemos el límite cuando $A \rightarrow \beta$, para $A > 1$ y transformamos al campo φ en las inmediaciones del mínimo $\varphi = \sqrt{\beta}$, de la siguiente manera:

$$\varphi(x, t) = \beta^{1/2} - \gamma(x, t), \tag{3}$$

donde asumimos que γ es una perturbación al vacío y su magnitud es del mismo orden que $\beta - A$. Reemplazamos la ecuación anterior en la Ec. (1). Considerando componentes hasta términos cuadráticos, la Ec. (1) se transforma en

$$i\gamma_t + \gamma_{xx} - 3b\beta(\gamma + \gamma^*) + 3\beta^{3/2}(\gamma + \gamma^*)^2 = 0,$$

donde $b = \frac{2}{3}(A - 1)$. Haciendo $\eta = (\gamma + \gamma^*)$, $\xi = i(\gamma - \gamma^*)$ y sustituyéndolos en la ecuación precedente finalmente se observa

$$\eta_{tt} - 6b\beta\eta_{xx} + 6\beta^{3/2}(\eta^2)_{xx} + \eta_{xxxx} = 0. \tag{4}$$

Hemos conseguido así la ecuación especial de Boussinesq. Una ecuación similar [2] se obtiene cuando $A < 1$, en donde los mínimos degenerados absolutos se define por $|\varphi|^2 = 1$. Es fácil comprobar que la región paramétrica $A < 1$ es matemáticamente simétrica a la región que nosotros investigamos.

3. PERTURBACIONES LINEALES

Como es fácil de percatarse, la solución trivial o vacío $u = 0$, satisface a la Ec. (4) si tomamos la perturbación al vacío u como $\delta u = \xi(x, t) = e^{i(kx + w\tau)}$ y la reemplazamos en (4), en el límite lineal obtenemos la dispersión de Bogoliubov:

$$\omega^2 = k^2 \left[k^2 + \frac{4}{3} (A - 1) (2A + 1) \right] > 0. \quad (5)$$

Esta relación indica que el espectro ω^2 no tiene valores negativos para todo $k \in (-\infty, +\infty)$. Por lo tanto, para cualquier t tenemos una oscilación que no perjudica al vacío u . La Ec. (5) se puede tomar como el equivalente (en el espacio del mapeo de Fourier) de la ecuación operacional que actuando sobre $u(x, t)$ nos produce la Ec. (4), pero ahora sin el término no lineal. La velocidad del sonido en el condensado estable se obtiene fácilmente de la Ec. (5) mediante

$$v_s^2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{k^2}.$$

Por ejemplo, la relación entre la velocidad V de la solución 1-solitónica, y del sonido está dada por la formula $V^2 = v_s^2 - 4Q^2\beta^{3/2}$. El solitón es entonces subsónico.

En el caso de la ecuación estándar de Boussinesq (SB),

$$u_{\tau\tau} - u_{\chi\chi} - 6(u^2)_{\chi\chi} - u_{\chi\chi\chi} = 0, \quad (6)$$

la relación dispersiva es

$$\omega^2 = k^2 (k^2 - 1). \quad (7)$$

Pero como la ecuación SB describe oscilaciones con longitudes de onda larga, (por ejemplo, ondas superficiales del agua bajo gravedad, ondas iónicas acústicas, etc.), entonces $k \ll 1$, lo cual implica que el vacío colapsa al sentir el efecto de una perturbación tipo $\xi \sim e^{-i\omega t}$ [18].

4. SOLUCIONES EXACTAS

4.1. ALGUNAS PROPIEDADES

Veamos la velocidad de un impulso solitónico. El comportamiento del impulso está gobernado por la Ec. (4). Transformamos esta ecuación en un sistema de dos ecuaciones. Para ello introducimos una nueva función $u(x, t)$ que satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (6b\beta\eta - 6\beta^{3/2}\eta^2 - \eta_{xx}). \end{aligned}$$

Aplicando el método del trabajo [19] se obtiene para la velocidad del pulso la siguiente fórmula:

$$v^2 = \left(\frac{\Omega}{P} \right)^2 = 6\beta \left(\frac{\int b\eta dx - \int \beta^{1/2}\eta^2 dx}{\int \eta dx} \right). \quad (8)$$

De esta ecuación es fácil deducir que la velocidad del pulso está acotada y satisface la relación

$$0 \leq v^2 \leq 6\beta b. \tag{9}$$

La "masa" de cualquier solución solitónica u empleando la fórmula (11) se puede obtener en forma general para singulares y regulares de la fórmula

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \left[\frac{f_x}{f} \right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Así como también el centro de masa se calculará por

$$x_{CM} = \int_{-\infty}^{\infty} xu(x, t) dx = \frac{1}{M} \left[-2x \frac{f_x}{f} + \ln f^2 \right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Donde f satisface la Ec. (12). Para el caso de 1-solución solitónica, tenemos que $M = |p|$ y para dos soluciones solitónicas: $M = |p_1| + |p_2|$.

Si se tienen sólo ondas que están desplazándose en una sola dirección, con longitudes de onda larga en el límite no lineal y dispersivo débiles, partiendo de la Ec. (10) mediante la transformación

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 \rightarrow (\omega - k)(\omega + k)$$

uno obtiene la ecuación de Korteweg y de Vries (KdV):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

En las Refs. 21 y 22 se estudian las soluciones singulares de esta ecuación.

4.2. SOLUCIÓN 1-SOLITÓNICA

Realizamos los siguientes cambios de variables en la Ec. (4): $\tau = 6b\beta t$; $\chi = \sqrt{6b\beta} x$; $\eta = 6b\beta^{-1/2} u$. Entonces, la ecuación la ENC adopta la forma adimensional

$$u_{\tau\tau} - u_{\chi\chi} + 6(u^2)_{\chi\chi} + u_{\chi\chi\chi} = 0. \tag{10}$$

Buscamos la solución de la ecuación anterior utilizando el método de Hirota [23], en la siguiente siguiente:

$$u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(\chi, \tau), \tag{11}$$

donde la función $f(\chi, \tau)$ satisface la ecuación

$$-(f_\tau)^2 + ff_{\tau\tau} + (f_\chi)^2 - ff_{\chi\chi} + 3(f_{\chi\chi})^2 - 4f_\chi f_{\chi\chi\chi} + ff_{\chi\chi\chi} = 0. \tag{12}$$

Para la solución 1-solitónica consideramos que

$$f = 1 + \alpha e^{\theta(\chi, \tau)}, \tag{13}$$

donde

$$\theta(\chi, \tau) = p\chi + \omega\tau y\alpha = \text{cte.}$$

Si $\alpha > 0$ entonces obtenemos el solitón regular

$$u = \frac{p^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} (\chi + \varepsilon v\tau) + \ln \alpha \right]. \tag{14}$$

Ahora, si $\alpha < 0$, aparece el antisolitón o solitón singular

$$u = -\frac{p^2}{4} \operatorname{cosech}^2 \left[\frac{p}{2} (\chi + \varepsilon v\tau) + \ln |\alpha| \right],$$

donde $\varepsilon = \pm 1$, $v^2 = 1 - p^2$. Las magnitudes α , χ y τ pueden ser reescaladas para producir coeficientes deseados en los términos de la ecuación especial de Boussinesq (4).

4.3. SOLUCIÓN 2-SOLITÓNICA

Para la solución 2-solitónica, la función $f(\chi, \tau)$ de la Ec. (12) tendrá la forma [20]

$$f(\chi, \tau) = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \lambda\varphi_1\varphi_2,$$

donde

$$\varphi_i = e^{z_i}, \tag{15}$$

$$z_i = p_i\chi + \varepsilon_i\omega_i\tau + \bar{z}_i, \quad i = 1, 2;$$

p_i , ω_i , \bar{z}_i son parámetros constantes y $\varepsilon_i = \pm 1$. Transformamos a las variables z_i de la siguiente manera:

$$z_i = p_i (\chi + \alpha_i + \varepsilon_i\nu_i\tau),$$

donde $\nu_i = \omega_i/p_i$ son las velocidades de los paquetes de ondas, $\alpha_i = \bar{z}_i/p_i$, y $p_i \neq 0$. Sustituyendo estas últimas expresiones en la Ec. (10) para soluciones analíticas al sistema, se obtiene para el parámetro λ la relación

$$\lambda = \frac{(\varepsilon_1\nu_1 - \varepsilon_2\nu_2)^2 - 3(q_1 - q_2)^2}{(\varepsilon_1\nu_1 - \varepsilon_2\nu_2)^2 - 3(q_1 + q_2)^2}. \tag{16}$$

Las relaciones entre las velocidades ν_i y los parámetros p_i deberán ser

$$\nu_i^2 = 1 - p_i^2.$$

Esta última relación pone una restricción fuerte en el comportamiento de los solitones regulares. Por este motivo y porque las amplitudes dependen de las velocidades, el solitón de menor amplitud se moverá más rápidamente que el de mayor amplitud. Esta propiedad es muy diferente a lo que sucede con los solitones comunes de KdV y otros sistemas no lineales, en donde el comportamiento es inverso. La solución 2-solitónica posee la siguiente forma:

$$u = \frac{\left\{ 4q_1^2 \operatorname{sech}^2(z_1/2) + 4q_2^2 \operatorname{sech}^2(z_2/2) + (\alpha - 1) \operatorname{sech}^2(z_1/2) \operatorname{sech}^2(z_2/2) [G(\chi, \tau)] \right\}}{\left\{ 4 + (\alpha - 1) [1 + \tanh(z_1/2)] [1 + \tanh(z_2/2)] \right\}^2}, \tag{17}$$

donde

$$G(\chi, \tau) = \left[2p_1 p_2 + p_2^2 (1 + e^{z_1}) + p_1^2 (1 + e^{z_2}) \right].$$

Para investigar la colisión de dos solitones asintóticos descritos por la fórmula anterior, es conveniente colocar el sistema de referencia en uno de ellos. Definamos una nueva variable $\xi = x - \varepsilon_i \nu_i t$. Entonces tenemos para las funciones φ_k de (15)

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \exp \{ p_j [\xi + t (\varepsilon_i \nu_i + \varepsilon_j \nu_j)] \}, \\ \varphi_i &= \exp [p_i (\xi)], \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \neq i$.

Se puede escoger por ejemplo que los parámetros p_i satisfagan la relación $p_1 > p_2$. Veamos ahora el límite cuando $t \rightarrow -\infty$. Logrando que ξ sea finita, entonces φ_i se torna acotada, pero al mismo tiempo $\varphi_j \rightarrow 0$. En este caso la solución (17) se hace igual a

$$u_I \approx \frac{p_i^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} p_i (x - v_i \varepsilon_i t) \right],$$

Esta solución es un simple solitón regular.

Por otro lado, si consideramos que $\xi \approx (\varepsilon_j \nu_j + \varepsilon_i \nu_i) t$ y tomamos el límite $t \rightarrow -\infty$, de tal manera que φ_j quede acotado y $\varphi_i \rightarrow \infty$, se obtienen dos tipos de soluciones: solitones singulares y solitones regulares que existen en el "infinito" pasado y son las siguientes:

$$u_{II} \approx \frac{p_j^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\ln \lambda + \frac{1}{2} p_j (x + v_j \varepsilon_j t) \right],$$

para $\lambda > 0$, y

$$u_{III} \approx -\frac{p_j^2}{4} \operatorname{cosech}^2 \left[\ln |\lambda| + \frac{1}{2} p_j (x + v_j \varepsilon_j t) \right],$$

cuando $\lambda < 0$.

Considerando la situación simétrica con respecto a la variable ξ tenemos para $t = -\infty$ las combinaciones posibles:

- A) regular-regular,
- B) regular-singular, y
- C) singular-singular.

Veamos ahora los valores positivos del tiempo. Si ξ es finito y $t \rightarrow \infty$, entonces φ_i queda acotada y $\varphi_j \rightarrow \infty$ y viceversa. Esto produce la solución

$$u \approx \frac{p_i^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\ln \lambda + \frac{1}{2} p_i (x - v_i \varepsilon_i t) \right]$$

para $\lambda > 0$, y

$$u \approx -\frac{p_j^2}{4} \operatorname{cosech}^2 \left[\ln |\lambda| + \frac{1}{2} p_j (x - v_j \varepsilon_j t) \right]$$

para $\lambda < 0$.

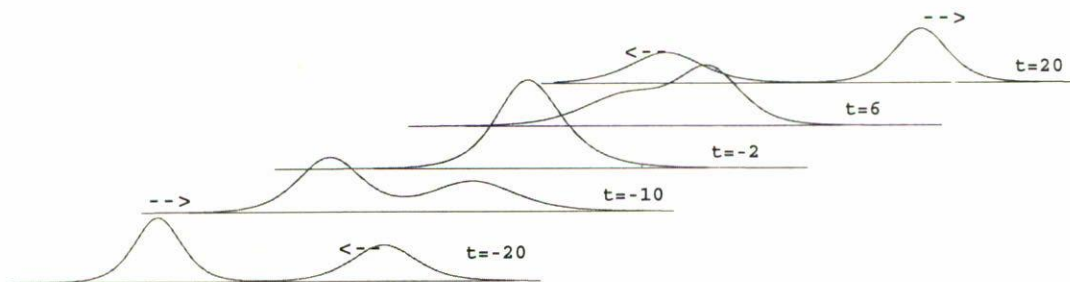


FIGURA 2. Interacción de dos solitones regulares. Si uno de ellos tiene velocidad mayor, entonces su amplitud correspondiente será menor con respecto a la que posee el otro solitón.

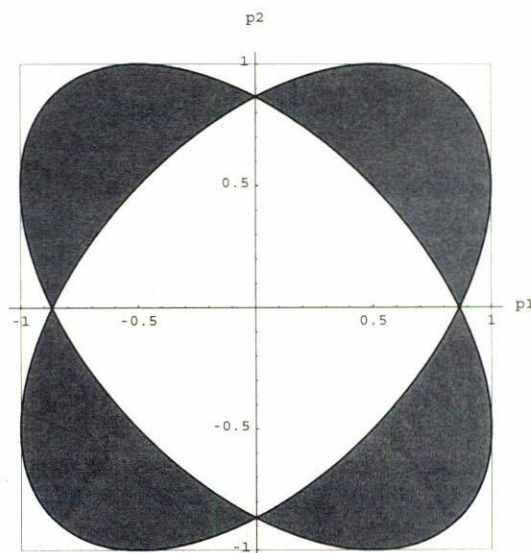


FIGURA 3. La intersección de las dos desigualdades (18) produce la región sombreada donde viven los solitones singulares junto a los regulares.

Pero si ahora consideramos al mismo tiempo que $t \rightarrow \infty$ y $\xi \simeq (\varepsilon_j v_j + \varepsilon_2 v_2) t$, entonces la función φ_i se acota y la función $\varphi_j \rightarrow 0$. En tal caso obtenemos el solitón simple

$$u \approx \frac{p_i^2}{4} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} p_i (x + v_i \varepsilon_i t) / 2 \right].$$

Nuevamente se consigue la misma combinación solitónica por parejas como en el caso anterior: A, B y C. Es fácil notar que si $q_1 = q_2$, la Ec. (14) se reduce a un solo solitón.

Como se ve del análisis asintótico de la solución general para dos solitones (17) se puede hacer la siguiente clasificación:

1. $\lambda > 0$. En esta región únicamente viven los solitones regulares. El solitón de menor amplitud viaja más rápido que el de mayor amplitud.

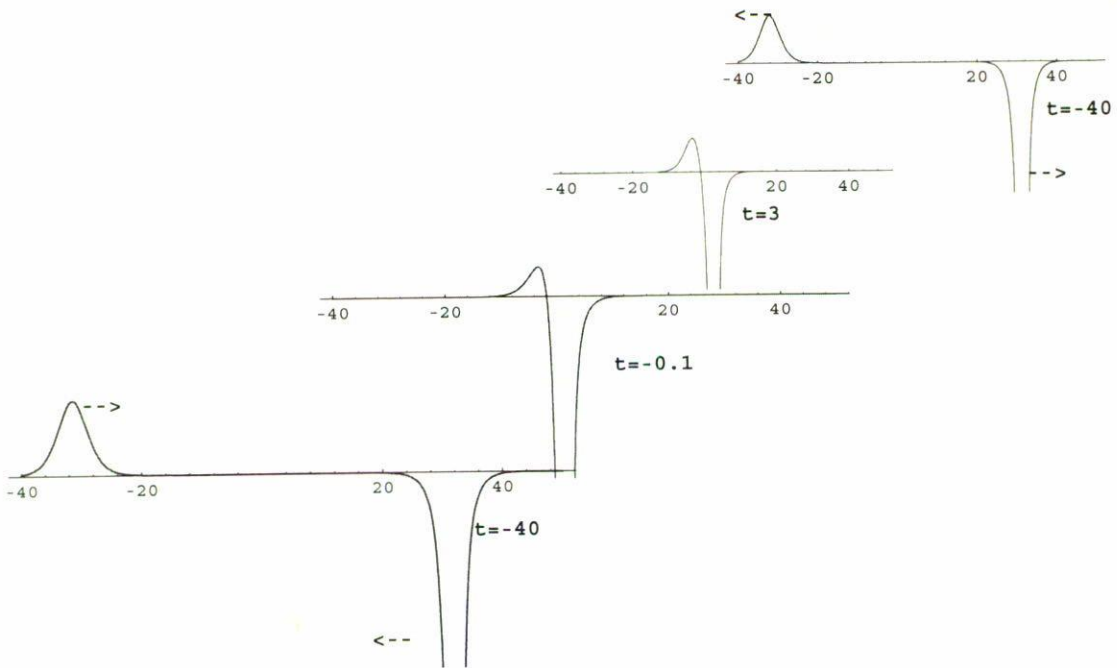


FIGURA 4a. Interacción de un solitón normal con otro singular desplazándose en sentidos contrarios.

2. $\lambda < 0$. Como complemento a las soluciones regulares se obtienen además las soluciones singulares que coexisten con ellos. Los solitones singulares viven en el sector negativo del campo.

La Fig. 2 nos muestra la gráfica de la soluciones regulares de (17) para valores de los parámetros tomados en distintos momentos de tiempo. Como es conocido, el comportamiento de este tipo de solitones durante la colisión es del tipo estándar, es decir que cada uno ellos sufre un cambio de fase, o sea que el centro de cada uno de estas ondas solitarias después del choque estará un poco desplazado con relación a lo que tendrían en un movimiento libre. Para el solitón más alto el cambio de fase es de α_1 hasta $\alpha_1 + \ln \lambda$, al mismo tiempo para el más pequeño fue de $\alpha_2 + \ln \lambda$ hasta α_2 cuando el tiempo va pasando desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El cambio de fase total es $\Delta\theta = 0$, lo que produce que el centro de masa de los pares asintóticos de los solitones viaja con velocidad constante.

5. INTERACCIÓN DE SOLITONES SINGULARES

Para el valor de $\lambda < 0$ tenemos dos casos:

- I) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Como se puede observar de la expresión (16) se obtiene las relaciones para los valores de los parámetros p_1 y p_2 :

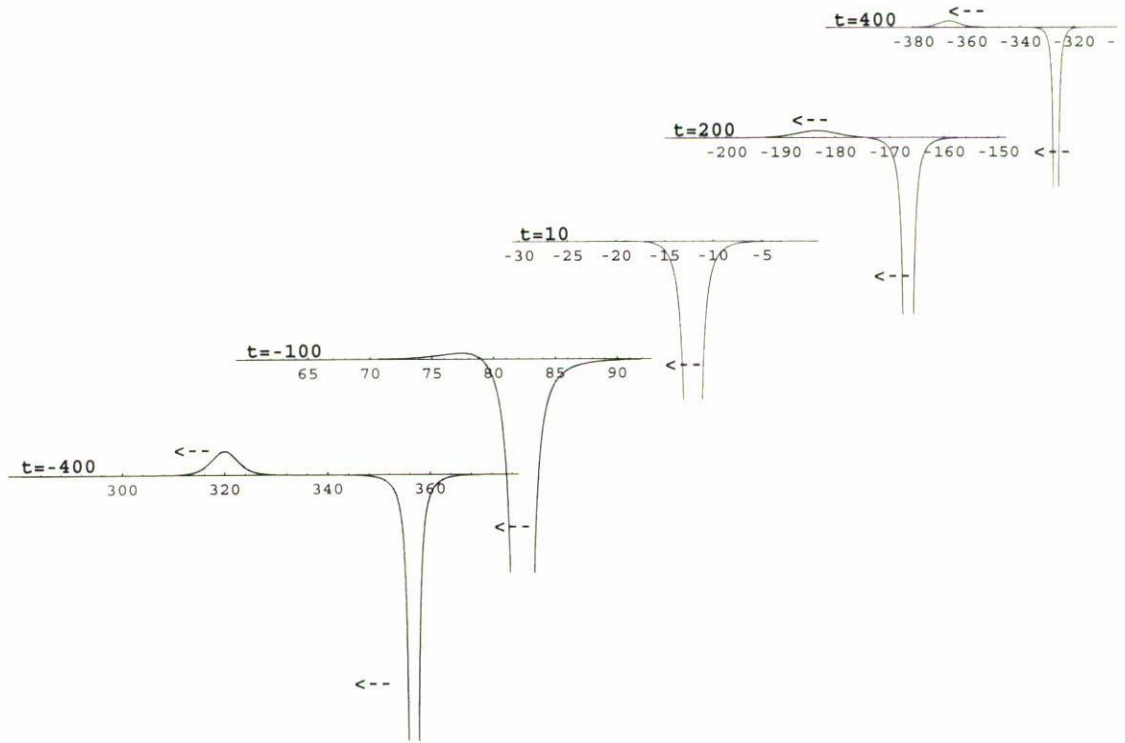


FIGURA 4b. Dos solitones, uno regular y el otro singular, antes del choque se mueven en el mismo sentido.

$$\begin{aligned}
 p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 - \frac{3}{4} &< 0, \\
 p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 - \frac{3}{4} &> 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

La igualdad a cero de la primera desigualdad de la formula anterior (18) permite obtener condiciones para calcular las soluciones resonantes del sistema [26].

- II) $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$. Aquí se obtiene las mismas expresiones de las Ecs. (18), pero con el signo de $p_1 p_2$ opuesto.

Esta situación se ilustra en la Fig. 3. La zona sombreada es la región paramétrica en donde viven los solitones singulares.

Las Figs. 4a y 4b, nos muestran la interacción de solitones singulares y normales. Después del choque de un solitón singular con otro solitón regular, independientemente de la dirección de ambos, reaparecen nuevamente pero transformados, es decir el singular se convierte en regular y viceversa. Cada una de las ondas conservan su individualidad y continúan su camino en el mismo sentido.

La Fig. 5 muestra la interacción de dos solitones singulares para dar origen a dos regulares. En $t \rightarrow -\infty$ se tienen dos soluciones singulares moviéndose libremente en el espacio unidimensional. Después del choque desaparecen los dos huecos, se desmoronan

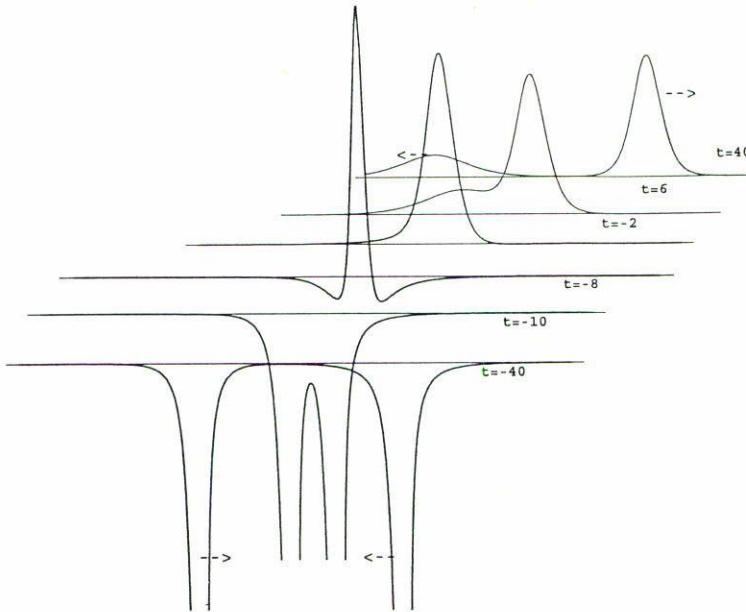


FIGURA 5. Aniquilación y creación de dos solitones huecos y normales representados por la Ec. (17). Después de la interacción entre solitones singulares, aparecen dos solitones normales viajeros y viceversa.

y dan lugar por un momento a un todo único como un solitón, pero inestable. Después de un lapso de tiempo emergen dos solitones normales uno más alto que el otro. Residuos tales como radiaciones no fueron observados. Estos solitones adquieren la velocidad de sus antepasados huecos y se van por el espacio indefinidamente. Cuando dos huecos se desplazan en la misma dirección se observa un cuadro análogo al anterior. Obviamente semejantes propiedades se observan cuando inicialmente se tienen dos solitones regulares y después chocan. Para valores negativos de p_i el comportamiento es el mismo, solo que en este caso las figuras de los solitones sufren una transformación de reflexión.

6. CONCLUSIONES

Se obtuvo la ecuación no lineal de la cuerda o especial de Boussinesq (EEB) a partir de la ecuación no lineal de Schrödinger del modelo ϕ^6 no relativista. Esta ecuación posee el vacío estable en donde las perturbaciones solitónicas se desenvuelven. Hemos analizado en forma explícita soluciones 1- y 2-solitónicas regulares y singulares. Del análisis del comportamiento asintótico de las soluciones se obtienen solitones regulares y singulares. Del comportamiento de estos solitones durante el choque se puede deducir que ellos se crean y se destruyen mutuamente. Los solitones singulares viven en el sector sombreado de la Fig. 3 y está determinado por el valor negativo del parámetro λ . Nuestras soluciones son excitaciones solitónicas de un vacío o condensado estable. El comportamiento de las n -soluciones y la dinámica tipo partículas de las singularidades de la ENC serán reportados posteriormente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Prof. Makhankov V. por las discusiones que iluminaron el desarrollo del presente artículo. Este trabajo ha sido financiado principalmente por el CONACyT bajo el proyecto 3147-E.

REFERENCIAS

1. R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, and H.C. Morris, *Solitons y Nonlinear Wave Equations*, (Academic Press, London, 1988).
2. V.G. Makhankov, *Soliton Phenomenology*, (Kluwer Academic Publisher, 1990).
3. V.G. Kartavenko, *Yad. Fiz.* **40** (1984) 377.
4. J.V. Turner and J.M. Byond, *J. Plasma Phys.* **22** (1979) 121.
5. R. Friedberg, T.D. Lee, and A. Sirlin, *Nucl. Phys. B* **115** (1976) 32.
6. M.A. Agüero Granados, *Proc. Conf. on Nonlinear evolution equations and dynamical systems*, (Dubna, Springer, Berlín 1991), p. 207.
7. L. Masperi, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 3263.
8. M.A. Agüero Granados and V.G. Makhankov, *preprint* E2-91-506 JINR (1991)
9. A. Hagesawa and Y. Kodama, *Opt. Lett.* **7** (1982) 285.
10. A.S. Davydov, *Solitons in molecular systems*, (Naukova Dumka, Kiev, 1984) [En Ruso].
11. L. Gagnon, B. Grammaticos, A. Ramani, and P. Winternitz, *J. Phys. A. Math. and Gen.* **22** (1989) 499.
12. P. Deift, C. Tomei, and E. Trubowitz, *Comm. Pure and App. Math.* **V. XXXV**, (1982) 567.
13. V.K. Kalantarov and O.A. Ladyzhenskaya, *J. Soviet Math.* **10**, (1978) 53.
14. V.G. Makhankov, *Phys. Reports* **35** (1978) p. 1-128.
15. G.P. Jeorjadze, A.K. Pogrebkov, and M.C. Polivanov, *Teoreticheskaya y Matematicheskaya Fizika* **40**, N2, (1979) 235.
16. M.A. Agüero Granados and A.A. Espinosa Garrido, *Phys. Lett.* **A 182** (1993) 294.
17. A.A. Grib, S.G. Mamyev, and V.M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in strong Fields*, St. Petersburg, Friedmann Laboratory Publishing, (1994).
18. La ecuación SB es un sistema integrable, es decir, posee N -soluciones solitónicas e infinitas leyes de conservación [24, 25]. Pero los cálculos numéricos directos basados en ella, fueron prácticamente imposibles de realizar por la inestabilidad del vacío sobre el cual los solitones fueron construidos. Esto condujo a la variante mejorada de la ecuación estandar de Boussinesq hecha por Makhankov [2]:

$$L\phi = (\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_t^2 \partial_x^2)\phi = (\phi^2)_{xx}.$$

que contiene soluciones solitónicas de interacción inelástica.

19. R. Hirota., *Math. Phys.* **14** (1973) 810
20. La forma mas general de solución 2-solitónica en donde se inserta explícitamente a los solitones singulares y regulares se pueden deducir generalizando la forma de la función $f(x, t)$ para (13), en donde la existencia de soluciones regulares o singulares está determinado por el signo del parámetro α . Así, para una solución generalizada tendremos

$$f = 1 + \delta_1 \exp(z_1) + \delta_2 \exp(z_2) + \delta_3 \exp(z_1 + z_2 + 2\theta),$$

donde $\delta_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$

21. K. Avinash, C. Rasinariu, and U. Sukhatme, *preprint* UCHEP-TH/95-2.
22. H.J.S. Dorren *J. Math. Phys.* **37** (1996) 1858.
23. R. Hirota, *Solitons*, edited by R.K. Bullough and P.J. Caudrey (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 120.
24. B.E. Zakharov, *Zhournal Experimentalnoy y Teoreticheskoy Fiziki* Vol. 65 p. 219, 1973.
25. M. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia (1981).
26. M. Tajiri and T. Nishitani. *J. of the Phys. Soc. of Japan* **51**, N11 (1982) 3720.