

Teorema de singularidades logarítmicas de masa en electrodinámica cuántica no masiva

R. MARES GALLARDO

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., Mexico*

H. LUNA

*Area de Física, Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, 02200 México, D.F., Mexico*

Recibido el 22 de agosto de 1996; aceptado el 3 de marzo de 1997

RESUMEN. Damos un ejemplo explícito del uso de la regularización dimensional para calcular en forma unificada las divergencias ultravioletas e infrarrojas, así como las singularidades de masa, mediante la consideración y verificación del teorema LMS (singularidades logarítmicas de masa), teniendo como esquema a la electrodinámica cuántica no masiva (QED). En la sección total se cancelan todas las divergencias si se toman en cuenta tanto la emisión de fotones suaves como de duros.

RESUMEN. We give an explicit example of the use of dimensional regularization to calculate in a unified approach, all the ultraviolet, infrared and mass singularities, by considering the LMS (logarithms of mass singularities) theorem in the frame of massless QED (quantum electrodynamics). In the calculation of the divergent part of the cross section, all singularities are found to cancel provided soft and hard photon emission are both taken into account.

PACS: 11.80.F; 11.20.D; 11.10.G

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que las divergencias ultravioletas [1] e infrarrojas [2] en QED pueden ser simultáneamente regularizadas vía el método de regularización dimensional [3]. Es también conocido que correcciones de orden más alto contienen logaritmos de la masa del electrón. En el límite $m_e \rightarrow 0$, uno espera que aparezcan singularidades de masa, y éstas son representadas en desarrollos de series de potencias de la matriz- S como logaritmos de m_e . Estas singularidades han sido estudiadas por Kinoshita [4] y por Lee y Nauenberg [5], y de esos trabajos proviene el teorema LMS sobre la cancelación de singularidades de masa. El teorema LMS, debido a T.D. Lee y M. Nauenberg se enuncia de la siguiente manera: "Para un sistema con estados degenerados en la energía, el desarrollo en serie de los elementos de la matriz- S pueden mostrar singularidades".

Se demuestra en la mecánica cuántica que bajo condiciones generales no aparecen tales singularidades en el desarrollo en serie de las probabilidades de transición, siempre que

se promedie sobre un ensemble apropiado de estados que son degenerados. La aplicación del teorema conduce a la cancelación de las singularidades de masa y de la divergencia en el infrarrojo.

Una pregunta legítima es entonces, ¿pueden también estas singularidades de masa ser regularizadas por el método de dimensión continua?; esto es, ¿puede uno poner la masa del electrón igual a cero desde el comienzo y obtener resultados finitos siempre que la dimensión espacio-tiempo se mantenga como un parámetro en la teoría?

En el caso de divergencias infrarrojas, éstas son simplificadas con el uso de la regularización dimensional [6], y aunque equivalente al esquema [2] λ_{\min} , la regularización dimensional tiene sus propias ventajas: la invariancia de norma se asegura y se preserva la estructura de las integrales regularizadas. En las divergencias infrarrojas aparecen también polos en el límite $\omega = 2^+$. Para proporcionar un ejemplo explícito del uso de la regularización dimensional para calcular en una forma unificada las divergencias ultravioletas e infrarrojas, así como las singularidades de masa, consideraremos el teorema LMS en el esquema de la QED no masiva y la dispersión de Möller, incluyendo correcciones reales a fotones suaves y duros, al orden más bajo no trivial en la teoría de perturbaciones. Este teorema se cumple solamente después de que la inclusión de singularidades de masa surgen de sustracciones características de polos ultravioleta. Sin embargo, cuando la dimensión espacio-tiempo se usa como un regulador común para las divergencias ultravioletas, infrarrojas y singularidades de masa, la identificación de estos distintos tipos de singularidades tiende a ser obscura. Completamos esta introducción remarcando algunas de las consecuencias del teorema LMS, también citado por Marciano [7] para procesos de decaimiento y algunos resultados en QED. Éstas son:

1. Corrección radiativa al decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ al orden α . Kinoshita y Sirlin [8] observaron que aunque las rapidezces de decaimiento parcial contenían al término $\ln(m_e)$, la rapidez de decaimiento total es finita cuando $m_e \rightarrow 0$.
2. Decaimiento del pion: $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$. En este caso, el teorema predice, no trivialmente, que las correcciones fraccionales $(P - P^0)/P^0$ a la rapidez de decaimiento total es libre de singularidades de masa [9].
3. En el caso de la QED no masiva, mencionamos el trabajo de Gastmans *et al.* [10], que, utilizando regularización dimensional, examina la sección total de dispersión de electrones no masivos en un potencial externo al orden (α^3) . El resultado es una estructura de polo doble y simple alrededor de $\omega = 2^+$ para términos separados en la sección total. Se encuentra que los polos se cancelan si se toma en cuenta el *bremstrahlung* de fotones duros.
4. García y Meuldermans [11], presentan el tratamiento de dispersión Compton de electrones no masivos e incluyen los cálculos de todas las singularidades.
5. Mencionamos un resultado muy hermoso e importante debido a S.R. Juárez y A. García [12], que encontraron, en las correcciones radiativas al decaimiento $M_{e_3}^\pm$, que el coeficiente de las singularidades logarítmicas de masa del leptón son estructuras independientes de las interacciones fuertes.

Nuestro procedimiento será poner $m_e = 0$ desde el principio, pero se calcula la integral implicada en una dimensión del espacio-tiempo generalizada de 4 a 2ω : En la Sec. 2 presentamos la cinemática de nuestro problema y las gráficas relevantes de Feynman. En la

Sec. 3 se presentan los resultados de los cálculos de las correcciones virtuales y se demuestra cómo éstas tratan a una estructura de polo doble en $2\omega = 4$. Se encuentra también que la sección total para el *bremstrahlung* de fotones suaves, posee una estructura similar y que esos polos dobles se cancelan. El polo simple restante se elimina cuando se toma en cuenta el *bremstrahlung* de fotones duros. Damos solamente las partes divergentes de las correcciones. Por último, en la Sec. 4 presentamos las conclusiones.

2. GRÁFICAS DE FEYNMAN Y CINEMÁTICA

Definimos $q = (p_1 - p'_1)$, $q' = (p_1 - p'_2)$, y $s = (p_1 + p_2)$, donde p'_1 y p'_2 son los cuadrimomentos de los electrones salientes en la dispersión elástica, q y q' son vectores *space-like* y s es un vector *time-like*. El sistema es tal que

$$q^2 = -4E^2 \sin^2 \theta/2, \quad q'^2 = -4E^2 \cos^2 \theta/2, \quad s^2 = 4E^2, \quad (1)$$

donde

$$E = E_1 = E_2 = E'_1 = E'_2. \quad (2)$$

Las siguientes relaciones son útiles:

$$\begin{aligned} q' \cdot q &= q \cdot s = q' \cdot s = 0, \\ q^2 + q'^2 + s^2 &= 0, \\ q \cdot p_1 &= q \cdot p'_2 = -q \cdot p_2 = -q \cdot p'_1 = q^2/2 = 0, \\ q' \cdot p_1 &= q' \cdot p'_1 = -q' \cdot p'_2 = -q' \cdot p_2 = q'^2/2 = 0, \\ s \cdot p_1 &= s \cdot p_2 = s \cdot p'_1 = s \cdot p'_2 = s^2/2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Todas estas fórmulas se cumplen solamente para dispersiones elásticas. Los diagramas de Feynman para el orden más bajo en la dispersión elástica electrón-electrón y las de orden siguiente (correcciones radiativas) se muestran en la Fig. 1.

3. CORRECCIONES RADIATIVAS EN QED NO MASIVA

Podemos escribir la sección total elástica como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{elástica}} &= \frac{(2\pi)^{2\omega}}{4} \int \delta^{2\omega}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \frac{d^{2\omega-1} E'_1}{2E'_1 (2\pi)^{2\omega-1}} \\ &\times \sum_{\text{espín}} [(\mu_1^+ \mu_1 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_1 + \text{intercambio}) + \sum_{i=2}^4 2\text{Re}(\mu_1^+ \mu_i - \tilde{\mu}_1^+ \mu_i + \text{intercambio}) \\ &+ 4\text{Re}(\mu_1^+ \mu_5 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_5 + \text{intercambio})], \end{aligned} \quad (4)$$

3.1. AUTOENERGÍA

Calculando los diagramas de Feynman en el método dimensional continuo para la energía, con parámetro 2ω , se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \mu_6(p_1) &= \frac{(2\pi)^4 e^2}{q^2} \left[\gamma_\mu \frac{i}{\not{p}_1} \sum(p_1, p_1^2 = 0) \chi \gamma^\mu \right], \\
 \mu_6(p_2) &= \frac{(2\pi)^4 e^2}{q^2} \left[\gamma_\mu \chi \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_2} \sum(p_2, p_2^2 = 0) \right], \\
 \mu_6(p'_1) &= \frac{(2\pi)^4 e^2}{q^2} \left[\sum(p'_1, p_1'^2 = 0) \frac{i}{\not{p}'_1} \gamma_\mu \chi \gamma^\mu \right], \\
 \mu_6(p'_2) &= \frac{(2\pi)^4 e^2}{q^2} \left[\gamma_\mu \chi \sum(p'_2, p_2'^2 = 0) \frac{i}{\not{p}'_2} \gamma^\mu \right], \\
 \tilde{\mu}_6(p_1) &= -\frac{(2\pi)^4 e^2}{q'^2} \left[\gamma_\mu \frac{i}{\not{p}_1} \sum(p_1, p_1^2 = 0) \chi \gamma^\mu \right]', \\
 \tilde{\mu}_6(p_2) &= -\frac{(2\pi)^4 e^2}{q'^2} \left[\gamma_\mu \chi \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}_2} \sum(p_2, p_2^2 = 0) \right]', \\
 \tilde{\mu}_6(p'_1) &= -\frac{(2\pi)^4 e^2}{q'^2} \left[\sum(p'_1, p_1'^2 = 0) \frac{i}{\not{p}'_1} \gamma_\mu \chi \gamma^\mu \right]', \\
 \tilde{\mu}_6(p'_2) &= -\frac{(2\pi)^4 e^2}{q'^2} \left[\gamma_\mu \chi \sum(p'_2, p_2'^2 = 0) \frac{i}{\not{p}'_2} \gamma^\mu \right]'. \tag{9}
 \end{aligned}$$

El operador autoenergía del electrón, $\Sigma(p)$, en 2ω dimensiones está dado por

$$\Sigma(p) = (\lambda - 1) \frac{\alpha}{2\pi} \pi^{\omega-2} \not{p} (-p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma^2(\omega)}{\Gamma(2\omega-1)}, \tag{10}$$

donde λ es el parámetro de norma que aparece en el propagador del fotón $\sim [g_{\mu\nu} - (\lambda k_\mu k_\nu)/(k^2)]$. Seleccionando la norma de Landau $\lambda = 1$, se tiene que $\Sigma(p) = 0$.

En consecuencia, $Z_2 = 1$, y ninguna renormalización de la función de onda del electrón ha sido realizada. La identidad de Ward, $Z_1 = Z_2$, indica entonces que la parte del vértice aún no está renormalizada.

3.2. POLARIZACIÓN DEL VACÍO

En este caso tenemos

$$\mu_4 = -\frac{(2\pi)^4 e^2}{2q^2} [\gamma_\mu \chi \pi_{\mu\nu} (p_1 - p'_1) \gamma^\nu], \tag{11}$$

$$\tilde{\mu}_4 = -\frac{(2\pi)^4 e^2}{2q'^2} [\gamma^\mu \chi \pi_{\mu\nu} (p_1 - p'_2) \gamma^\nu]', \tag{12}$$

donde el tensor polarización del vacío está dado por

$$\begin{aligned}\pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{2i\alpha}{\pi} \pi^{\omega-2} \Gamma(2-\omega) \frac{\Gamma^2(\omega)}{\Gamma(2\omega)} (-q^2)^{\omega-2} (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{i2\alpha}{3\pi} \frac{(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})}{2\omega - 4} + \text{términos finitos}\end{aligned}\quad (13)$$

y conduce a

$$Z_3 = 1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{2\omega - 4} + \text{términos finitos}.\quad (14)$$

La renormalización de la carga y la función de onda del fotón cancela el término del polo de la polarización del vacío y el diagrama completo puede efectivamente omitirse en el análisis de las divergencias en $(1)/(2\omega - 4)$ ó $(1)/(2\omega - 4)^2$, a condición de que se use la renormalización de la carga ($e \rightarrow e_R$).

3.3. DIAGRAMAS DE VÉRTICE

Aquí tenemos

$$\begin{aligned}\mu_5 &= \frac{(2\pi)^4 i e^2}{q^2} \left[\Lambda_\mu(p_2, p'_1; p_1'^2 = 0, p_1^2 = 0) \chi \gamma^\mu \right], \\ \mu'_5 &= \frac{(2\pi)^4 i e^2}{q^2} \left[\gamma_\mu \chi \Lambda^\mu(p'_2, p'_2; p_2'^2 = 0, p_2^2 = 0) \right], \\ \tilde{\mu}_5 &= -\frac{(2\pi)^4 i e^2}{q'^2} \left[\Lambda_\mu(p'_2, p'_1; p_2'^2 = 0, p_1^2 = 0) \chi \gamma^\mu \right], \\ \tilde{\mu}'_5 &= -\frac{(2\pi)^4 i e^2}{q'^2} \left[\gamma_\mu \chi \Lambda^\mu(p'_1, p_2; p_1'^2 = 0, p_2^2 = 0) \right]'.\end{aligned}\quad (15)$$

El elemento de matriz para el diagrama de vértice, por ejemplo μ_5 , se puede escribir después de la renormalización como

$$\mu_5 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[-\frac{q^2}{2} \mu(q^2) + \frac{3}{2\omega - 4} \right],\quad (16)$$

donde

$$\mu(q^2) = -\frac{2}{q^2} \left[\frac{2}{(2\omega - 4)^2} + \frac{2 \ln(-q^2) - 4C}{2\omega - 4} \right]\quad (17)$$

y $C = \gamma + \ln \pi$, γ es la constante de Euler-Mascheroni.

3.4. DIAGRAMAS DE DIVÉRTICE

Los diagramas de intercambio de dos fotones μ_2 y μ_3 son los más difíciles de calcular del total de los diagramas. Notemos en ambos, que cuando $k \rightarrow 0$ ó $k - q \rightarrow 0$, tenemos divergencia infrarroja y singularidad de masa. La evaluación del diagrama de intercambio (que no es en cruz) de dos fotones μ_2 es ligeramente más complicado que el diagrama de intercambio (en cruz) de dos fotones μ_3 , porque en μ_2 el estado intermedio puede llegar a ser real; entonces tenemos que cruzar un polo en la trayectoria de integración con respecto a k .

El elemento de matriz para μ_2 se puede escribir como

$$\mu_2 = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \left\{ 4(p_1 \cdot p_2)(\gamma_\mu \chi \gamma^4) I_0 + 2 \left[(\gamma_\mu \gamma^\sigma \not{p}_2 \chi \gamma^\mu) - (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu \gamma^\sigma \not{p}_1) \right] I_\sigma - (\gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu \chi \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\nu) I_{\sigma\tau} \right\}, \quad (18)$$

donde

$$(I_0; I_\sigma; I_{\sigma\tau}) = \int \frac{d^{2\omega} k (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)}{(k - p_1)^2 (k + p_2)^2 k^2 (k - p)^2}. \quad (19)$$

El elemento de matriz para μ_3 se puede escribir como

$$\mu_3 = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \left\{ (p_1 \cdot p'_2)(\gamma_\mu \chi \gamma^\mu) C_0 - 2 \left[(\gamma_\mu \gamma^\sigma \not{p}'_2 \chi \gamma^\mu) + (\gamma_\mu \chi \not{p}_1 \gamma^\sigma \gamma^\mu) \right] C_\sigma - (\gamma_\mu \gamma^\sigma \gamma_\nu \chi \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\nu) C_{\sigma\tau} \right\} \quad (20)$$

y

$$(C_0; C_\sigma; C_{\sigma\tau}) = \int \frac{d^{2\omega} k (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)}{(k - p_1)^2 (k - p'_2)^2 k^2 (k - q)^2}. \quad (21)$$

De las Ecs. (19) y (21) vemos que $(I_0; I_\sigma; I_{\sigma\tau})$ se puede obtener de $(C_0; C_\sigma; C_{\sigma\tau})$ por un intercambio de $p'_2 \leftrightarrow -p_2$. Este intercambio es equivalente a $s^2 \leftrightarrow q'^2$. En la integración de (19) y (21) conservaremos solamente términos de polos en el cálculo. Los resultados son como sigue:

$$C_0 = \frac{2\pi^2 i}{q^2 q'^2} \left\{ -\frac{4}{(2\omega - 4)^2} + \frac{2}{2\omega - 4} \left[\ln(-q'^2) - \ln(-q^2) - 2\gamma \right] \right\}, \quad (22)$$

$$C_\sigma = X(p_1 - p'_2)_\sigma + Y q_\sigma, \quad (23)$$

donde

$$X = \frac{2\pi^2 i}{q^2 q'^2} \left[\frac{1}{(2\omega - 4)^2} - \frac{\ln(-q^2)}{2\omega - 4} \right], \quad (24)$$

$$Y = -X + C_0 = \frac{-\pi^2 i}{2q^2} \mu(q'^2) \quad (25)$$

y

$$C_{\sigma\tau} = (p_1 + p'_2)_\sigma (p_1 + p'_2)_\tau K + (p_1 - p'_2)_\sigma (p_1 - p'_2)_\tau L \\ + [(p_1 + p'_2)_\sigma q_\tau + q_\sigma (p_1 + p'_2)_\sigma] W + q_\sigma q_\tau Z + g_{\sigma\tau} T, \quad (26)$$

donde

$$K = \frac{2\pi^2 i}{s^2 q^2} \left[-\frac{1}{(2\omega - 4)^2} + \frac{\ln(-q^2)}{2\omega - 4} \right] + \frac{q'^2 - q^2}{2s^2} X, \quad (27)$$

$$L = \frac{X}{2}, \quad (28)$$

$$W = \frac{-q'^2}{s^2} X + \frac{2\pi^2 i}{s^2 q^2} \left[\frac{1}{(2\omega - 4)^2} - \frac{\ln(-q^2)}{2\omega - 4} \right], \quad (29)$$

$$Z = -\frac{q'^4 X}{q^2 s^2} + \frac{2\pi^2 i}{q^2} \left[-\frac{\mu(q'^2)}{4} + \frac{q'^2}{s^2 q^2} \frac{1}{(2\omega - 4)^2} - \frac{q'^2 \ln(-q^2)}{s^2 q^2 (2\omega - 4)} \right], \quad (30)$$

$$T : \text{no-divergente.} \quad (31)$$

Sustituyendo los valores de C_0 , C_σ y $C_{\sigma\tau}$ en la Ec. (20), podemos simplificar la expresión para μ_3 como sigue:

$$\mu_3 = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \pi^2 i (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu) \frac{2q'^2}{q^2} \mu(q'^2), \quad (32)$$

$$\mu_2 = -\frac{e^4}{(2\pi)^6} \pi^2 i (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu) \frac{2s^2}{q^2} \mu(s^2). \quad (33)$$

Debe notarse la semejanza entre las Ecs. (32) y (33). En efecto, los coeficientes en las dos expresiones se relacionan por la sustitución $p'_2 \leftrightarrow -p_2$ ó $q'^2 \leftrightarrow s^2$.

Después de tomar la suma sobre el espín, obtenemos las siguientes expresiones para la parte divergente:

$$\sum_{\text{espín}} 2\text{Re}(\mu_1^+ \mu_2 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_2) = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{\text{espín}} (\mu_1^+ \mu_1 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_1) \frac{s^2}{2} \mu(-s^2) \quad (34)$$

y

$$\sum_{\text{espín}} 2\text{Re}(\mu_1^+ \mu_3 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_3) = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{\text{espín}} (\mu_1^+ \mu_1 - \tilde{\mu}_1^+ \mu_1) \frac{q'^2}{2} \mu(q'^2). \quad (35)$$

Finalmente, podemos escribir la expresión para la sección total elástica como sigue:

$$\frac{d\sigma^{\text{div}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left\{ \frac{4\alpha}{\pi} \left[\left(-\frac{3}{2} \right) \frac{1}{2\omega - 4} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left[s^2 \mu(-s^2) + q^2 \mu(q^2) + q'^2 \mu(q'^2) + \frac{8}{2\omega - 4} \right] \right] \right\}. \quad (36)$$

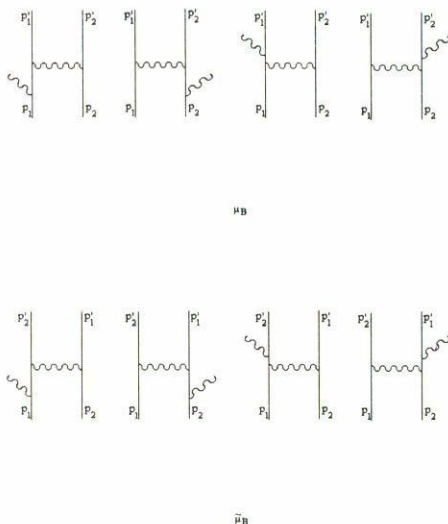


FIGURA 2. *Bremsstrahlung* suave.

3.5. BREMSSTRAHLUNG

Una vez conocida la matriz-S regularizada, las razones de transición se calculan según el procedimiento siguiente [13] (el cálculo se realiza en dimensión 2ω y son finitas en el límite $\omega \rightarrow 2^+$ en aquellos casos en que es válido el teorema LMS):

1. Se expresan las amplitudes en el espacio cuatridimensional.
2. $(d^3k)/[2k_0(2\pi)^3] \rightarrow (d^{2\omega-1}k)/[2k_0(2\pi)^{2\omega-1}]$.
3. Se usa la conservación de energía y momento
 $(2\pi)^2\delta^4(\sum p_i - \sum p_f) \rightarrow (2\pi)^{2\omega}\delta^{2\omega}(\sum p_i - \sum p_f)$.
4. Los factores estadísticos para partículas idénticas en el estado final, operadores de proyección en la energía, sumas sobre polarizaciones, etc., se efectúan de manera análoga al caso cuatridimensional.

3.5.1. *Bremsstrahlung* de fotones suaves [14]

Los diagramas de Feynman para la dispersión inelástica se representan en la Fig. 2. El elemento de matriz para los procesos se escriben como μ_{BS} y $\tilde{\mu}_{BS}$, en donde

$$\mu_{BS} = \frac{e^3}{(2\pi)^{7/2}(2\omega E_1 E_2 E'_1 E'_2)^{1/2}} \left[\frac{C^\mu(p'_1, p_1)\chi\gamma_\mu}{(p'_2 - p_2)^2} + \frac{\gamma_\mu\chi C^\mu(p'_2, p_2)}{(p_1 - p'_1)^2} \right], \tag{37}$$

$$C_\mu(p'_1, p_1) = \left(\frac{p'_1 \cdot \epsilon}{p'_1 \cdot k} - \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot k} \right) \gamma_\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \gamma_\mu}{p'_1 \cdot k} - \frac{\gamma_\mu \not{k} \not{\epsilon}}{p_1 \cdot k} \right) \tag{38}$$

y $\tilde{\mu}_{BS}$ se obtiene de μ_{BS} efectuando el intercambio $p'_1 \leftrightarrow p'_2$.

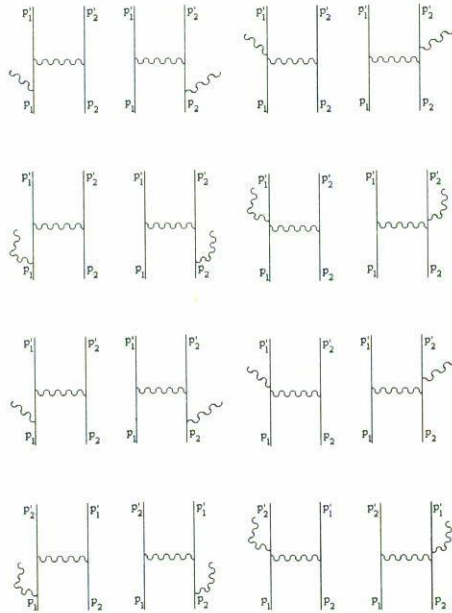


FIGURA 3. *Bremsstrahlung* duro.

Aplicando las reglas anteriores para las razones de transición se obtienen las Ecs. (39) y (40). El *bremsstrahlung* de fotones suaves de la Fig. 2, donde un fotón es emitido isotrópicamente con una energía más pequeña que $\Delta E \ll E$, contribuye a la sección total en la cantidad

$$\frac{d\sigma_{SB}^{div}}{d\Omega} = \delta_{SB} \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \tag{39}$$

y si se calcula en 2ω dimensiones, se encuentra que

$$\delta_{SB} = -\frac{4\alpha}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{2}{2\omega - 4} \right) + \frac{1}{4} \left[s^2 \mu(-s^2) + q^2 \mu(q^2) + q'^2 \mu(q'^2) + \frac{8}{2\omega - 4} \right] \right\}. \tag{40}$$

Debido a lo no masivo del electrón, uno no puede distinguir un electrón simple de un sistema electrón-fotón donde el fotón viaja paralelo al electrón si este sistema tiene la misma energía que el electrón, simple. Los estados inicial y final, entonces, muestran una degeneración adicional que deberá ser tomada en cuenta en la sección total.

3.5.2. *Bremsstrahlung* de fotones duros

En el caso de fotones duros se consideran aquellos con energía mayor que ΔE , y las amplitudes para los diagramas de Feynman de la Fig. 3, son

$$\begin{aligned} \mu_{BH} = & \frac{e^3}{(2\pi)^{7/2}} \frac{1}{(2\omega E_1 E_2 E'_1 E'_2)^{1/2}} \frac{1}{q^2} \left\{ \left[\frac{p'_1 \cdot \epsilon}{p'_1 \cdot k} + \frac{2E(p_1 \cdot \epsilon)}{q^2 \omega} \right] (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu) \right. \\ & + \frac{\omega}{E'_1} \left[\frac{(\not{\epsilon} \not{p}_1 \chi \gamma^\mu)}{2(p'_1 \cdot k)} - \frac{E}{q^2 \omega} (\gamma_\mu \not{p}'_1 \not{\epsilon} \chi \gamma^\mu) \right] + \frac{2E^2}{E'_1} \left[\frac{p'_2 \cdot \epsilon}{s^2 \omega} + \frac{p_2 \cdot \epsilon}{q'^2 \omega} \right] (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu) \\ & \left. + \left(\frac{E}{E'_1} \right)^2 \left[\frac{(\gamma^\mu \chi \not{\epsilon} \not{p}'_1 \gamma_\mu)}{s^2} - \frac{(\gamma^\mu \chi \gamma_\mu \not{p}'_1 \not{\epsilon})}{q^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

y

$$\begin{aligned} \mu_{BH} = & \frac{e^3}{(2\pi)^{7/2}} \frac{1}{(2\omega E_1 E_2 E'_1 E'_2)^{1/2}} \frac{1}{q'^2} \left\{ \left[\frac{p'_1 \cdot \epsilon}{p'_1 \cdot k} + \frac{2E(p_2 \cdot \epsilon)}{q'^2 \omega} \right] (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu)' \right. \\ & + \frac{\omega}{E'_1} \left[\frac{(\gamma_\mu \chi \not{\epsilon} \not{p}'_1 \gamma^\mu)'}{2(p'_1 \cdot k)} - \frac{E}{q'^2 \omega} (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu \not{p}'_1 \not{\epsilon})' \right] + \frac{2E^2}{E'_1} \left[\frac{p'_2 \cdot \epsilon}{s^2 \omega} + \frac{p_1 \cdot \epsilon}{q^2 \omega} \right] (\gamma_\mu \chi \gamma^\mu)' \\ & \left. + \left(\frac{E}{E'_1} \right)^2 \left[\frac{(\not{\epsilon} \not{p}'_1 \gamma_\mu \chi \gamma^\mu)'}{s^2} - \frac{(\gamma_\mu \not{p}'_1 \not{\epsilon} \chi \gamma^\mu)'}{q^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Tenemos que calcular los diagramas *bremsstrahlung* de fotones duros de la Fig. 3. La probabilidad de encontrar un sistema de energía E, constituido por un electrón no masivo y un fotón moviéndose dentro de un pequeño cono de mitad de ángulo δ alrededor del electrón es

$$\frac{d\sigma_{HB}^{div}}{d\Omega} = \delta_{HB} \frac{d\sigma_0}{d\Omega}, \quad (43)$$

donde

$$\delta_{HB} = \frac{4\alpha}{\pi} \left[\frac{3}{2} - \ln \frac{E}{\Delta E} \right] \frac{1}{2\omega - 4}. \quad (44)$$

Las partes divergentes de las correcciones *bremsstrahlung* suave y duro se agregan para dar

$$\delta = \delta_{SB} + \delta_{HB}. \quad (45)$$

Se concluye que las partes divergentes de las correcciones virtuales, Ecs. (39) y (43), cancelan exactamente las divergencias en las correcciones reales [ec. (36)].

4. CONCLUSIONES

Hemos presentado con algún detalle un cálculo de todas las divergencias en un proceso puramente no masivo. Con esto hemos ilustrado cómo en el contexto de regularización

dimensional las singularidades de masa, surgidas en una teoría de campos no masiva, pueden ser manejadas sin ambigüedad.

Al considerar el caso de dispersión de Möller en QED no masiva, hemos demostrado que es posible regularizar simultáneamente las divergencias ultravioletas e infrarrojas, así como también las llamadas singularidades de masa, introduciendo una dimensión continua. En el cálculo de la parte divergente de la sección total, se encuentra que se cancelan todas las singularidades siempre que se considere la emisión de fotones suaves y duros, y esto es precisamente lo que afirma el teorema LMS.

Debido a que la masa del electrón es pequeña, se obtiene una buena aproximación si, en los casos en que la energía es mayor que m_e , se hace $m_e = 0$. Sin embargo, se debe tener cuidado en hacer $m_e = 0$ en los términos que contienen singularidades logarítmicas de masa, después de la integración. El procedimiento tradicional seguido en el tratamiento de las correcciones radiativas es hacer $m_e = 0$ en forma selectiva en aquellos casos en que no se presentan singularidades de masa; sin embargo, aún en este caso se debe tener cuidado a fin de no ignorar contribuciones no-nulas. En aquellas transiciones en las que se conoce que son libres de singularidades de masa, se permite la sustitución $m_e = 0$ en todos los pasos del cálculo. La pregunta que surge es, ¿se puede hacer esto *ab initio*? La respuesta es afirmativa; si la divergencia al infrarrojo ha sido regularizada, así la contribución fotónica a la matriz-S será finita al infrarrojo y libre de singularidades de masa. El procedimiento consiste en hacer $m_e = 0$ y efectuar el cálculo en dimensión 2ω . Las razones de transición, libres de divergencias al infrarrojo y de singularidades de masa, son finitas en el límite $\omega \rightarrow 2^+$, mientras que las que contienen tales singularidades se manifiestan como polos en $2\omega = 4$.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a los doctores Fernando Angulo Brown y Pedro Pereyra Padilla por la revisión de este manuscrito. Es un placer agradecerle al árbitro las observaciones hechas a la versión original.

REFERENCIAS

1. G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* **47**, (1975) 849.
2. R. Gastmans and R. Meuldermans, *Nucl. Phys. B* **63**, (1973) 277; W.J. Marciano and A. Sirlin, *Nucl. Phys. B* **88**, (1975) 86;
3. C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Nuovo Cimento, B* **12**, (1972) 20; G. t'Hooft and Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, (1972) 189; J.F. Sshmore, *Lett. Nuovo Cimento* **4**, (1972) 289; R. Mares G. "Regularización Dimensional, divergencias ultravioletas e infrarrojas y singularidades de masa." (No publicado).
4. T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3**, (1962) 650.
5. T.D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev. B* **113** (1964) 1549.
6. R. Gastmans and R. Moulderms *op. cit.*; W.J. Marciano and A. Sirlin, *op.cit.*
7. W.J. Marciano, *Phys. Rev. D* **12**, (1975) 3861.
8. T. Kinoshita and A. Sirlin, *Phys. Rev.* **113**, (1959) 1652.

9. T. Kinoshita, *Phys. Rev. Lett.* **2**, (1959) 477.
10. R. Gastmans, R. Meuldermans and Verwaest, *Nucl. Phys. B* **105**, (1976) 454.
11. A. García A. and P. Meuldermans, *Nucl. Phys. B* **119**, (1977) 539.
12. S. Rebeca Juárez W. and A. García A., *Phys. Rev. D* **30**, (1984) 991.
13. W.J. Marciano, *op.cit.*
14. Yung Su Tsai, *Phys. Rev.* **120**, 1 (1960) 269.