

Modos forzados de una placa piezoeléctrica

E.G. Santoyo

*Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana
San Lázaro y L, Vedado, 10400 Ciudad de la Habana, Cuba*

R.R. Ramos y J.A. Otero

*Centro de Ultrasonica, Instituto de Cibernética, Matemática y Física
Calle D No. 353 entre 15 y 17, Vedado, 10400 Ciudad de la Habana, Cuba*

R. Pérez-Alvarez

Facultad de Física, Universidad de la Habana, Cuba

Recibido el 16 de octubre de 1996; aceptado el 22 de abril de 1997

Se investigan los modos forzados en una placa piezoeléctrica. Para ello se considera un material piezoeléctrico de simetría hexagonal 6mm polarizado con respecto al eje z . Son obtenidas las expresiones del desplazamiento mecánico y el potencial eléctrico para las ondas de tipo SH, tanto para los modos simétricos como antisimétricos. Se obtienen estas expresiones para un caso particular así como la velocidad de grupo.

Descriptor: Modos de vibración, piezoeléctrico

The propagation of wave in a piezoelectric plate is analyzed. A plate made of piezoelectric material with hexagonal symmetry (6mm) polarized with respect to z -axis is considered. The mechanical displacements and electric potential expressions for SH waves are analytically obtained. The symmetric and antisymmetric modes are studied in this case. A particular case is analyzed and the general solutions and group velocities are calculated.

Keywords: Vibration modes, piezoelectric

PACS: 43.40.Dx; 43.40.Cw

1. Introducción

El estudio de la propagación de ondas en placas ha tenido un gran auge en los últimos tiempos. Para los medios isótropos Mindlin [1] supo explicar, a través de la teoría de vibraciones, el espectro de Rayleigh-Lamb. Muestra que las partes de baja frecuencia del espectro pueden ser aproximadas por el espectro de componentes de estructuras típicas, tales como: varillas, membranas (tensión plana) y placas (flexión). En presencia de altas frecuencias, el espectro está relacionado con la onda de Rayleigh. Para mejorar la predicción del espectro de Lamb, Mindlin introduce el factor de conexión de cizalladura, haciéndole corresponder a la velocidad de la onda de flexión en las altas frecuencias la velocidad de la onda de Rayleigh. La exactitud del modelo de Mindlin ha sido verificada por la teoría de placas de Barnett y Ellis [2].

Por otra parte Habegar *et al.* [3], Reuter [4] y Nayfeh-Chimenti [5] hicieron un estudio de la propagación de ondas en una placa anisótropa compuesta, reforzada por fibras, lo cual es de gran importancia práctica debido a su aplicación en las pruebas ultrasónicas para determinar las propiedades de los materiales.

El caso de los materiales piezoeléctricos tiene gran semejanza con los anteriormente mencionados, pues se trata de oscilaciones de origen elástico acopladas con oscilaciones de

un campo eléctrico [6]. Tienen gran uso en la construcción de transductores ultrasónicos, resonadores, filtros y otros dispositivos. El estudio teórico y experimental de las oscilaciones piezoeléctricas en láminas y otros medios de dimensión finita ha cobrado especial interés en los últimos años por la aparición de nuevos métodos de obtención y caracterización [7, 8].

En muchos casos las ecuaciones de la piezoelectricidad tienen una complejidad tal que se hace necesario la aplicación de métodos aproximados como es por ejemplo el método de elemento finito [9]. Recientemente, diferentes grupos de investigadores con mucho énfasis han considerado incorporar las láminas de materiales piezoeléctricos en sistemas de estructuras, con el objetivo de darle a dichos sistemas mayor sensibilidad, actuación y control. Por ejemplo, en la Ref. 10 se examina la respuesta de una placa delgada construida por láminas piezotermoelásticas y sujeta a campos estacionarios térmicos y eléctricos. Por otro lado, R.R. Ramos [11] *et al.* analizaron las oscilaciones de una lámina piezoeléctrica polarizada respecto al espesor donde se considera la altura de la lámina mucho menor en comparación con las otras dos dimensiones en las cuales la lámina es infinita.

A diferencia de los anteriores trabajos, en el presente se investiga el efecto de una tensión electromecánica sobre la superficie de una lámina piezoeléctrica de espesor $2h$ situado sobre el eje y , para un material de simetría hexagonal 6mm

polarizado en el eje z . Se obtienen soluciones analíticas exactas para las ondas de tipo P-SV y SH, y se establecen las relaciones preliminares para los modos de vibración libres relacionados con este sistema. Se proponen dos casos particulares a modo de ejemplo.

2. Ecuaciones fundamentales

El propósito de esta sección es plantear las ecuaciones generales de propagación de ondas acústicas de un medio anisótropo piezoeléctrico cuya simetría es hexagonal, en particular nos referimos a un material piezoeléctrico de simetría hexagonal 6mm polarizado en el eje z . Este problema se describe por la ecuación de movimiento de una partícula de sustancia junto a las ecuaciones de Maxwell. Para el rango de frecuencias de interés estas últimas se reducen a la ecuación de Poisson para el potencial. A estas ecuaciones habrá que añadir las relaciones constitutivas piezoeléctricas.

En resumen se tiene el siguiente sistema de ecuaciones [12]:

$$\sigma_{ij,i} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (2)$$

$$D_{i,i} = 0, \quad (3)$$

$$E_k = -\phi_{,k}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k,$$

$$D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k, \quad (4)$$

donde la Ec. (1) representa la ecuación del movimiento, la Ec. (2) la relación lineal desplazamiento mecánico-deformación, la Ec. (3) se deriva de las ecuaciones de Maxwell bajo la consideración cuasiestática y la Ec. (4) las relaciones constitutivas piezoeléctricas. Por otra parte, σ es la tensión, ρ la densidad de masa, u el desplazamiento mecánico, ε la deformación, D el desplazamiento eléctrico, E el campo eléctrico y ϕ el potencial eléctrico. Denotaremos por C , e y ϵ los tensores elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos, respectivamente. Sustituyendo (4) en (1) y (3), y teniendo en cuenta (2) obtenemos,

$$\begin{aligned} C_{ijkl}u_{k,lj} + e_{mij}\phi_{,mj} &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ e_{kij}u_{i,jk} - \epsilon_{ik}\phi_{,ik} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

el cual es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales acopladas, en el que figuran cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas u_i y ϕ . Dicho sistema describe las vibraciones de un medio piezoeléctrico.

Estudiaremos la propagación de ondas en un medio piezoeléctrico para un material de clase 6mm polarizado en el eje z caracterizado por 5 constantes elásticas, 3 piezoeléctricas y 2 dieléctricas [13]. Debido a la simetría de los tensores eléctrico y piezoeléctrico estos se pueden escribir según un arreglo matricial que consiste en reemplazar ij o kl por α o β , donde i, j, k, l toman los valores 1, 2, 3 y α, β toman los valores de 1 a 6 de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$(11) \mapsto 1, \quad (22) \mapsto 2, \quad (33) \mapsto 3,$$

$$(23) = (32) \mapsto 4, \quad (31) = (13) \mapsto 5, \quad (12) = (21) \mapsto 6.$$

De esta forma las relaciones que figuran en (4) toman la forma:

$$\sigma_x = C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} - e_{31}E_z,$$

$$\sigma_y = C_{12}u_{1,1} + C_{11}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} - e_{31}E_z,$$

$$\sigma_z = C_{13}(u_{1,1} + u_{2,2}) + C_{33}u_{3,3} - e_{33}E_z,$$

$$\sigma_{yz} = C_{44}(u_{3,2} + u_{2,3}) - e_{15}E_y,$$

$$\sigma_{xz} = C_{44}(u_{3,1} + u_{1,3}) - e_{15}E_x, \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})(u_{2,1} + u_{1,2}),$$

$$D_x = \epsilon_{11}E_x + e_{15}(u_{3,1} + u_{1,3}),$$

$$D_y = \epsilon_{11}E_y + e_{15}(u_{3,2} + u_{2,3}),$$

$$D_z = \epsilon_{33}E_z + e_{31}(u_{1,1} + u_{2,2}) + e_{33}u_{3,3}.$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (5) puede ser escrito por componentes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{11}u_{1,11} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})u_{2,12} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})u_{1,22} + (C_{13} + C_{44})u_{3,13} + C_{44}u_{1,33} + (e_{15} + e_{31})\phi_{,13} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})u_{2,11} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})u_{1,12} + C_{11}u_{2,22} + (C_{13} + C_{44})u_{3,23} + C_{44}u_{2,33} + (e_{31} + e_{15})\phi_{,23} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ (C_{44} + C_{13})u_{1,13} + (C_{44} + C_{13})u_{2,23} + C_{44}u_{3,11} + C_{44}u_{3,22} + C_{33}u_{3,33} + e_{33}\phi_{,33} + e_{15}(\phi_{,11} + \phi_{,22}) &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ -\epsilon_{11}\phi_{,11} + e_{15}(u_{3,11} + u_{1,31}) - \epsilon_{11}\phi_{,22} + e_{15}(u_{3,22} + u_{2,32}) - \epsilon_{33}\phi_{,33} + e_{31}(u_{1,13} + u_{2,23}) + e_{33}u_{3,33} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

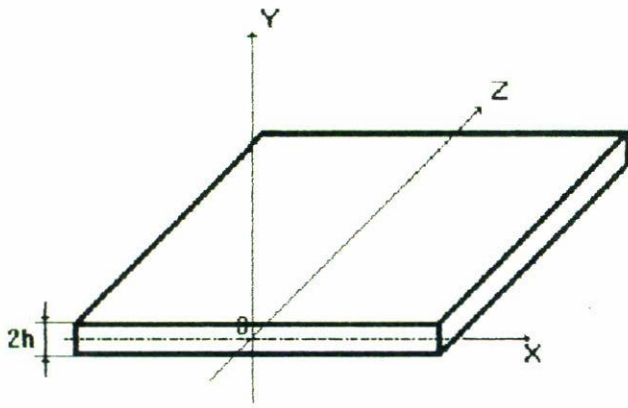


Figure 1. Lámina piezoeléctrica de simetría hexagonal polarizada en el eje z.

En lo que sigue supondremos que las componentes del desplazamiento mecánico y el potencial eléctrico no dependen de la coordenada z . Bajo esta suposición obtendremos un sistema mucho más sencillo, cuyo espacio solución es posible expresarlo como una suma directa de dos espacios. En uno de ellos sólo figuran u_1 y u_2 (ondas P-SV), mientras que en el otro figuran u_3 y ϕ (ondas SH) [14]. Para ambos problemas consideraremos condiciones iniciales nulas para todas las incógnitas del sistema correspondiente.

A continuación analizaremos el efecto que produce, sobre una placa piezoeléctrica de clase 6mm polarizada en la dirección del espesor, de altura $2h$ e infinita en la dirección de los ejes x y z (Fig. 1), la acción de una tensión electromecánica sobre la superficie $y = \pm h$. Al igual que en otros muchos trabajos relacionados con esta temática, adoptaremos un enfoque de onda larga. Es decir, estudiaremos campos cuya variación típica ocurre en longitudes mayores que la distancia entre átomos. Esto conlleva a que el ancho de la placa sea mucho mayor que esta distancia, aunque es de notar que en ocasiones las teorías de ondas largas funcionan razonablemente bien para capas muy finas con tal de insertar correctamente en el problema las interacciones y simetrías características.

3. Planteamiento del problema

La consideración sobre la no dependencia de z conduce al siguiente sistema:

$$C_{11}u_{1,11} + \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})u_{1,22} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})u_{2,12} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})u_{2,11} + C_{11}u_{2,22} + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})u_{1,12} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Como se observa en el sistema (8)–(9) sólo aparecen dos constantes elásticas, C_{11} y C_{12} , lo cual permite establecer una analogía con el caso elástico isótropo [15]. En este caso, resulta conveniente descomponer el vector desplazamiento \vec{u} en términos de derivadas de potenciales de la siguiente forma [15]:

$$u_1 = \varphi_{1,1} + \psi_{2,2}, \quad (10)$$

$$u_2 = \varphi_{1,2} - \psi_{2,1}. \quad (11)$$

Sustituyendo (10) y (11) en las Ecs. (8) y (9) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\Delta \varphi_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0, \quad c_1^2 = \frac{2C_{11}}{\rho}, \quad (12)$$

$$\Delta \psi_2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad c_2^2 = \frac{C_{11} - C_{12}}{\rho}. \quad (13)$$

El sistema (8)–(9) se ha desacoplado en dos ecuaciones (12)–(13) que representan ecuaciones de ondas. La Ec. (12), corresponde a las ondas longitudinales que se propagan con velocidad c_1 , mientras que la Ec. (13), corresponde a las ondas transversales que se propagan con velocidad c_2 .

Para resolver las Ecs. (12) y (13) utilizamos la transformación integral [15]

$$F(f(x, y, t)) = \tilde{f}(k, y, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{i\omega t} dt, \quad (14)$$

$$f(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty-ib}^{\infty-ib} \tilde{f}(k, y, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (15)$$

la cual representa la transformación de Fourier respecto a x y la transformación de Laplace respecto a t . Para esta última consideramos que la función $f(x, y, t)$ (como función de t) verifica las siguientes condiciones:

$$f(x, y, t) < M e^{-bt}, \quad \text{para } t \geq 0;$$

$$f(x, y, t) = 0, \quad \text{para } t < 0,$$

donde M y b son constantes positivas.

En este caso la integral de Laplace en (14) existe para todos los valores de $\omega = c + id$ tales que $d > -b$.

Aplicando la transformación (14) como operador a las ecuaciones (12)–(13) obtenemos

$$\tilde{\varphi}_{1,22} - (k^2 - \omega^2/c_1^2) \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{\psi}_{2,22} - (k^2 - \omega^2/c_2^2) \tilde{\psi}_2 = 0. \quad (17)$$

La solución general del sistema (16)–(17) es de la forma

$$\bar{\varphi}_1 = A \sinh(qy) + B \cosh(qy), \quad (18)$$

$$\tilde{\psi}_2 = C \sinh(sy) + D \cosh(sy), \quad (19)$$

donde

$$q^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right), \quad s^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right), \quad c = \frac{\omega}{k}.$$

Utilizando la transformación integral (14) en (10)–(11) se tiene que:

$$\tilde{u}_1(k, y, \omega) = -ik\bar{\varphi}_1 + \tilde{\psi}_{2,2}, \quad (20)$$

$$\tilde{u}_2(k, y, \omega) = \bar{\varphi}_{1,2} + ik\tilde{\psi}_2. \quad (21)$$

Para el modo simétrico ($A = D = 0$) sustituyendo (18)–(19) en (20)–(21) se obtiene

$$\tilde{u}_1(k, y, \omega) = -ikB \cosh(qy) + Cs \cosh(sy), \quad (22)$$

$$\tilde{u}_2(k, y, \omega) = Bq \sinh(qy) + ikC \sinh(sy). \quad (23)$$

De manera análoga se encuentra para los modos antisimétrico ($B = C = 0$) que

$$\tilde{u}_1(k, y, \omega) = -ikA \sinh(qy) + Ds \sinh(sy), \quad (24)$$

$$\tilde{u}_2(k, y, \omega) = Aq \cosh(qy) + ikD \cosh(sy). \quad (25)$$

Estudiaremos a continuación una situación de interés físico. Se trata de la aplicación de una tensión mecánica $P_0(x, t)$ en la superficie superior de la placa, es decir,

$$\sigma_y = 2P_0(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad y = h,$$

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = 0, \quad y = -h.$$

De manera similar al análisis realizado, consideraremos para las condiciones de contorno la descomposición en casos simétricos y antisimétricos.

Para el caso de los modos simétricos las condiciones de contorno adoptan la forma

$$\sigma_y = P_0(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \text{en } y = h; \quad (26)$$

$$\sigma_y = P_0(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \text{en } y = -h; \quad (27)$$

y para los modos antisimétricos las condiciones de contorno pueden ser escritas de la forma

$$\sigma_y = P_0(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \text{en } y = h, \quad (28)$$

$$\sigma_y = -P_0(x, t), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \text{en } y = -h. \quad (29)$$

Utilizando (22)–(23) y las condiciones de contorno (26)–(27), transformadas según la fórmula (14), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$(C_{11}q^2 - k^2C_{12})B \cosh(qh) + iks(C_{11} - C_{12})C \cosh(sh) = \tilde{P}_0(k, y, \omega),$$

$$-2ikqB \sinh(qh) + (s^2 + k^2) \sinh(sh) = 0.$$

Supongamos que

$$\Delta_s = (s^2 + k^2)(C_{11}q^2 - k^2C_{12}) \cosh(qh) \sinh(sh) - 2k^2sq(C_{11} - C_{12}) \sinh(qh) \cosh(sh) \neq 0,$$

$$\Delta_a = (s^2 + k^2)(C_{11}q^2 - k^2C_{12}) \sinh(qh) \cosh(sh) - 2k^2sq(C_{11} - C_{12}) \cosh(qh) \sinh(sh) \neq 0.$$

Por consiguiente,

$$B = \frac{s^2 + k^2}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(sh), \quad C = \frac{-2ikq}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(qh).$$

Luego

$$\tilde{u}_1 = -ik \frac{s^2 + k^2}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(sh) \cosh(qy) - \frac{2ikqs}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(qh) \cosh(sy), \quad (30)$$

$$\tilde{u}_2 = q \frac{s^2 + k^2}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(sh) \sinh(qy) + \frac{2k^2q}{\Delta_s} \tilde{P}_0 \sinh(qh) \sinh(sy). \quad (31)$$

De manera análoga para los modos antisimétricos se obtiene

$$\tilde{u}_1 = -ik \frac{s^2 + k^2}{\Delta_a} \tilde{P}_0 \cosh(sh) \sinh(qy) - \frac{2ikqs}{\Delta_a} \tilde{P}_0 \cosh(qh) \sinh(sy), \quad (32)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{s^2 + k^2}{\Delta_a} \tilde{P}_0 \cosh(sh) \cosh(qy) + \frac{2k^2q}{\Delta_a} \tilde{P}_0 \cosh(qh) \cosh(sy). \quad (33)$$

En el caso en que $\Delta_s = \Delta_a = 0$ se obtienen las ecuaciones de dispersión correspondientes a los modos libres simétricos y antisimétricos respectivamente, los cuales no serán investigados en nuestro trabajo.

Con las expresiones (30)–(33) hemos obtenido que para valores de ω y k independientes entre sí existen valores de las constantes, tales que se cumplen las condiciones de frontera correspondientes a cada modo. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que siempre es posible encontrar valores de ω y k , tal que una de las constantes de los respectivos modos sea cero y se mantengan las condiciones de frontera. Esto sólo se cumple si existe una relación entre ω y k .

Las relaciones correspondientes a cada modo son, para el modo simétrico,

$$\omega = \pm c_2 \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / h^2},$$

y

$$\omega = \pm c_1 \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / h^2}, \quad (34)$$

donde $n \in Z$.

Para el modo antisimétrico

$$\omega = \pm c_2 \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / 4h^2}$$

y

$$\omega = \pm c_1 \sqrt{k^2 + n^2 \pi^2 / 4h^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (35)$$

Para el caso de la onda SH, de acuerdo a la descomposición efectuada anteriormente, donde el desplazamiento mecánico \vec{u} y el potencial eléctrico ϕ no dependen de la variable z , se obtiene

$$\Delta(C_{44}u_3 + e_{15}\phi) = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (36)$$

$$\Delta(e_{15}u_3 - \epsilon_{11}\phi) = 0. \quad (37)$$

Haciendo la sustitución

$$\phi = (e_{15}/\epsilon_{11})u_3 + \varphi,$$

en las Ecs. (36)–(37) se obtiene

$$\alpha \Delta u_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (38)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad (39)$$

donde

$$\alpha = C_{44} \left(1 + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11} C_{44}} \right)$$

y el problema se reduce a calcular u_3 y φ del sistema desacoplado (38) y (39).

Aplicando la transformación integral (14) como operador a (38)–(39) se obtiene

$$\bar{u}_{3,22} - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} \right) \bar{u}_3 = 0, \quad (40)$$

$$\bar{\varphi}_{,22} - k^2 \bar{\varphi} = 0, \quad a^2 = \alpha/\rho. \quad (41)$$

La solución general de (40)–(41) es de la forma

$$\bar{u}_3(k, y, \omega) = A \sinh(qy) + B \cosh(qy),$$

$$\bar{\varphi}(k, y, \omega) = C \sinh(ky) + D \cosh(ky), \quad (42)$$

donde en este caso

$$q^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right).$$

Luego

$$\phi = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} [A \sinh(qy) + B \cosh(ky)] + C \sinh(ky) + D \cosh(ky). \quad (43)$$

A diferencia del caso anterior, el potencial ϕ está acoplado a una de las componentes del vector desplazamiento, poniéndose de manifiesto el efecto piezoeléctrico. Estudieemos el caso general en que se aplican tensiones mecánicas $P_0(x, t)$ y eléctricas $V_0(t)$ en la superficie superior de la placa piezoeléctrica, es decir,

$$\sigma_{yz} = 2P_0(x, t),$$

$$\phi = \varphi + (e_{15}/\epsilon_{11})u_3 = 2V_0(t), \quad \text{en } y = h; \quad (44)$$

$$\sigma_{yz} = 0,$$

$$\phi = \varphi + (e_{15}/\epsilon_{11})u_3 = 0, \quad \text{en } y = -h. \quad (45)$$

Si se tienen en cuenta los modos simétricos y antisimétricos y la transformación integral (14), las expresiones (42)–(43) y (44)–(45) pueden ser expresadas de acuerdo a cada modo de la siguiente forma para los modos simétricos:

$$\bar{u}_3 = B \cosh(qy), \quad (46)$$

$$\bar{\varphi} = D \cosh(ky), \quad (47)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = -\bar{P}_0,$$

$$\bar{\varphi} + (e_{15}/\epsilon_{11})\bar{u}_3 = \bar{V}_0, \quad \text{en } y = -h, \quad (48)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \bar{P}_0,$$

$$\bar{\varphi} + (e_{15}/\epsilon_{11})\bar{u}_3 = \bar{V}_0, \quad \text{en } y = h. \quad (49)$$

Para los modos antisimétricos

$$\bar{u}_3 = A \sinh(qy), \quad (50)$$

$$\bar{\varphi} = C \sinh(ky), \quad (51)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \bar{P}_0,$$

$$\bar{\varphi} + (e_{15}/\epsilon_{11})\bar{u}_3 = -\bar{V}_0, \quad \text{en } y = -h, \quad (52)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \bar{P}_0,$$

$$\varphi + (e_{15}/\epsilon_{11})u_3 = \bar{V}_0, \quad \text{en } y = h. \quad (53)$$

Sustituyendo (46)–(47) en (48)–(49) se obtiene el siguiente sistema:

$$B\alpha q \sinh(qh) + De_{15}k \sinh(kh) = \tilde{P}_0,$$

$$(e_{15}/\epsilon_{11})B \cosh(qh) + D \cosh(kh) = \tilde{V}_0.$$

El determinante del sistema es igual a:

$$\delta_1 = \alpha q \sinh(qh) \cosh(kh) - (e_{15}^2/\epsilon_{11})k \sinh(kh) \cosh(qh).$$

Si $\delta_1 \neq 0$ las constantes B y D pueden ser calculadas mediante las fórmulas de Cramer. Sustituyendo estos resultados en (46)–(47) obtenemos:

$$\tilde{u}_3(k, y, \omega) = \frac{\Delta_B}{\delta_1} \cosh(qy), \tag{54}$$

$$\tilde{\phi}(k, y, \omega) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\Delta_B}{\delta_1} \cosh(qy) + \frac{\Delta_D}{\delta_1} \cosh(ky), \tag{55}$$

donde

$$\Delta_B = -\tilde{V}_0 e_{15} k \sinh(kh) + \tilde{P}_0 \cosh(kh),$$

$$\Delta_D = \tilde{V}_0 \alpha q \sinh(qh) - \tilde{P}_0 (e_{15}/\epsilon_{11}) \cosh(qh). \tag{56}$$

De manera análoga para los modos antisimétricos obtenemos:

$$\tilde{u}_3(k, y, \omega) = \frac{\Delta_A}{\delta_2} \sinh(qy), \tag{57}$$

$$\tilde{\phi}(k, y, \omega) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} \frac{\Delta_A}{\delta_2} \sinh(qy) + \frac{\Delta_C}{\delta_2} \sinh(ky) \tag{58}$$

donde

$$\Delta_A = \tilde{V}_0 e_{15} k \cosh(kh) - \tilde{P}_0 \sinh(kh),$$

$$\Delta_C = \tilde{P}_0 (e_{15}/\epsilon_{11}) \sinh(qh) - \tilde{V}_0 \alpha q \cosh(qh),$$

$$\delta_2 = \alpha q \cosh(qh) \sinh(kh) - (e_{15}^2/\epsilon_{11})k \sinh(qh) \cosh(kh). \tag{59}$$

Efectuando la transformación inversa dada por la fórmula (15) obtenemos, para los modos simétricos:

$$u_3(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \times \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{\Delta_B \cosh(qy)}{\delta_1} e^{-i\omega t} d\omega, \tag{60}$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} u_3 + \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(ky) e^{-ikx} dk \times \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{\Delta_D}{\delta_1} e^{-i\omega t} d\omega. \tag{61}$$

Análogamente para los modos antisimétricos se obtiene:

$$u_3(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \times \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{\Delta_A \sinh(qy)}{\delta_2} e^{-i\omega t} d\omega, \tag{62}$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} u_3 + \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(ky) e^{-ikx} dk \times \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{\Delta_C}{\delta_2} e^{-i\omega t} d\omega. \tag{63}$$

Al igual que en las ondas P-SV se puede siempre encontrar valores de ω y k tales que una de las constantes sea cero y se satisfagan las condiciones de contorno, lo cual da como resultado las siguientes relaciones; para los modos simétricos (haciendo $\Delta_B = \Delta_D = 0$):

$$\frac{\tilde{P}_0}{e_{15} \tilde{V}_0} = k \tanh(kh), \quad \frac{\tilde{P}_0 e_{15}/\epsilon_{11}}{\tilde{V}_0 \alpha q} = \tanh(qh); \tag{64}$$

mientras que para los modos antisimétricos ($\Delta_A = \Delta_C = 0$), son:

$$\frac{\tilde{V}_0 e_{15}}{\tilde{P}_0} = k \tanh(kh), \quad \frac{\tilde{V}_0 \alpha q}{\tilde{P}_0 e_{15}/\epsilon_{11}} = \tanh(qh). \tag{65}$$

A continuación, estudiaremos el problema formulado anteriormente para el caso de una excitación armónica de potencial de frecuencia ω_0 , es decir

$$V_0(t) = \sin(\omega_0 t), \quad P_0(x, t) = 0. \tag{66}$$

En este caso, estamos suponiendo $t > 0$. Para $t < 0$ se considera $V_0 \equiv 0$.

Sabiendo que

$$\tilde{V}_0(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2},$$

donde ω_0 es una frecuencia dada, y sustituyendo (66) en las expresiones (56) y (59), se obtienen las siguientes relaciones; para los modos simétricos (haciendo $\Delta_B = \Delta_D = 0$)

$$\omega_{s_1} = \pm ka, \quad \acute{o}$$

$$\omega_{s_2} = \pm a \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{h^2}}, \quad n \in Z, \tag{67}$$

mientras que para los modos antisimétricos ($\Delta_A = \Delta_C = 0$) son

$$\omega_{a_1} = \pm ka \quad \acute{o}$$

$$\omega_{a_2} = \pm a \sqrt{k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{4h^2}} \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{68}$$

Obtengamos de manera más explícita las expresiones (60)–(61) para este caso particular. Para ello hagamos en la in-

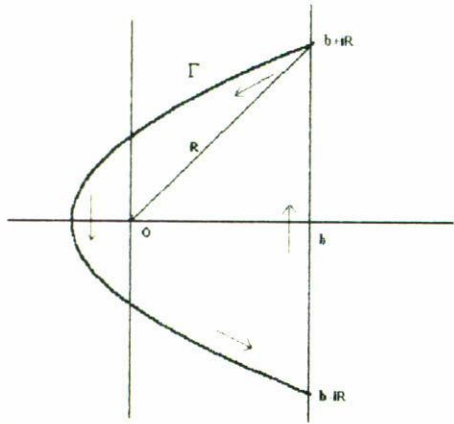


Figura 2. Camino de integración en el plano complejo.

tegral correspondiente a ω el cambio de variable $p = i\omega$ y escojamos como camino de integración el que se muestra en la Fig. 2.

Luego en (60)–(61) se tiene

$$u_3(x, y, t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \times \int_{-i\infty+b}^{i\infty+b} \frac{\Delta_B \cosh(qy)}{\delta_1} e^{-pt} d\omega, \quad (69)$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} u_3 - i \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(ky) e^{-ikx} dk \times \int_{-i\infty+b}^{i\infty+b} \frac{\Delta_D}{\delta_1} e^{-pt} d\omega. \quad (70)$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace aplicamos el teorema de los residuos al camino orientado positivamente Γ representado en la Fig. 2, donde R es el radio de la circunferencia de centro O el cual se toma lo suficientemente grande para que en la región queden incluidos todos los polos de la función que están a la izquierda de la recta $d = b$.

Los polos de la función son los ceros de δ_1 , es decir, las soluciones de la ecuación de dispersión $\delta_1 = 0$. Es conocido [15] que para cada k dicha ecuación tiene un número infinito de soluciones. De aquí que en el plano p hay un número infinito de polos localizados en el eje imaginario $p_n = i\omega_n$. Puesto que todos los polos son simples los residuos pueden ser determinados por una fórmula bien establecida, quedando finalmente,

$$u_3(x, y, t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e_{15} k \sinh(kh) e^{-ikx} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_0 \cosh(qy)}{\frac{\partial \delta_1}{\partial p} (\omega^2 + \omega_0^2)} e^{-pt} \Big|_{p=i\omega_n} dk, \quad (71)$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} u_3 + 2\pi \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(ky) e^{-ikx} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_0 q \cosh(qh)}{\frac{\partial \delta_1}{\partial p} (\omega^2 + \omega_0^2)} e^{-pt} \Big|_{p=i\omega_n} dk. \quad (72)$$

A partir de las relaciones (67) y (68) se pueden encontrar las expresiones para la velocidad de grupo c_g . Así por ejemplo de (67), haciendo $\omega = kc$, y luego $k = 2\pi/\lambda$ (λ longitud de onda), se obtiene que:

$$c = \pm a, \quad c = \pm a \sqrt{1 + \frac{n^2 \lambda^2}{4h^2}} \quad (73)$$

Ya que

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}, \quad (74)$$

entonces

$$c_{g1} = c, \quad c_{g2} = \frac{\pm a}{\sqrt{1 + \frac{n^2 \lambda^2}{4h^2}}}. \quad (75)$$

Para altas frecuencias (pequeñas longitudes de ondas) $c_{g2} \rightarrow a$.

De manera análoga se opera cuando

$$V_0(t) = 0, \quad P_0(x, t) = \delta(x - x_0) e^{i\omega_0 t}, \quad (76)$$

para $t > 0$, siendo x_0 un punto fijo arbitrario del eje x .

En este caso

$$\tilde{F}_0(k, \omega) = \frac{e^{-ikx_0}}{\omega - i\omega_0}. \quad (77)$$

Los casos (66) y (76), de acuerdo con el principio de superposición, pueden dar lugar a un caso más general, donde

$$V_0(t) = \text{sen}(\omega_0 t), \quad P_0(x, t) = \delta(x - x_0) e^{i\omega_0 t}$$

para $t > 0$.

4. Conclusiones

Se ha estudiado la propagación de ondas debido a la acción de una tensión electromecánica en una lámina piezoeléctrica de clase 6mm. Demostramos que esta tensión contiene por una parte una onda de tipo completamente mecánico P-SV estudiada por otros autores en sistemas elásticos isótropos. Por otro lado se origina una onda de carácter piezoeléctrico al tener acoplados un campo de deformación y otro eléctrico. Para esta última reportamos soluciones explícitas para los casos simétricos y antisimétricos. Cualquier otro caso se puede poner como combinación lineal de estos dos.

El caso de la acción de una tensión eléctrica fue analizado y se obtuvieron expresiones analíticas para el desplazamiento y el potencial eléctrico. La relación entre ω y k dada por (67) y (68) es utilizada para calcular las velocidades de grupo, donde, al igual que para el caso elástico, se observa que para pequeños valores de la longitud de onda, esta tiende a la velocidad de propagación de la onda.

La resonancia en frecuencia de estas ondas coincide como es habitual con los modos normales en las láminas sujetas a condiciones de contorno libres. Esto último será objeto de estudio próximamente.

1. R.D. Mindlin, *Proceedings of 11th Annual Symposium on Frequency Control*, U.S. Army Signal Corps Engineering Laboratories, Forth Monmouth, NJ, (1957).
2. K.E. Barnett and S. Ellis, *Int. J. Solids Struct.* **24** (1988) 859.
3. C.C. Habegar, R.W. Mann, and G.A. Baum, *Ultrasonics*, (1979) 57.
4. R.C. Reuter, *J. Comp. Mat.* **4** (1970) 129.
5. A.H. Nayfeh and Chimenti, *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, (1988) 1736.
6. R.R. Ramos, J.B. Castellero, and M.C.R. Valladares, *Rev. Mex. Fís.* **41** (1995) 865.
7. Li Xing-jiao, *J. Appl. Phys.* **56** (1984) 88.
8. Li Xing-jiao, W.Y. Pan, and L.E. Cross, *J. App. Phys.* **66** (1989) 4928.
9. H. Allik and T.J.R. Hughes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **2** (1970) 151.
10. T.R. Tauchert, *J. Thermal Stresses* **15** (1992) 25.
11. R.R. Ramos, J.A. Otero, R. Pérez-Alvarez, *J. Appl. Phys.* aceptado para publicar, (1997).
12. A.J. Slobodnik, *Proceedings of the IEEE* **64** (1976) 5.
13. D.A. Berlincourt, D.R. Curran, and H. Jaffe, *Physical Acoustics IA*, (1964).
14. L.M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, (Academic Press, New York 1960).
15. J.D. Achenbach, *Waves Propagation in Elastic Solids*, (New York, Vol. **16** (1973).