

Autointeracción de sexto orden en teoría no lineal de campos

M.A. Agüero-Granados

Facultad de Ciencias, Unidad Académica el Cerrillo

Universidad Autónoma del Estado de México

Instituto Literario 100, C.P. 50000 Toluca, Edo. de Mex., Mexico

Recibido el 10 de octubre de 1996; aceptado el 22 de agosto de 1997

Tomando como eje central a las soluciones tipos solitones de la ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger se hace una introducción a diferentes aspectos fundamentales de la física no lineal de campos, tales como el método de estados coherentes, concepto de cargas topológicas, de analogía mecánica, etc. Principalmente abordamos las propiedades del caso no relativista en 1+1 dimensiones de espacio-tiempo.

Descriptors: Solitones, ecuación cúbica-quinta de Schrödinger

By using as a central axis the soliton like solutions of the cubic quintic nonlinear Schrödinger equation, we explain certain concepts of the nonlinear field theory: the coherent state method, topological charges, mechanical analogy method and so on. Our main concern is the nonrelativistic case in 1+1 dimensional space-time.

Keywords: Solitons, cubic quintic Schrödinger equation

PACS: 03.50.Kk; 11.15Kc; 11.30 Na

1. Introducción

En sistemas lineales que soportan movimientos ondulatorios, un paquete de ondas inicialmente bien formado, se va deteriorando con el transcurso del tiempo debido a la dispersión de sus componentes. Zabusky y Kruskal [1] introdujeron el concepto de "Solitons" para designar a las ondas solitarias que emergen de una interacción sin cambio de forma ni velocidad. La definición de solitones en la literatura es muy variada. Aquí entenderemos por solitón a una configuración de campo distinto del vacío, que es solución de ecuación no lineal localizada en el espacio y con energía finita. Existen ciertos solitones que por regla general son estables a la dispersión. Esto ocurre porque el deterioro paulatino de la onda solitaria se compensa con la tendencia a juntarse de sus componentes, gracias a los términos no lineales de la ecuación de campo.

El comportamiento de los solitones esta determinado por ecuaciones diferenciales (o integro-diferenciales) no lineales. Existen varios métodos para resolver estas ecuaciones, como por ejemplo el poderoso Método de la Dispersión Inversa (MDI) [2]. En el caso de las ecuaciones lineales el método de Fourier es el mas indicado y el mas popular. Por ésta razón es que al MDI se le conoce también como método no lineal de Fourier.

Existen diversos modelos físico-matemáticos que soportan solitones. Uno de ellos es el modelo φ^6 de teoría no lineal de campos que no es integrable según el método de dispersión inversa. La versión no relativista del modelo φ^6 es conocido también como ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger (ENCQ). Esta denominación es puramente formal debido

a la estructura de la ecuación. En su esencia nada tiene que ver con la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica. La ENCQ en física clásica describe diversos fenómenos de óptica, de ferromagnetismo, de física de plasmas, superconductividad, cambios de fase, etc. [3]– [10]. El estudio de las autointeracciones de sexta potencia conjuntamente con términos de Chern-Simons en 2+1 dimensiones genera procesos interesantes tales como nucleación de solitones no topológicos originando cambios de fase de primer orden [11]. Un análisis desde el punto de vista de grupos Lie en la ecuación cúbica-quinta de Schrödinger se puede encontrar en la Ref. 13.

Como es conocido la cuantización de la solución solitónica depende de la estabilidad de la solución clásica y puede ser llevada a cabo con métodos bien establecidos de perturbación. Es por ello, que es muy apropiado conocer primero las soluciones clásicas del modelo para luego abordar un análisis cuántico [12].

En la siguiente Sección se obtiene la ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger tomando como punto de partida un modelo clásico de ferromagnetismo, usando el método de los estados coherentes. En la Sec. 3 se explica el significado físico de los signos que aparecen en los términos no lineales de la ecuación cúbica-quinta. Esta teoría posee solitones topológicos y no topológicos. En la Sec. 4 hacemos una introducción a la teoría homotópica. Que diferencias existen entre solitones topológicos y no topológicos?. La respuesta a esta pregunta se da en la Sec. 5 del presente trabajo. En la Sec. 6 se da una introducción al método de partícula análoga. La Sec. 7 esta dedicada a comentarios finales.

2. Ecuación cúbica-quinta de Schrödinger

Ilustramos la obtención de la ecuación no lineal cúbica quinta de Schrödinger partiendo del modelo ferromagnético de Heisenberg (ver detalles en la Ref. 3). El hamiltoniano de la interacción entre el sistema de espines y el de fonones se puede escribir como

$$\hat{H} = \hat{H}_s + H_1,$$

donde

$$H_1 = T + V$$

y

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{4} \sum_{i\sigma} \left[J_{ii+\sigma} \left(\hat{S}_i^+ \hat{S}_{ii+\sigma}^- + h.c. \right) - 2J_{ii+\sigma} \hat{S}_i^z \hat{S}_{ii+\sigma}^z \right] - \mu h \sum_i \hat{S}_i^z \quad (1)$$

Aquí, como de costumbre, T y V representan a las energías cinética y potencial respectivamente de las oscilaciones de la red. El hamiltoniano está dado en términos de los operadores \hat{S} de espín. Las magnitudes de acoplamiento $J_{ii+\sigma} \equiv J(|x_{i+\sigma} - x_i|)$ tienen propiedades simétricas $J_{ik} = J_{ki}$ y el vector $\vec{B} = (0, 0, h)$ es el vector del campo magnético externo aplicado al sistema y por último, μ es la susceptibilidad magnética.

El proceso de reducción de un sistema cuántico a su contraparte clásica se desarrolla usando el método de los estados coherentes (véase el Apéndice). La descripción de sistemas cuánticos mediante el uso de estados coherentes, es un vasto campo de estudio actual [9]. Por ejemplo, para el análisis de excitaciones colectivas (magnones) sobre estados base, uno tiene que pasar desde el nivel cuántico de descripción al nivel clásico y semejante transición debe hacerse con cuidado. Comúnmente se utilizan funciones de prueba (es decir algu-

nas bases) para promediar al hamiltoniano cuántico. La elección de estados coherentes para estos objetivos se fundamenta porque estos estados son los que más se asemejan a los clásicos. Por ejemplo, los estados coherentes basados en el álgebra de Weyl (operadores de creación y destrucción), minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg dando como resultado el valor de $1/2$ (Ref. 14).

En el caso del hamiltoniano (1) nosotros deseamos pasar de la representación cuántica especificada por los operadores \hat{S} hacia una representación semiclásica, de c -índices (φ clásicos). Estos índices son las variables complejas conjugadas canónicas del espacio de fase del sistema clásico. Para ésto se requiere tener una representación de los operadores de espín en términos de operadores (de Bose) de creación a^+ y destrucción a . Para "bosonizar" a estos operadores de espín, se usan las siguientes relaciones de Holstein - Primakov

$$\begin{aligned} \hat{S}_j^+ &= \sqrt{2s - \hat{n}_j} a_j, \\ \hat{S}_j^- &= a_j^+ \sqrt{2s - \hat{n}_j}, \\ \hat{S}_j^z &= s - \hat{n}_j, \\ \hat{n}_j &= a_j^+ a_j, \end{aligned} \quad (2)$$

donde s es el valor del espín. Una vez que expresemos al hamiltoniano (1) en términos de operadores de Bose usando la ecuación anterior, podemos emplear los estados coherentes del grupo de Weyl basados en el álgebra de los operadores de Bose.

Para nuestros fines usamos los estados coherentes basados en el álgebra de Weyl (Glauber)

$$|\varphi\rangle = e^{\varphi a^+ - \bar{\varphi} a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\varphi|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3)$$

donde $|n\rangle = \sqrt{n!} (a^+)^n |0\rangle$, promediamos al hamiltoniano (1) (pero ya escrito en términos de operadores de Bose) por los estados coherentes (3) y se obtiene la versión clásica

$$\begin{aligned} H &= H_0 - \sum_i J_{ii+1} \left[s(\bar{\varphi}_i \varphi_{i+1} + \bar{\varphi}_{i+1} \varphi_i) - \rho s (|\varphi_i|^2 + |\varphi_{i+1}|^2) \right] \\ &\quad - \sum_i \rho J_{ii+1} \left[|\varphi_i|^2 |\varphi_{i+1}|^2 - \frac{1}{2\rho} \bar{\varphi}_{i+1} \varphi_i (|\varphi_i|^2 + |\varphi_{i+1}|^2) \right] - \mu h \sum_i |\varphi_i|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\rho = \bar{J} / J > 0$. La energía cinética de las oscilaciones de la red se define como $T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2$ y en la energía potencial se introducen los términos anarmónicos

$$\begin{aligned} V &= \frac{m u_0^2}{2 a_0^2} \sum_i (x_{i+1} - x_i - a_0)^2 \\ &\quad + \frac{V_{III}}{3!} \sum_i (x_{i+1} - x_i - a_0)^3, \end{aligned}$$

donde u_0 es la velocidad del sonido.

Para separar los efectos anarmónicos de los otros generados por la constante de acoplamiento consideramos la aproximación no lineal

$$J_{ii+\sigma} \simeq J_0 - J_1 (x_{i+\sigma} - x_i - a_0) + J_2 (x_{i+\sigma} - x_i - a_0)^2,$$

con

$$J_k = -\partial^k J / (\partial x_i)^k |_{x_i=x_{i+1}-a_0} \quad k = 1, 2.$$

Para obtener la versión continua hacemos

$$\varphi_j = \varphi(ja_0) \equiv \varphi(\chi), \tag{5}$$

donde a_0 es la distancia entre dos puntos cercanos de la red y j es la posición en la red. En la aproximación de longitud de onda larga tenemos para las coordenadas de la red la expansión

$$x_{i\pm 1} = x \pm x_\chi a_0 + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} a_0^2 \pm \frac{1}{6} x_{\chi\chi\chi} a_0^3 + \frac{1}{4!} x_{\chi\chi\chi\chi} a_0^4 + \dots$$

La dinámica de la red lo vamos a analizar en el “espacio-tiempo (χ, t) ”. En la expansión del valor de $\varphi_{i\pm 1}$ retenemos solo términos no mayores que $\varphi_{\chi\chi}$ al suponer que φ es del mismo orden que $x_{\chi\chi}$. Entonces el sistema de ecuaciones de campo generado por el hamiltoniano (4) después de varias manipulaciones algebraicas adquiere la forma

$$\begin{aligned} i\varphi_t &= -\alpha\varphi_{\chi\chi} - \tilde{\mu}\varphi + g x_\chi \varphi + c_1 (x_\chi)^2 - \lambda |\varphi|^2 \varphi, \\ m x_{tt} &= c x_{\chi\chi} + c_1 (x_\chi |\varphi|^2) + g (|\varphi|^2)_\chi, \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} J_0 s a_0^2, & \tilde{\mu} &= s (J_0 - J_1) (1 - \rho) - h\mu, \\ g &= -J_1 s (\rho - 1) a_0, & c_1 &= 4s J_2 (\rho - 1), \\ \lambda &= 2J_0 (\rho - 1), & c &= m u_0^2, \end{aligned}$$

En el limite quasi-estacionario $|m x_{tt}| \ll |c x_{\chi\chi}|$ del sistema de ecuaciones (6) se obtiene

$$i\varphi_t = -\alpha\varphi_{\chi\chi} - \tilde{\mu}\varphi - p \frac{|\varphi|^2 \varphi}{1 + b |\varphi|^2}, \tag{7}$$

con

$$b = \frac{c_1}{\sqrt{c}}$$

y

$$p = 4 \left[\frac{J_1 s^2 (1 - \rho)^2}{c} + \frac{1}{2} s J_0 \right],$$

donde los términos de orden superior fueron despreciados. La Ec. (7) es conocida como ecuación no lineal de Schrödinger con una no linealidad de saturación. Semejante ecuación tuvo su origen también en varias ramas de la física, particularmente en óptica no lineal. Ahora, si tomamos en cuenta la no linealidad menor que 0 ($b |\varphi|^2$) en el último término de la Ec. (7), se obtiene la ecuación convencional no relativista de la teoría φ^6 de campos

$$i\varphi_t + \varphi_{\chi\chi} - \mu\varphi + (|\varphi|^2 - \mu |\varphi|^4) \varphi = 0, \tag{8}$$

conocida también como ENCQS.

3. Términos de atracción y repulsión

Comúnmente en la literatura se menciona que la Ec. (8) en términos del gas de Bose representa un modelo de bosones cuasi-clásicos con interacción par puntual de atracción y una interacción repulsiva de tres partículas. Generalmente no se hace mención al porque de las atracciones y repulsiones. En esta sección obtendremos el significado implícito que tienen los signos de las componentes no lineales de la ecuación cúbica-quinta de Schrödinger. Claro está que se pueden extrapolar los resultados abajo obtenidos hacia otras ecuaciones no lineales.

El significado físico de estos signos hace su aparición de la ley de Coulomb aplicada a los estados cuánticos. Veamos esto con más atención. Se tienen dos cargas eléctricas Q_1 y Q_2 que interactúan entre sí. Entonces, el potencial de interacción de estas dos cargas se escribe como

$$U(r_1, r_2) = \pm \frac{Q_1 Q_2}{|r_1 - r_2|}, \tag{9}$$

donde r_1 y r_2 son los vectores de posición de las cargas. Como se sabe el signo del potencial U determina el tipo de interacción entre las dos cargas así: el signo + determina la atracción y el signo - la repulsión.

Ahora empleamos el método semiclásico para el espacio 1 + 1 dimensional. La evolución del sistema será descrito por la función de onda $\psi(x, t)$, es decir, por su amplitud de probabilidad. Entonces, la magnitud $|\psi(x, t)|^2$ es la correspondiente densidad de probabilidad de la partícula de situarse en el punto x en el momento t . Por lo tanto, de la ley de Coulomb (9) se puede deducir la forma de la densidad de probabilidad para la energía potencial de dos partículas interactivas

$$w(x_1, x_2) = \frac{Q_1 |\psi(x_1, t)|^2 Q_2 |\psi(x_2, t)|^2}{|x_1 - x_2|}.$$

Obviamente la energía potencial total de dos partículas interactivas estará dada por la integral

$$U = \int dx_1 dx_2 w(x_1, x_2).$$

Ahora generalicemos el esquema arriba mencionado. Sea que el potencial (clásico) de dos partículas interactivas esté representado como $U(x_1, x_2)$, entonces la densidad de probabilidad de la energía potencial de dos partículas interactivas será

$$w(x_1, x_2) = |\psi(x_1)|^2 |\psi(x_2)|^2 U(x_1, x_2),$$

y para la energía total tendremos

$$W_{12} = \int dx_1 dx_2 w(x_1, x_2).$$

Si ahora la interacción es del tipo puntual, entonces con ayuda de las funciones δ de Dirac podemos escribir

$$U(x_1, x_2) = U_{12} \delta(x_1 - x_2)$$

y por lo tanto

$$W_{12} = U_{12} \int dx |\psi|^4;$$

el signo de U_{12} determina el tipo de interacción así: el signo $-$ determina la repulsión y a su vez el signo $+$ nos representa la atracción

Cuando en la escena comienzan a interactuar tres partículas, el potencial de esa interacción se escribirá como

$$U(x_1, x_2, x_3),$$

y si la interacción es del tipo puntual, entonces como antes

$$U(x_1, x_2, x_3) = U_{123} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3),$$

lo cual produce

$$w(x_1, x_2, x_3) = |\psi(x_1)|^2 |\psi(x_2)|^2 |\psi(x_3)|^2 U(x_1, x_2, x_3),$$

y donde la energía total potencial será

$$W_{123} = \int w(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = U_{123} \int dx |\psi(x)|^6.$$

El signo de la magnitud U_{123} determina el tipo de interacción idénticamente como en el caso de la interacción par puntual

De aquí deducimos que los términos proporcionales a ψ^4 y a ψ^6 pueden representar atracciones o repulsiones en dependencia del signo de sus respectivos coeficientes. El potencial tendrá entonces los siguientes términos:

$$U_{12} |\psi|^4 + U_{123} |\psi|^6,$$

que corresponden a la interacción par y triple. Para el caso de la Ec. (8) los coeficientes serán $U_{12} = 1$ y $U_{123} = -\beta$, siendo $\beta > 0$.

Resumiendo entonces, la Ec. (8) representa un sistema bosónico con interacciones par puntual de atracción y de interacción repulsiva de tres cuerpos puntuales.

4. Cargas topológicas

Veamos con base en la teoría homotópica, cómo aparecen las cargas "topológicas" [18]. Pero antes de hacer esto, veamos el caso general de la cuestión.

1.- Los campos clásicos $\varphi(x)$ que toman valores en alguna variedad Φ se pueden analizar como un mapeo continuo del espacio-tiempo $X = \{x\} = \{\mathbf{x}, t\}$ en la variedad Φ :

$$\varphi(x) : X \rightarrow \Phi.$$

Si la variedad $\Phi = R^1$, es un eje real, entonces el mapeo $\varphi(x)$ es un campo escalar y si $\Phi = R^n$, entonces el campo es vectorial.

Como de costumbre consideramos que la dinámica del campo se determina por cierto funcional llamado funcional de acción y la evolución del campo con respecto al tiempo satisface la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange,

que se obtiene del principio de la mínima acción. Sea que en el momento de tiempo t_1 , el estado del sistema se describe por la función $\varphi_1(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t_1)$ y en el instante t_2 por la función $\varphi_2(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t_2)$. Entonces la función de estado del sistema se puede dar como un mapeo del espacio $R^3 = \{x/t = \text{const}\}$ en la variedad de campo Φ :

$$\varphi_{1,2}(\mathbf{x}) : R^3 \rightarrow \Phi \tag{10}$$

En términos de la teoría homotópica se puede decir que dos mapeos continuos tipo (10) $\varphi_1(\mathbf{x})$ y $\varphi_2(\mathbf{x})$ son homotópicos entre sí ($\varphi_1 \sim \varphi_2$) si existe alguna función continua $\varphi(\mathbf{x}, t)$ llamado *homotópica* que convierte el mapeo $\varphi_1(\mathbf{x})$ en el mapeo $\varphi_2(\mathbf{x})$. Es decir, que tenemos

$$\varphi(\mathbf{x}, t) : R^3 \otimes T \rightarrow \Phi,$$

donde $T = [t_1, t_2]$ es un segmento del eje del tiempo tal que

$$\varphi(\mathbf{x}, t_1) = \varphi_1(\mathbf{x}); \quad \varphi(\mathbf{x}, t_2) = \varphi_2(\mathbf{x}).$$

Si se determina la homotopía, entonces, se definen las clases de equivalencia. Esto significa que, todo el espacio de mapeo $Map(R^3, \Phi)$, que se obtiene de todo el conjunto de mapeos (10) después de introducir en ella una topología compacta abierta, se puede fragmentar en clase de equivalencias que se denominan clases homotópicas:

$$Map(R^3, \Phi) = U_i [R^3, \Phi]_i. \tag{11}$$

La existencia de la fragmentación (11) en cierto modo determina la exigencia de la siguiente regla: si inicialmente la función de estado del sistema pertenece a una de las clases homotópicas y la evolución en el tiempo del sistema es continua, entonces en todos los momentos ulteriores, la función de estado pertenece a la misma clase inicial y el cambio continuo del sistema de un estado a otro (homotopía) lo realiza la solución continua de la ecuación dinámica del sistema.

Es importante señalar que para sistemas físicos no todos los mapeos tipo (10) son útiles, sino solamente aquellos que pertenecen a un subconjunto $Map^\circ(R^3, \Phi)$ de (11). Los elementos de este subconjunto de mapeos son aquellos que satisfacen condiciones de frontera y que la elección de ellos se hace con base en ciertas exigencias, tales como acotamiento de la energía, localización de los campos en el espacio-tiempo, u otro tipo de restricción, es decir criterios típicamente físicos. Por ejemplo, las condiciones de frontera en el caso unidimensional son las que satisfacen la condición

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_o, \quad \text{si} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

donde φ_o es un punto dado en la variedad Φ que representa algún mínimo del potencial del sistema. Para mayor información se puede consultar en la Ref. 20.

2.- Para diferenciar a las soluciones solitónicas topológicas de todas las demás que pueda soportar el sistema

en estudio, comúnmente se usa una magnitud que se llama “Carga topológica” definida como [19]

$$Q = \kappa^{-1} [\psi(x = \infty) - \psi(x = -\infty)]. \quad (12)$$

La fórmula (12) se define de la siguiente manera: La “corriente” que se conserva se denota análogamente a las corrientes tipo Nöther por

$$\xi^\mu = \kappa \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \psi,$$

con su divergencia

$$\partial_\mu \xi^\mu = 0,$$

donde se emplea las notaciones covariantes

$$\mu, \nu = 0, 1; \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En calidad de índice topológico Q (variable homotópica) se toma

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \xi_0,$$

dando como resultado a la Ec. (12), que servirá para calcular las diferentes cargas topológicas de las soluciones que satisfacen condiciones de frontera. Si la carga topológica Q es igual a cero, entonces la solución solitónica será no topológica.

3.- Los mapeos con igual índice topológico son homotópicos. Entonces, las soluciones con cargas topológicas distintas no pueden ser transformados en soluciones en las cuales las cargas topológicas sean iguales. Para esto se necesitaría una energía infinita. Por ejemplo, en el caso de la configuración *kink* (ver siguiente Sección) que satisface $\varphi \rightarrow \kappa$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $\varphi \rightarrow -\kappa$ cuando $x \rightarrow -\infty$, para que pueda convertirse en una configuración tipo vacío en el cual $\varphi = \kappa$ para todo valor de x , sería necesario cambiar el valor de φ desde $-\kappa$ hasta κ pasando por la barrera $\varphi = 0$ que posee una extensión infinita en todo el eje x .

Esto significa que existe una ley de conservación, un nuevo tipo de “invariante del movimiento” pero topológico, que se conserva con el tiempo. Al igual que otras magnitudes invariantes ésta juega el papel de “número cuántico” del estado del sistema. Estos números cuánticos Q son distintos a las invariantes comunes como energía, impulso, carga, etc. Como es conocido, estas últimas provienen de la existencia de simetría continua del lagrangiano del sistema, como son los desplazamientos temporales, espaciales, de “grupos internos” etc.

A diferencia de éstos, las “cargas topológicas” aparecen de las condiciones de frontera que se establecen para las soluciones, permitiendo de este modo que la energía del sistema sea finita. Es decir, estas leyes de conservación son distintos a las leyes de conservación tipo Nöther. La igualdad a cero de

su divergencia surge independientemente de las ecuaciones de movimiento del sistema. En muchos casos estos índices topológicos están ligados con una clase definida de rompimiento de simetría. Las soluciones se dividen en sectores. Para la obtención de sectores es necesario tener dos o más mínimos degenerados. Este fenómeno tiene gran significado en la física actual y se le denomina “rompimiento espontáneo de la simetría”.

Así, de una manera natural, aparece la variable homotópica o índice topológico Q que es el grado de mapeo del espacio (mejor dicho de sus fronteras) en la variedad de campo φ que son los mínimos del potencial. Este mapeo pertenece al subconjunto de mapeos $Map^0(R^3, \Phi)$. Así llegamos a la idea de algebraización de problemas topológicos. Como es conocido la topología algebraica fue creada por Poincaré.

5. Soluciones topológicas y no topológicas

Comúnmente los solitones están agrupados en dos grandes clases: (a) Soluciones topológicas; aquellas cuyos índices topológicos Q son distintos de cero; y (b) Soluciones no topológicas con índices Q iguales a cero.

Veamos la ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger. Como ya lo mencionamos arriba, para el caso no relativista del modelo φ^6 tenemos a la Ec. (8).[†] Esta ecuación tiene soluciones solitónicas topológicas y no topológicas. Existe una vasta literatura sobre solitones topológicos y no topológicos, ver por ejemplo la Ref. 19.

Las soluciones solitónicas no topológicas son aquellas cuyas condiciones de frontera en el infinito son las mismas que posee el estado del vacío. En cambio, los solitones topológicos poseen condiciones de frontera topológicamente distintas de las condiciones de frontera que tiene el vacío. Esto quiere decir en particular, que deben existir estados de vacíos degenerados. Es decir, que el solitón estará “amarrado” por sus condiciones de frontera. Un ejemplo de solución solitónica topológica es un escalón o *kink* del modelo φ^6 véase Fig. 3b.

Veamos el caso de las soluciones regulares (que lo denotaremos por ψ y que a veces lo llamaremos también campo) de la ENCQS en 1+1 dimensiones del espacio-tiempo. Esta versión unidimensional permite encontrar analíticamente las soluciones solitónicas en forma explícita. Para este caso escribimos la ecuación no lineal de Schrödinger en forma más compacta:

$$i\psi_\tau + \psi_{\chi\chi} - [3|\psi|^2 - (2A + \rho_0)] (|\psi|^2 - \rho_0) \psi = 0. \quad (13)$$

Esta ecuación se obtiene de la relación (8) con simples cambios de escala de las variables y de la función de campo φ . Para ello los parámetros A y ρ_0 satisfacen la relación

$$\frac{A}{\rho_0} = -2 + \frac{3}{4} \frac{1}{\mu\nu} \left(1 + \sqrt{1 - 4\mu\nu} \right),$$

y las transformaciones de escala serán

$$\begin{aligned} \psi(\chi, \tau) &= \sqrt{\frac{3}{2\nu(A+2\rho_0)}} \varphi(\chi, \tau), \\ \tau &= \left(\frac{9}{8}\right) \frac{1}{\nu} (A+2\rho_0)^{-2} t, \\ \chi &= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} (A+2\rho_0)^{-1} x. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad es posible fijar el valor de $\rho_0 = 1$, porque las propiedades de las soluciones dependen sólo de la relación paramétrica A/ρ_0 . Aquí el parámetro A puede ser positivo o negativo en función del sistema físico en estudio. En adelante a las variables χ y τ las trataremos como si fuesen las variables de costumbre x y t .

El hamiltoniano que da origen a la Ec. (13) se expresa como

$$\begin{aligned} E &= \int (|\psi_x|^2) dx + \int (|\psi|^2 - \rho_0)^2 (|\psi|^2 - A) dx \\ &= T + V. \end{aligned} \tag{14}$$

Es fácil de ver que la Ec. (8) se obtiene de la ecuación hamiltoniana de movimiento

$$i\psi_t = i\{E, \psi\} = \frac{\delta E}{\delta \bar{\psi}},$$

donde el ultimo termino de la ecuación anterior es la variación del hamiltoniano E con respecto de la variable $\bar{\psi}$. Al exigir que la energía del sistema sea finita, el campo ψ en el infinito debe de satisfacer

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\psi|^2 = \lambda,$$

donde $\lambda = 0, 1, (2A + 1)/3$ es una constante que denotará a los vacíos (estables e inestables) del potencial, es decir, los valores del campo en donde $\psi = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\kappa$.

Como se puede ver de este calculo sencillo, el potencial del modelo tiene una serie finita de vacíos degenerados. El término "vacío", no significa un estado en el espacio de Hilbert, sino que es una configuración clásica con energía mínima. Entonces, si la energía es finita, las soluciones de la ecuación de movimiento conllevan a que los valores asintóticos de $\psi(x)$ deben de coincidir con los mínimos del potencial.

Analicemos tres tipos de solitones estáticos que surgen de la Ec. (13).

5.1. Solución tipo gotas

Si $\psi \rightarrow \kappa_1 = 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ entonces, la correspondiente solución de la ecuación cúbica - quinta de Schrödinger (13) es la solución solitónica tipo *gota* que es solución no topológico ya que $Q_g = 0$. Esta solución tiene la forma [3]

$$\psi_{go} = e^{i\theta_0} \left[\frac{-4\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\alpha \cosh[\sqrt{-\alpha}(x-x_0)]}} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

donde $\alpha = -\mu\nu$. La gota en movimiento se obtendrá de las transformaciones de Galileo

$$\begin{aligned} \theta_0 &\rightarrow \frac{v}{2}x - \frac{v^2}{4}t + \theta_0, \\ \cosh[\sqrt{-\alpha}(x-x_0)] &\rightarrow \cosh[\sqrt{-\alpha}(x-vt-x_0)]. \end{aligned}$$

El nombre se deriva de la siguiente situación. Si calculamos la integral de movimiento llamado "número de partículas" $N = \int dx |\psi|^2$, se puede obtener la siguiente fórmula:

$$N = \sqrt{3} \text{Arch} \left\{ \left[1 - 4 \left(\frac{1+2A}{(A+2)^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

con

$$\alpha = -\frac{3}{4} \frac{1+2A}{(A+2)^2}.$$

Cuando $\alpha \rightarrow -(3/16)$ ó $A \rightarrow 4$ en $A > 1$ (análogamente si $A \rightarrow 0$ en la región $A < 1$) entonces $N \rightarrow \infty$, lo cual implica que las fuerzas de atracción (vease la Sec. 3) entre "dos partículas" aumentan la densidad de ellas dentro del solitón y las de repulsión comienzan a operar (por las cercanías entre ellas) para compensar estas fuerzas. Entonces, el crecimiento *a posteriori* de densidad produce sólo el aumento de volumen del solitón y su amplitud se tornará constante $\psi \rightarrow \sqrt{3}/2$ si $N \rightarrow \infty$ (vease Fig. 1b).

5.2. Solución tipo *kink* o escalón y tipo burbuja

a) Los *kinks* aparecen cuando se tienen mínimos degenerados absolutos en $\psi = \pm\kappa_3 = \pm(2A+1)/3$, cuando $A > 4$. Las condiciones de frontera que satisface son

$$\psi(x = -\infty) = -\kappa_3, \quad \psi(x = \infty) = \kappa_3. \tag{16}$$

Para el *antikink* podemos tomar los signos intercalados, por decir, cuando $x \rightarrow +\infty$ el campo ψ se aproximará a $-\kappa_3$, etc. Calculando la carga topológica de esta solución de acuerdo a (12) obtenemos $Q_k = 2$. Para el *antikink* $Q_{antk} = -2$, etc. En este caso las soluciones regulares con energía finita se dividen en 4 sectores topológicos. A los sectores con energía

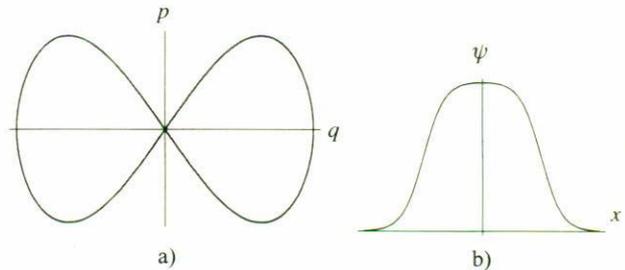


FIGURE 1. a) La curva descrita por la partícula análoga de la solución tipo gota en el espacio de fase. b) La misma solución.

finita los podemos caracterizar mediante los siguientes pares de índices $(-\kappa_3, \kappa_3)$, $(\kappa_3, -\kappa_3)$, $(-\kappa_3, -\kappa_3)$ y (κ_3, κ_3) que corresponden a los valores del campo $[\psi(x = -\infty), \psi(x = +\infty)]$. Entonces, el *kink*, el *antikink* y las soluciones triviales $\psi(x) = \pm\kappa_3$ son los miembros de los 4 sectores.

b) Por otro lado, si los vacíos degenerados no son absolutos, entonces las soluciones son del tipo de *burbujas*, cuya condición de frontera es la siguiente:

$$x \rightarrow \pm\infty \quad y \quad \psi \rightarrow \kappa_3.$$

Esta burbuja es una solución no topológica, porque como es fácil de calcular según la Ec. (12), la carga topológica es igual a cero, $Q_b = 0$. El valor de $\kappa_3 = \sqrt{(2A + 1)/3}$ es distinto para ambas soluciones. La fórmula general que agrupa a estos dos solitones estáticos para $A > 1$ es [17]

$$\psi_{\kappa,b} = e^{i\theta} \sqrt{2} ch(\xi - i\mu) \left[b(b^2 - 4a)^{-1/2} + ch2\xi \right]^{-1/2},$$

donde

$$\begin{aligned} \xi &= 1/2(v_s^2 - v^2)^{1/2}(x - vt - x_o), \\ \cos 2\mu &= \frac{(A - 4)\beta + v^2/2}{\beta\sqrt{b^2 - 4a}}. \end{aligned} \quad (17)$$

El signo de $A - 4$ determina el tipo de solución solitónica, es decir para $A < 4$ tendremos a las burbujas y para $A > 4$ los escalones o *kinks* solitónicos hacen su aparición, vease las Figs. 2b y 3b.

Como se pudo observar, el “espacio” de nuestro modelo es una línea con dos puntos en el infinito como fronteras. La existencia de los solitones topológicos como el *kink*, se debe a las propiedades del mapeo entre los mínimos degenerados del potencial, con el espacio, mejor dicho, con su frontera, que en este caso es un conjunto discreto. Este cuadro sencillo a primera vista no es así para otros tipos de lagrangianos, pero cualitativamente la explicación es la misma.

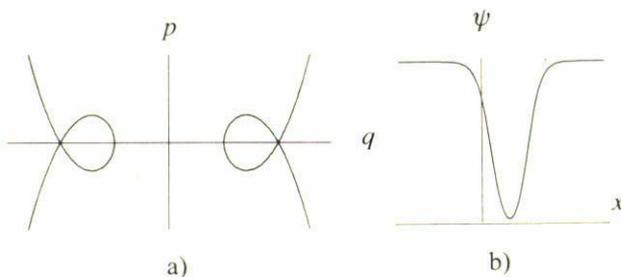


FIGURE 2. a) La trayectoria de fase correspondiente a la burbuja solitónica. b) Una solución tipo burbuja que representa un enrarecimiento del campo en un cierto sector del espacio.

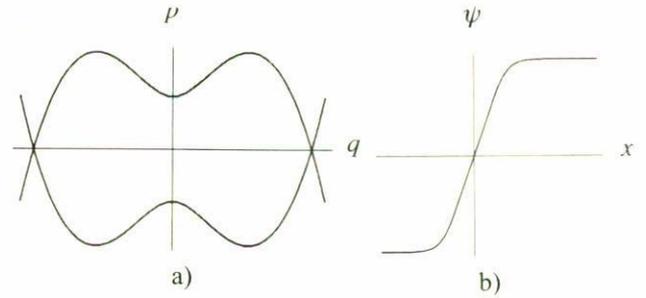


FIGURE 3. a) Trayectoria trazada la partícula análoga que corresponde a los *kinks* en el espacio de fase. b) El escalón o *kink*.

6. El Método de Analogía Mecánica

La densidad $U(\psi)$ del potencial V en la Ec. (14) en dependencia del parámetro A , tiene la forma

$$U(\psi) = \frac{1}{2}(\psi^2 - 1)^2(\psi^2 - A) \quad (18)$$

Las condiciones de frontera que se van a analizar son de dos tipos:

1. Condiciones de frontera tipo gotas: $x \rightarrow \pm\infty, \psi \rightarrow 0$.
2. Condiciones de frontera tipo condensado: $x \rightarrow \pm\infty, \psi \rightarrow cte$.

Sea que la dinámica del campo escalar se determina por la Ec. (13). Veamos el caso estático. Consideramos ahora al campo ψ como una coordenada de “posición” ξ de una “partícula”-análoga puntual con masa $m = 1$ en el instante del “tiempo” τ . Es decir, hacemos $\psi(x) \rightarrow \xi(\tau)$. Aquí el nuevo “tiempo” será $x = \tau$.

Entonces la ecuación de movimiento para la “partícula-análoga” será

$$\xi'' = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

Por ende, para la “partícula ξ ” tenemos la ecuación de Newton pero con signo contrario en su parte derecha. La “energía total” de esta partícula que se conserva con el “tiempo” x se determina por la ecuación

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - U(\xi).$$

Las condiciones de frontera para el campo ahora se convierten en condiciones temporales para el “infinito” pasado y futuro, respectivamente de la “partícula”:

$$x \rightarrow \pm\infty, \quad \xi \rightarrow 0, \text{ cte, } \text{ y } \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow 0,$$

por lo cual

$$W \rightarrow -U(\xi \rightarrow 0, \text{ cte}) \quad \text{si } \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (19)$$

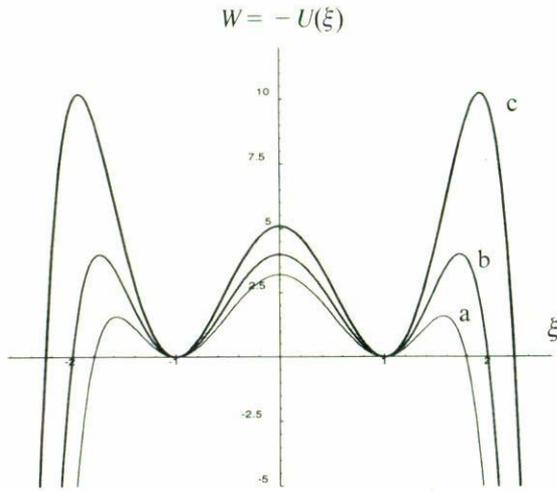


FIGURE 4. El Potencial $W = -U(\xi)$ que determina el comportamiento de la partícula análoga ξ para valores de $A > 1$: a) $A = 3.2$, b) $A = 4$, c) $A = 5.1$.

Con esta analogía mecánica vamos a analizar cualitativamente las soluciones posibles en el potencial $W = -U$. La dinámica de la partícula - análoga se determina por el potencial W (Fig. 4).

Cuando $A = 1$, el potencial U tiene un solo mínimo en $\psi = \psi_1 = 0$. En este mínimo, el potencial U tiene un valor constante $= -1/2$. Entonces el potencial W tiene un máximo cuando $\psi = 0$. Las condiciones de frontera (19) exigen que las trayectorias con energía constante $W = 1/2$ comiencen y terminen en este punto, es decir, en $\psi = 0$. Pero realizar esto es imposible, porque si la partícula se movió un poco estando en este punto máximo, sea a la izquierda o derecha, su energía cinética no será nunca cero y será mayor que su energía potencial. Por lo tanto, la partícula no podrá detenerse y después regresar. Esto quiere decir que la partícula análoga no corresponde a una onda solitaria estática.

Cuando el parámetro A aumenta de valor $A > 1$, el potencial W de la partícula análoga adquiere dos máximos laterales relativos. Ahora la partícula debe de terminar su movimiento en cualquiera de los dos máximos distintos de cero $\psi^2 = \lambda = (2A + 1)/3$ para ello la partícula análoga descenderá desde cierta altura h del máximo absoluto. Como es obvio la velocidad inicial de estas partículas será igual a cero. Esta partícula-análoga corresponde a la solución de campo tipo burbujas (Fig. 2a).

Si seguimos aumentando el valor del parámetro A hasta llegar a $A = 4$, conseguimos tres máximos degenerados $\psi_1 = 0, \psi_2 = -\sqrt{3}, \psi_2 = \sqrt{3}$, y el valor de $W = 4$. Ahora la partícula puede empezar su movimiento en uno de los máximos, digamos en ψ_1 cuando $x \rightarrow -\infty$ para finalizar su movimiento en la cima de la otra lomita ψ_2 . Este mismo proceso puede empezar en ψ_2 y terminar en ψ_3 o en direcciones contrarias. El número total de soluciones estáticas para n máximos es igual a $2(n - 1)$. Por ejemplo, la solución que va desde ψ_1 hasta ψ_2 tiene la forma (para $A > 1$) [17]

$$\psi = e^{i\theta} \sqrt{\lambda} \{1 + (\lambda - 1) \exp[\pm 2\lambda(x - x_0)]\}^{-\frac{1}{2}}$$

Cuando $A > 4$, el potencial para la partícula-análoga tendrá dos máximos absolutos degenerados y uno relativo. El máximo relativo $\psi = 0$ es el lugar en donde terminará su movimiento la partícula análoga si va cayendo desde cierta altura apropiada en las faldas de los máximos adyacentes y que corresponderá en el campo clásico a las soluciones no topológicas tipo gotas (Fig 1a).

El movimiento de la partícula-análoga que empieza en uno de los dos máximos absolutos y termina en la otra corresponde a las soluciones solitónicas estáticas tipo *kinks*. Estas son soluciones topológicas, porque sus condiciones de frontera generan la correspondiente carga topológica descrita más arriba (Fig. 3a).

Como es fácil de calcular, las trayectorias de energía constante en el espacio de fase $q = \xi, p = \partial_x \xi$ se determinan por las ecuaciones correspondientes,

$$p^2 = (q^2 - 1)^2 (q^2 - A) + g. \tag{20}$$

El valor de la constante g está determinado para cada tipo de solución. Por ejemplo, en la región $A > 1$ tenemos para las gotas

$$g = -A,$$

y para los *kinks* y burbujas

$$g = \frac{4}{27} (A - 1)^3.$$

Los valores del parámetro g para los *kinks* y burbujas son diferentes. Esto, porque los valores de $A > 1$ son distintos para ellos. Así, las burbujas viven en el segmento $1 < A < 4$ y los *kinks* en la región $A > 4$. Las gotas comparten su "existencia" con los *kinks* en $A > 1$ (cuando $A < 1$, el sector análogo es $-1/2 < A < 0$).

De las ecuaciones para las trayectorias de fase (20) se puede notar que a la energía mínima en el potencial para el solitón le corresponde una energía máxima para la partícula análoga. Esto sucede obviamente por las diferencia de signos de la energía potencial en los dos casos. Por este motivo, la trayectoria de la partícula análoga debe de terminar en la cima de las lomas correspondientes al vacío o condensado de los solitones. Si se dibujan en el espacio de fase las trayectorias para valores distintos de energía se puede apreciar que el movimiento de la partícula - análoga en los valles o hacia el infinito nos muestra ciertas trayectorias llamadas separatrices. A lo largo de estas separatrices se mueve la partícula análoga correspondiente a las soluciones solitónicas estáticas del campo escalar.

En el caso de mayor dimensión espacial $D > 1$, para campo estático la Ec. (8) adquiere la forma

$$\psi'' + \frac{D-1}{r} \psi' - k^2 \psi + \psi^3 + \psi^5 = 0. \tag{21}$$

Como de costumbre $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $r = |\mathbf{r}|$. El apóstrofe encima de la función de campo significa derivada parcial con

respecto a r . El parámetro k de esta ecuación se relaciona con el parámetro α de la Ec. (15) por: $\alpha = -k^2$.

Colocando el segundo término de la Ec. (21) en la parte derecha y multiplicando la ecuación por ψ' se obtiene

$$\frac{1}{2} \left\{ \psi'^2 - k^2 \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 - \frac{1}{3} \psi^6 \right\}' = \frac{D-1}{r} (\psi')^2. \quad (22)$$

Denotamos

$$U_p = \frac{1}{2} \left\{ -k^2 \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 - \frac{1}{3} \psi^6 \right\},$$

$$E_p = \frac{1}{2} (\psi')^2 + U_p.$$

Ahora, la partícula análoga ξ evoluciona en el potencial externo $U(\xi) = U_p$ bajo la acción de una fuerza de fricción $-(D-1)\xi_\tau/\tau$. Entonces la solución $\psi(r)$ de la Ec. (21) describe la trayectoria de la partícula $\xi(\tau)$.

La Ec. (21) no es más que la ecuación de Newton y la Ec. (22) es justamente la ley de conservación de la energía para la partícula con coordenada ξ . Además, esta relación se considera como el teorema virial para la partícula análoga. Como se puede ver de (21), para espacios con dimensiones $D > 1$, aparecen fuerzas de fricción que alteran drásticamente las trayectorias de la partícula originando disipación de energía. Por este motivo las trayectorias de las partículas en el espacio de fase se transformarán. En la región de los *kinks* aparecerán soluciones tipo vórtices. Como es conocido, esto quiere decir que la partícula-análoga tarde o temprano ocupará un lugar en el mínimo de su potencial o en el máximo central. Entre otras propiedades ciertas soluciones en estos espacios poseen nudos [3].

7. Comentarios finales

Con fines pedagógicos reporto ciertos aspectos de la teoría ϕ^6 no lineal de campos clásicos en 1+1 dimensiones, como una introducción general a la teorías no lineales que poseen soluciones coherentes sin caos.

El interés por estudiar a la teoría no relativista o sea a la ecuación cúbica-quinta no lineal de Schrödinger se basa en el hecho de que esta ecuación describe muchos fenómenos físicos (como ya lo mencionamos en la introducción), como por ejemplo en los defectones, en cadenas moleculares, en hidrodinámica nuclear, etc. Por otro lado, la transición de fase de primer orden se realiza en diferentes niveles de organización de la materia, como por ejemplo en la licuación, en la transformación estructural de los cristales, etc. Gracias a la discontinuidad del parámetro de orden cuando ocurren transiciones de fase de primer orden, un potencial con dos mínimos simétricos es incapaz de describir esa transición. Por lo tanto, es necesario introducir potenciales con dos mínimos pero asimétricos o potenciales con tres mínimos, dos de los cuales estarán degenerados y simétricos. A éste último caso le corresponde el modelo phi-seis, quién posee esas características.

Los resultados arriba presentados pueden ser tratados como un primer paso para analizar soluciones de teorías más generales en dos o más dimensiones espaciales. En el nivel clásico esta teoría posee propiedades interesantes. Recientemente se hizo el estudio de soluciones singulares de la ecuación especial de Boussinesq que se deriva de esta teoría en la Ref. 22.

Agradecimientos

Se agradece al Prof. Makhankov por el continuo estímulo aportado a la investigación en estas teorías, además a los Drs. Espinoza A. y Medina A. por el interés mostrado y las discusiones durante la fase de preparación del manuscrito. Además agradezco al árbitro por las sugerencias sobre los trabajos [20] y [21]. Este trabajo ha sido financiado en parte por el proyecto CONACyT 3147-E y por el proyecto UAEM 1169/96.

Apéndice. Estados Coherentes

Sea G un grupo Lie y T su representación irreducible unitaria que actúa en un espacio de Hilbert H . Denotemos por $|\Psi\rangle$, a un vector de este espacio, a la multiplicación escalar como $\langle \Phi | \Psi \rangle$ y al operador de proyección sobre Ψ como $|\Psi\rangle\langle \Psi|$. Fijamos algún vector $|\Psi_0\rangle \in H$. Consideramos una serie de vectores $\{|\Psi(g)\rangle\}$, tales que $|\Psi(g)\rangle = T(g)|\Psi_0\rangle$ y g recorre todo el grupo G . Los vectores que definen el mismo estado es decir que se diferencian en la fase serán agrupadas en clases de equivalencia. ($|\Psi(g_1)\rangle \sim |\Psi(g_2)\rangle$). Esto es posible si $|\Psi(g_1)\rangle = \exp i\theta |\Psi(g_2)\rangle$ por lo cual $T(g_2^{-1} \times g_1)|\Psi(g_0) = \exp i\theta |\Psi(g_1)\rangle$.

Sea $P = \{p\}$ una serie de elementos del grupo G que satisfacen

$$T(p)|\Psi(g_0)\rangle = \exp i\theta(p)|\Psi(g_0)\rangle.$$

Este conjunto es un subgrupo estacionario del vector $|\Psi_0\rangle$. De la sugerencia arriba mencionada es fácil ver que los vectores $|\Psi(g)\rangle$ al ser agrupados en la clase adjunta izquierda $g_{1p} \in g_1 P$ se diferenciarán uno del otro solo por la fase. Esto significa que pertenecen al mismo grupo. De esto uno concluye que vectores diferentes (estados) corresponderán a los elementos g_m que pertenecen al factor espacio $M = G/P$. En este caso, para describir al conjunto de diferentes estados es suficiente tomar un elemento de cada clase. Desde el punto de vista geométrico el grupo G es tratado como un espacio de haz fibrado con la base $M = G/P$ y la capa P . Entonces a los elementos g_m les corresponde alguna sección de este (fiber-bundle) espacio de haz fibrado.

Resumiendo, a la serie de vectores

$$|\Psi_m\rangle = T(g_m)|\Psi_0\rangle,$$

con $g_m \in G/P$, la llamaremos estados coherentes generalizados (ECG) sobre el grupo G con un vector referente $|\Psi_0\rangle$.

Estos estados coherentes minimizan la dispersión

$$\Delta C_2 = \langle \Psi_g | C_2 | \Psi_g \rangle - g^{ik} \langle \Psi_g | X_j | \Psi_g \rangle \langle \Psi_g | X_k | \Psi_g \rangle \quad (23)$$

donde $C_2 = g^{ik} X_i X_k$ es el operador cuadrático de Casimir, X_i son los generadores del álgebra de Lie y g^{ik} es el tensor métrico de Cartan-Killing. La versión análoga a la

relación (23) en el caso de los estados coherentes basados en el álgebra de Weyl minimiza la relación que representa al principio de incertidumbre de Heisenberg obteniéndose finalmente

$$\Delta p \Delta x = \frac{1}{2}.$$

†. La versión relativista del modelo es una ecuación de Klein-Gordon no lineal que se obtiene del lagrangiano

$$\mathcal{L} = (1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi),$$

donde $U(\phi)$ es el potencial de autointeracción de sexto orden. Para mayor información en cuanto a la manera de obtener ecuaciones no-relativistas (y viceversa) partiendo de las versiones relativistas se puede consultar la Ref. 21.

‡. El punto $A = 1$ es el punto de bifurcación. Es fácil demostrar que la región $A < 1$ es matemáticamente simétrica a la región $A > 1$ en el nivel clásico. Con apropiados cambios de variables escaladas que dependen del mismo parámetro A , esta solución se puede llevar de una región a otra. En el sector $A < 1$, el vacío estable está degenerado en $A = 1$, no hay dependencia de la "temperatura" A , en cambio, los estados inestables si dependen de A . En el sector de altas temperaturas $A > 1$ todo lo contrario: los vacíos estables dependen de A y los inestables no, además, la energía de los vacíos estables dependen de A . Este hecho influirá en sus respectivos comportamientos cuánticos. Por otro lado, es importante mencionar que la invariancia matemática de sectores es válido únicamente en la región comprendida para la existencia de los burbujas ($0 < A < 1$ y $1 < A < 4$) como veremos más adelante. En la región $B = \{-1/2 \leq A \leq 0\}$ "viven" las gotas y en $A < -1/2$ existen solamente *kinks*. Esto quiere decir que en la región $A < 0$ los *kinks* y las gotas comparten la región de existencia acotada B . Para valores $A > 1$, las gotas y los *kinks* viven en toda la región $A > 4$.

4. M.A. Agüero-Granados, *Proc. Conf. on Nonlinear evolution equations and dynamical systems*, Dubna, (Springer, Berlín, 1991), p. 207.
5. V.L. Ginsburg and L.P. Pitayevsky, *Sov. Phys. JETP* (1958) 858.
6. M.A. Agüero-Granados y V.G. Makhankov, *preprint E2-91-506 JINR* (1991).
7. V.E. Zakharov and Synakh, *Sov. Phys. JETP* **41** (1976) 465
8. D. Pushkarov and S. Tanev. Preprint ICTP *lamp/95/5*, (1995).
9. V.G. Makhankov, M.A. Agüero-Granados, and A.V. Makhankov. *Journal of Physics A. Math. and Gen.* **29** (1996) 3005.
10. L. Masperi, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 3263.
11. L. Masperi, *Modern Physics Letters A* **7** (1992) 3245
12. T.D. Lee and Y. Pang. *Physics Reports* **221** 251 (1992); R. Friedberg *et al.*, *Nucl. Phys. B* **115** (1976) 32; R.K. Dodd *et al.*, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, (Academic Press Inc. London, 1988).
13. L. Gagnon *et al.*, *J. Phys. A. Math. and Gen.* **22** (1989) 499.
14. A.M. Perelomov. *Generalized Coherent States and Applications*, (Springer, Verlag, 1986).
15. V.G. Kartavenko, *Yad. Fiz* **40** (1984) 377.
16. A.S. Davydov, *Solitons in molecular systems*, (Naukova Dumka, Kiev, 1984) [En Ruso].
17. M.A. Agüero-Granados and A.A. Espinosa Garrido, *Physics Letters A* **182** (1993) 294.
18. V. Makhankov *et al.*, *Skyrme Model and solitons in hadron physics* (Ed. JINR, Dubna, Rusia).
19. R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*, (North-Holland Publishing Company, 1982).
20. W. Marciano and H. Pagels, *Quantum Chromodynamics*, *Phys. Reports* **36**, (1978) 139.
21. R. Jackiw and S.Y. Pi, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 3500.
22. M. Agüero, A. Espinoza, and J. Martínez, Preprint 95/05. CEM, UAZ. *Rev. Mex. Fís.* **43** (1997) 361.

1. N. Zabusky and M.D. Kruskal, *Phys. Rev Lett.* **15** (1965) 240.
2. M. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, (SIAM, Philadelphia, 1981); B.E. Zakharov, C.B. Manakov, S.P. Novikov, and L.P. Pitaevsky. *Teoria de Solitones. Metodo de dispersion Inversa*, (en Ruso) (Nauka, Moscu, 1980); A.C. Newell *Solitons in Mathematics and Physics*, (University of Arizona, SIAM, 1985).
3. V.G. Makhankov, *Soliton Phenomenology*, (Kluwer Academic Publisher 1990).