

Distribución angular en la colisión elástica de bolas de billar

Fernando Chaos Urdampilleta

Escuela Superior de Física y Matemáticas-C.O.F.A.A., Instituto Politécnico Nacional

México 14, D.F., Mexico

Recibido el 12 de agosto de 1996; aceptado el 29 de abril de 1997.

Se analiza la dinámica de la colisión elástica entre dos bolas de billar tomando el caso en el cual la bola incidente se encuentra en el estado de rodamiento puro. Para este caso se obtiene la sección recta diferencial.

Descriptor: Colisión entre bolas de billar

The dynamics of billiard balls elastic collision is analyzed for the particular case in which the incident ball is in the state of pure rolling. For this case the scattering differential cross section is obtained.

Keywords: Billiard balls collision

PACS: 46.90.+s

1. Introduction

Una de las aplicaciones más atractivas de la teoría del cuerpo rígido es el estudio del movimiento de bolas de billar [1]. El juego de billar se jugaba en las cortes europeas en el siglo pasado, en donde se acostumbraba dar exhibiciones por jugadores expertos. Entre éstos, el jugador más popular era un capitán del ejército francés llamado Míngaud, quien escribió un libro sobre este tema [2] y entre los espectadores uno de los más asiduos era Coriolis. Tanto interés el juego a Coriolis que escribió un libro sobre el tema [3] tratando de explicar los efectos logrados por Míngaud en sus exhibiciones.

Las colisiones entre bolas de billar pueden tomarse como un buen ejemplo del fenómeno de dispersión, aunque con ciertas limitaciones puesto que la dispersión se lleva a cabo en dos dimensiones. Casi todos los libros de texto presentan este problema con fuertes hipótesis, como son el no considerar el tamaño de las bolas, la fricción, el deslizamiento, etc. Solamente se limitan a estudiar la conservación del momento lineal, que de hecho considera a las bolas como masas puntuales y por lo tanto no necesitan usar las ecuaciones de movimiento rotacionales, las cuales son importantes al tomar en cuenta la fricción con la mesa que es reponsable por la rotación de las bolas. En este trabajo se tratará sólo una pequeña parte de este tema, dejando el resto para estudios posteriores.

2. Leyes de conservación

Se llamará m a la masa de cada bola de billar con radio R , el mismo para ambas bolas. La bola fija se llamará bola blanco y la bola incidente se llamará bola proyectil. La bola incidente se acercará a la bola blanco con una velocidad inicial conocida \mathbf{v}_0 y con un parámetro de impacto b , suponiendo que la colisión es elástica. Además, se supone que incide en el estado de rodamiento puro, sin resbalar, con velocidad

angular ω_0 paralela a la mesa, de manera que $\mathbf{v}_0 = R\omega_0$. Puesto que se tiene una esfera de radio R con densidad uniforme, el espín inicial (momento angular intrínseco) \mathbf{s}_0 estará dado por $\mathbf{s}_0 = I\omega_0$, donde I es el momento de inercia de la esfera.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del problema son

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{F} && \text{(traslación),} \\ \frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \mathbf{N} && \text{(rotación),} \end{aligned} \quad (1)$$

donde \mathbf{P} , \mathbf{J} , \mathbf{F} y \mathbf{N} son el momento lineal, el momento angular, la fuerza externa y la torca externa, respectivamente. Debido a que no se tiene una fuerza externa actuando sobre el sistema, de las ecuaciones anteriores se tiene que

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \quad (3)$$

obteniendo las leyes de conservación para el momento lineal y momento angular. Se han tomado las letras minúsculas para denotar los valores iniciales y las mayúsculas para los valores finales. Además, el índice 1 se refiere a los valores de la bola proyectil y el índice 2 a los valores de la bola blanco. El momento angular de cada bola está formado de dos partes: el momento angular común (momento angular orbital) y el momento angular intrínseco (espín). De esta manera, si se llama $(\mathbf{l}_i, \mathbf{L}_i)$ al momento angular orbital, $(\mathbf{s}_i, \mathbf{S}_i)$ al espín y $(\mathbf{j}_i, \mathbf{J}_i)$ al momento angular total con $i = 1, 2$, se puede escribir la Ec. (3) como

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 &= \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_1 + \mathbf{l}_2 + \mathbf{s}_2, \\ &= \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \\ &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{S}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{S}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Es claro que el momento angular inicial $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0$ siempre es perpendicular a la mesa y tiene una magnitud $l = mbv_0$, con \mathbf{r} la posición de la bola proyectil y b el parámetro de impacto. Por la condición inicial de rodamiento puro, se tiene que $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = 0$, de manera que no se tiene acoplamiento espín-órbita y $j^2 = l^2 + s^2$, de donde se concluye que el momento angular orbital y el del espín se conservan por separado.

Después de la colisión, la bola blanco empezará su movimiento a noventa grados con respecto a la bola proyectil, en el estado de deslizamiento puro, pero posteriormente, al cabo de un tiempo t_s , que es el tiempo que dura la fase de deslizamiento, se establecerá el estado de rodamiento.

El momento angular orbital de la bola blanco siempre es cero ya que se escoge al sistema de coordenadas en la posición inicial de la bola blanco. Por lo tanto, las Ecs. (4) tomarán la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \mathbf{l}_1 + \mathbf{s}_1 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_0 + I\omega_0, & \mathbf{j}_2 &= 0, \\ \mathbf{J}_1 &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{S}_1, & \mathbf{L}_1 &= \mathbf{l}_1, \\ \mathbf{J}_2 &= \mathbf{S}_2, & \mathbf{L}_2 &= 0, \\ \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{S}_1 &= \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{S}_1 = \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{S}_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Para colisiones elásticas, las velocidades de la bola proyectil y de la bola blanco, inmediatamente después de la colisión, están dadas por [4]

$$\begin{aligned} v_{1z} &= v_0 \sin^2 \phi, & v_{2z} &= v_0 \cos^2 \phi, \\ v_{1x} &= v_0 \sin \phi \cos \phi, & v_{2x} &= -v_0 \sin \phi \cos \phi, \end{aligned} \quad (6)$$

referidas al sistema (z, x) mostrado en la Fig. 1.

3. Sección recta diferencial

Para obtener la distribución angular después de la colisión se tiene que encontrar una relación entre el ángulo de dispersión y el parámetro de impacto, y así poder utilizar la definición de la sección recta diferencial. Evidentemente, durante la colisión, el espín inicial debe de conservarse de tal forma que la bola proyectil tiene que desarrollar una velocidad angular alrededor de la dirección del movimiento y otra perpendicular a ésta. Estas velocidades angulares son $\Omega_1 = \omega_0 \cos \phi = v_0 \cos \phi / R$ alrededor de la dirección de movimiento y $\Omega_2 = \omega_0 \sin \phi = v_0 \sin \phi / R$ perpendicular a esta dirección y por consiguiente se tiene que $s_0^2 = I(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$.

Para encontrar la trayectoria de la bola proyectil es más conveniente trabajar en un sistema de referencia (z', x') rotado [5] en sentido horario un ángulo ϕ con respecto al sistema de referencia (z, x) . Las ecuaciones de movimiento correspondientes al sistema rotado se dan en términos de la única

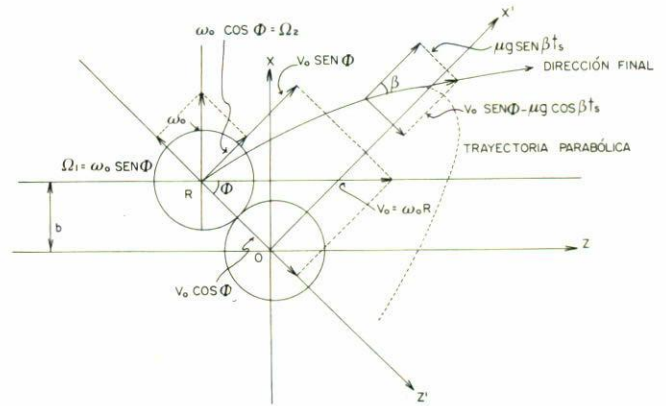


Figure 1. Cinemática de la colisión entre dos bolas de billar. La parábola se completa con la línea punteada. La figura no está hecha a escala.

de la única fuerza presente, la fuerza de fricción en el punto de contacto de la bola proyectil con la mesa. Por lo tanto,

$$\frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \mu m \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{J}'}{dt} = \mathbf{N}' = \mathbf{R} \times (\mu m \mathbf{g}). \quad (7)$$

Puesto que la fuerza es constante en magnitud y dirección es claro que la trayectoria será una parábola. Esta fuerza de fricción actúa en la dirección opuesta al movimiento de deslizamiento con componentes $\mu m g \cos \alpha$ y $\mu m g \sin \alpha$, siendo α el ángulo formado con al eje x' . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v_{z'} &= v_{0z'} t = \mu g \sin \alpha t \\ v_{x'} &= v_{0x'} - \mu g \cos \alpha t = v_1 - \mu g \cos \alpha t, \end{aligned} \quad (8)$$

donde v_1 es la velocidad inicial en la dirección de x' . La fase de deslizamiento desaparece y se establece la fase de rodamiento puro después de un tiempo dado por

$$t_s = \frac{2U}{7\mu g}, \quad (9)$$

donde U^2 , es el cuadrado de la resultante de la velocidad de deslizamiento, igual a $(V_1 - \Omega_1 R)^2 + (\Omega_2 R)^2$. Entonces la bola proyectil se moverá en línea recta tangente a la parábola partiendo del punto en donde comienza la fase de rotación pura. El ángulo de desviación β estará dado por

$$\tan \beta = \frac{\mu g \sin \alpha t_s}{v_1 - \mu g \cos \alpha t_s} = \frac{\frac{2}{7} U \sin \alpha}{v_1 - \frac{2}{7} U \cos \alpha}, \quad (10)$$

y puesto que $U \sin \alpha = \Omega_1 R$ y $U \cos \alpha = V_1 - \Omega_2 R$ se tiene que

$$\tan \beta = \frac{2\Omega_1 R}{5v_1 + 2\Omega_2 R}, \quad (11)$$

pero $\Omega_2 = \omega_0 \cos \phi$ y $\Omega_1 = \omega_0 \sin \phi$, por consiguiente

$$\tan \beta = \frac{2\omega_0 R \cos \phi}{5v_1 + 2\omega_0 R \sin \phi} = \frac{2}{7 \tan \phi}, \quad (12)$$

con $v_1 = v_0 \sin \phi$. Por lo tanto, la desviación de la bola proyectil con respecto a la dirección original es $\pi/2 - \phi - \beta = \theta$,

el cual es el ángulo de dispersión. De forma que la tangente total es [6]

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi - \beta\right) = \tan\theta = \frac{\text{sen}\phi \cos\phi}{\text{sen}^2\phi + 2/5}. \quad (13)$$

Se puede determinar el ángulo de desviación máximo, al encontrar el máximo de la expresión anterior, el cual está dado por

$$\tan\theta_{\text{max}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{7}}, \quad (14)$$

que es aproximadamente igual a 34 grados, por lo que no se encontrarán bolas para ángulos mayores a éste [7].

El ángulo anterior θ es el ángulo de dispersión ya que es la desviación neta de la bola proyectil con respecto a la dirección inicial y ahora se puede utilizar la definición usual de la sección recta. El contacto entre las bolas toma lugar a lo largo de una línea en el ecuador de las bolas. La bola proyectil observa una línea de longitud $2R$ a cada lado de la bola blanco, tal que si el centro de masa de la bola proyectil se mueve dentro de una franja de ancho $4R$ paralela a la mesa y a través del centro de masa de la bola blanco, entonces habrá una colisión. En este caso, la bola proyectil incide en un in-

tervalo db y la sección recta diferencial se definirá de la manera usual. Por lo tanto [8]

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (15)$$

Para calcular esta expresión es necesario tener b en términos de θ . Definiendo

$$x = \text{sen}\phi = \frac{b}{2R}, \quad (1-x^2)^{1/2} = \cos\phi = \frac{a}{2R}, \quad (16)$$

$$4R^2 + b^2 = a^2,$$

y usando (13) se tiene,

$$\tan\theta = \frac{x(1-x^2)^{1/2}}{x^2 + 2/5}, \quad (17)$$

de donde se puede obtener,

$$x^2 = \frac{1 - \frac{4}{5}\tan^2\theta + \sqrt{1 - \frac{56}{25}\tan^2\theta}}{2\sec^2\theta}. \quad (18)$$

El signo menos se eliminó en esta expresión, ya que no da ningún resultado físico. Al utilizar la Ec. (15) se determina que la sección diferencial recta es

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2R \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \text{sen}\theta \left\{ \frac{\frac{4}{5} \left[+ \frac{7}{5\sqrt{1 - \frac{56}{25}\tan^2\theta}} \right] \sec^2\theta + \left[1 - \frac{4}{5}\tan^2\theta + \sqrt{1 - \frac{56}{25}\tan^2\theta} \right]}{1 - \frac{4}{5}\tan^2\theta + \sqrt{1 - \frac{56}{25}\tan^2\theta}} \right\}. \quad (19)$$

La gráfica de esta función se muestra en la Fig. 2. Como se puede observar de la figura la sección recta diferencial es singular para el valor θ_{max} , y para ángulos mayores a este valor no hay partículas, siendo la expresión (19) imaginaria.

4. Observaciones finales

El caso que se trató aquí es sólo una pequeña parte del problema completo. Se han hecho muchas suposiciones, como que las masas sean iguales, el que no haya fricción entre las bolas, que la bola proyectil tenga un movimiento puro de rodamiento, etc. Por ejemplo, si la bola incidente (bola proyectil) incide en el estado de deslizamiento puro o con espín retrógrado, la trayectoria de la bola después del impacto será diferente. Como consecuencia de la condición inicial no se tendrá acoplamiento espín-órbita. Vemos que este problema exhibe varias características que pueden ser muy atractivas al estudiar el problema en forma general.

Se debe de recalcar que la característica de tener una colisión elástica se presenta en el momento del contacto. Des-

pués, la energía no se conserva. Por ejemplo, la bola blanco inicia su movimiento desde el reposo en el estado de deslizamiento puro con velocidad $v_2 = v_0 \cos\phi$ y la energía co-

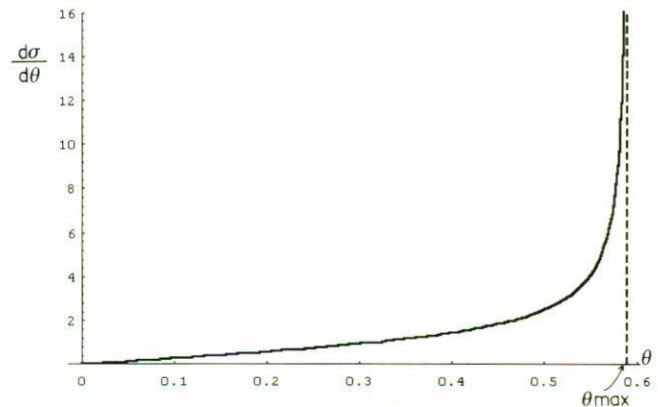


Figure 2. Sección recta transversal para la colisión de dos bolas de billar con radio uno. $\theta_{\text{max}} = 33.74^\circ$.

respondiente E'_0 la cual no se conserva. De esta energía, $(25/49)E'_0$ se convierte en energía translacional, $(10/49)E'_0$ se convierte en energía rotacional y $(2/7)E'_0$ se disipa como calor por fricción con la mesa. Un análisis similar se puede hacer con la bola proyectil después de la colisión.

Agradecimientos

Agradezco al Prof. Carlos Rentería del Departamento de Matemáticas por sus valiosas discusiones y las facilidades prestadas para el uso de computadoras.

-
1. R. Byrne, *Treasury of Trick Shots in Pool and Billiards*, edited by Harcourt Brace Jovanovich, (Pub. New York, 1982).
 2. Mingaud, *The Noble Game of Billiards*, edited by John Thursten, (London, 1830).
 3. G. Coriolis, *Theorie Mathematique des Effets du Jeu de Billiard*, edited by Carilion-Goerrye, (Libraire-Editeur, Paris, 1835).
 4. R. Evans Wallace and M.C. Schroeder, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 815.
 5. D.C. Hopkins and J.D. Patterson, *Am. J. Phys.* **45** (1977) 263.
 6. G.Y. Oneda, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 476.
 7. C.B. Daish, *The Physics of Ball Games*, (English University Press, Ltd, 1972).
 8. V. Barger and M. Olsson, *Classical Mechanics. A Modern Perspective*, (McGraw Hill, New York, 1973).