INVESTIGACIÓN REVISTA MEXICANA DE FÍSICA **44** (2) 120–127 ABRIL 1998

Las ecuaciones diferenciales de campo de la magnetohidrodinámica

Angel Fierros Palacios
Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares

Recibido el 12 de septiembre de 1997; aceptado el 11 de noviembre de 1997

A partir de un formalismo lagrangiano como el de la teoría clásica de campos, se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo de la magnetohidrodinámica (MHD). Se establece una funcional de acción como una integral espacio-temporal sobre una región del espacio euclídeo tridimensional, de una densidad lagrangiana función de ciertas variables de campo. Se postula un principio de acción extremal de tipo Hamilton con condiciones de frontera adecuadas y se logra un sistema de ecuaciones diferenciales de campo. Se propone una densidad lagrangiana apropiada del tipo T-V, con la que se obtiene la ecuación de movimiento para un medio continuo conductor en presencia de un campo magnético. Con un teorema referente a la invariancia de la acción frente a variaciones con respecto al tiempo se obtiene la ecuación de balance de energía para cualquier fluido real conductor que se mueve en un campo magnético. Con la densidad lagrangiana propuesta se alcanza la ley de la conservación de la energía de la MHD. Finalmente, se obtiene una forma explícita para la ecuación de estado generalizada para la MHD.

Descriptores: Magnetohidrodinámica

From the Lagrangian formalism as in classical field theory, the partial differential equations of MHD are obtained. An action functional is introduced as a space-time integral over a region of three-dimentinal Euclidean space of a Lagrangian density function of certain field variables. A Hamilton type extremun action principle is postulated with adequate boundary conditions and a set of differential field equations is derived. With an appropriate Lagrangian density of the T-V type, the equations of motion for a moving conducting media in a magnetic field are obtained. A theorem refering to the invariance of the action under time variations leads to the generalized energy balance equation for any real conducting fluid in a magnetic field and the proper equation of energy conservation. Finally, an explicit form for generalized equation of state of MHD is obtained.

Keywords: MHD

PACS: numbers: 03.40.Gc; 47.10.+g

1. Introduction

El estado dinámico de un fluido conductor en presencia de un campo magnético es un fenómeno complejo que se debe estudiar con el auxilio de las ecuaciones de campo de la electrodinámica clásica y de las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos.

Cuando un fluido conductor se mueve en una región en donde existe un campo magnético, aparecen en él campos eléctricos inducidos que a su vez producen un flujo de corrientes eléctricas. Las fuerzas ejercidas por el campo magnético sobre las corrientes inducidas pueden modificar considerablemente el flujo del fluido y al mismo tiempo, las corrientes modifican el campo [1].

Las ecuaciones del campo electromagnético que se utilizan para estudiar el movimiento de un medio continuo conductor en presencia de un campo magnético son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{H} \tag{2}$$

en donde $\mathbf{H}(x, t)$ es el campo magnético, c la velocidad de la luz, σ la conductividad eléctrica y ∇^2 el operador laplaciano. En esas relaciones se ha considerado que la permeabilidad magnética del medio difiere muy poco de la unidad de modo que $\mu = 1$. También se supone que σ es una constante en el medio y, en particular, que es independiente del campo magnético [1]

Para obtener las ecuaciones diferenciales que describen el estado dinámico del sistema, es necesario tomar en cuenta la irreversibilidad termodinámica del movimiento por el efecto de la disipación de energía debida a procesos de fricción interna (viscosidad) y a la conducción térmica que afectan al movimiento mismo [2].

En un fluido viscoso el mecanismo generador del régimen hidrodinámico es la variación en la densidad del sistema que ocurre cuando hay un cambio en la geometría de la región por él ocupada deformada por algún agente externo. Cuando ocurre la deformación, el sistema es sacado de su estado de equilibrio que no sólo es mecánico sino también térmico. Como consecuencia, surgen esfuerzos internos que tienden a regresarlo a su estado original de equilibrio. Esos esfuerzos internos se deben a fuerzas moleculares de corto alcance que actúan desde cualquier punto del fluido afectando sólo a puntos vecinos. En general, se dice que son fuerzas que actúan sobre la superficie de la región que confina al sistema.

Por otra parte, si el movimiento del fluido es perturbado por el campo magnético externo, el régimen hidrodinámico responsable del flujo debe ser más complejo que en el caso del simple fluido viscoso. Por tanto, es importante determinar en qué forma su presencia modifica las correspondientes ecuaciones de balance.

De alguna manera los fenómenos electromagnéticos se manifiestan en el medio continuo como tensiones de origen magnético, de modo que es posible considerar que el campo externo tiene el efecto de reforzar el proceso de deformación mecánica propiciando el surgimiento de esfuerzos magnéticos internos que se suman a los esfuerzos mecánicos. Para el caso presente, los esfuerzos magnéticos se representan por medio de un tensor de rango dos conocido como el tensor de esfuerzos de Maxwell del campo magnético [1] que en componentes es

$$m_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_j - \frac{1}{2}H^2\delta_{ij}\right) \tag{3}$$

Claramente, se trata de un tensor simétrico es decir, $m_{ij} = m_{ji}$. En la relación anterior, δ_{ij} son las componentes de la delta de Kronecker. En consecuencia, un medio continuo conductor que sufre una deformación mecánica en presencia de un campo magnético externo que lo aparta del equilibrio mecánico y térmico en el que se encuentra inicialmente, generará esfuerzos internos de origen mecánico y magnético que se opondrán al cambio y tratarán de regresarlo a su situación original equilibrada. Tales esfuerzos se pueden representar por medio de un tensor de rango dos cuyas componentes son

$$\sigma^o{}_{ij} = \sigma_{ij} + m_{ij}, \tag{4}$$

tal que

$$\sigma^o{}_{ij} = \sigma^o{}_{ji}. \tag{5}$$

A $\tilde{\sigma}^o(\mathbf{x}, t)$ se le denominará el tensor de esfuerzos generalizado, en tanto que $\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ es el tensor de esfuerzos mecánicos del fluido viscoso newtoneano [2].

Si las deformaciones mecánicas sufridas por el fluido son pequeñas las variaciones del vector desplazamiento [3] son infinitesimales, de modo que los esfuerzos internos realizan el trabajo

$$dw' = -\sigma^o{}_{ij}\Delta u_{ij} \tag{6}$$

En (6)

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

son las componentes del tensor de deformaciones pequeñas [2], en tanto que

$$u_i = x_i' - x_i \tag{8}$$

son las componentes del vector desplazamiento, que solo depende de las coordenadas [3].

Es común suponer que la deformación ocurre tan lentamente que el equilibrio termodinámico se establece en el sistema en cada instante de acuerdo con las condiciones externas, de modo que el proceso es termodinámicamente reversible. Esta hipótesis siempre se justifica en la práctica [3].

Debido a la deformación la energía interna específica del sistema cambia. A una variación infinitesimal de ella le corresponde una diferencia entre la cantidad de calor adquirida y el trabajo hecho por los esfuerzos internos. Es decir, $d\varepsilon' = Tds - dw'$ y, de acuerdo con (6),

$$d\varepsilon' = Tds + \sigma^o_{ij}\, du_{ij} \tag{9}$$

En este caso, ε' es la energía interna específica generalizada del sistema, s es la entropía específica y T la temperatura. Claramente ε' debe depender de alguna forma del campo magnético externo. En general,

$$\varepsilon' = \varepsilon + f(\mathbf{H}),$$

en donde $\varepsilon(u_{ij})$ es la energía interna específica de la hidrodinámica clásica [2]. Para averiguar la forma de $f(\mathbf{H})$ es preciso calcular el cambio en ε' debido a la presencia en el sistema del campo magnético externo. Sin embargo, se debe tomar en cuenta el hecho que el mencionado campo no realiza trabajo alguno sobre el fluido conductor móvil debido a que la fuerza magnética que actúa sobre él es perpendicular al campo de velocidades. Entonces, para calcular el cambio en la energía interna específica generalizada es necesario examinar de cerca los campos eléctricos inducidos por el cambio en el campo magnético y determinar el trabajo hecho por esos campos sobre las corrientes que producen el campo magnético externo [1]. Así, se debe usar la siguiente ecuación que relaciona a los campo eléctrico y magnético variables [1]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}, \tag{10}$$

en donde $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ es el campo eléctrico inducido y en general, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ el campo magnético promedio usualmente llamado la inducción magnética [1].

Durante un intervalo temporal Δt, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ realiza el trabajo $\Delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV$ sobre la corriente de conducción $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$. Esa cantidad con signo opuesto es el trabajo Δw^o hecho sobre el campo magnético externo por la fuerza electromotriz externa que mantiene las corrientes [1]. Ahora, y dado que la corriente de conducción es

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{H}, \tag{10a}$$

es claro que

$$\Delta w^o = -\frac{\Delta t c}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}\, dV.$$

Del análisis vectorial se tiene que

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}, \tag{10b}$$

entonces

$$\Delta w^o = \frac{\Delta tc}{4\pi}\int \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV - \frac{\Delta tc}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}\,dV.$$

La primera integral es cero cuando se le transforma en una integral sobre una superficie infinitamente distante debido a que el campo electromagnético es cero en el infinito. En la segunda integral se puede sustituir $\nabla\times\mathbf{E}$ de (10) y escribir

$$\Delta\mathbf{B} = \Delta t\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

para un cambio temporal en la inducción magnética, de modo que

$$\Delta w^o = \int\frac{\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{B}}{4\pi}\,dV,$$

es el trabajo realizado para un cambio infinitesimal en $\mathbf{B}$. Así, el cambio en la energía interna específica debido a la presencia del campo magnético se puede escribir como

$$\Delta\varepsilon^o = \int\frac{\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{B}}{4\pi}\,dV,$$

En consecuencia, para un fluido conductor que se mueve en presencia de un campo magnético externo la energía interna específica generalizada debe contener un término adicional para tomar en cuenta a dicho campo, es decir, $f(\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/4\pi\rho$, de modo que

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{4\pi\rho}. \tag{11}$$

Es claro que si el campo magnético no está presente la relación (9) se reduce a la identidad termodinámica para la deformación [3]

$$d\varepsilon = T\,ds + \sigma_{ij}\,du_{ij}.$$

Se puede demostrar [2] que para compresión hidrostática el tensor de esfuerzos es simplemente

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij},$$

en donde $p(\mathbf{x},t)$ es la presión. En tal caso la identidad termodinámica toma la forma usual

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV,$$

con dV el cambio en el volumen.

Finalmente, es fácil ver que para un medio continuo conductor en presencia de un campo magnético

$$\varepsilon' = \varepsilon'(s, u_{ij}, B_j), \tag{12}$$

por lo cual:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial s}\right)_{u_{ij},B_j} = T, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial u_{ij}}\right)_{s,B_j} = \sigma^o{}_{ij}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial B_j}\right)_{s,u_{ij}} = \frac{H_j}{4\pi\rho}. \tag{15}$$

2. El principio tipo Hamilton y las ecuaciones diferenciales de campo de la magnetohidrodinámica

Para el fluido real conductor en presencia de un campo magnético se propone una densidad lagrangiana como una función continua y con derivadas continuas hasta de tercer orden en sus argumentos

$$\ell = \ell(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{B}, t), \tag{16}$$

tal que la integral de ℓ sobre una región R del espacio euclídeo tridimensional corresponde a la lagrangiana clásica:

$$L = \int_R \ell\,dV; \tag{17}$$

donde dV es el elemento de volumen en la región R. Se define la acción como es usual, es decir

$$W = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \ell\,dV\,dt. \tag{18}$$

El principio variacional tipo Hamilton propone que la funcional de acción sea invariante frente a una variación continua e infinitesimal, esto es,

$$\delta W = 0. \tag{19}$$

Como resultado de la variación de la acción se obtienen las ecuaciones diferenciales de campo. Sea

$$\ell = \rho\lambda, \tag{20}$$

con λ la lagrangiana específica del sistema tal que

$$\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{B}, t). \tag{21}$$

De acuerdo con la definición usual de las variaciones geométricas [4] $\delta t = 0$ para toda t. Adicionalmente, se considera la siguiente condición de frontera [4];

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0. \tag{22}$$

Se puede demostrar que la variación de la integral de acción (18) sujeta a la condición (19) conduce a la siguiente relación [2]:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\,\delta\lambda\,dV\,dt = 0, \tag{23}$$

Ahora, y de acuerdo con (21),

$$\rho\delta\lambda = \rho\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\delta v^i + \frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij} + \frac{\partial\lambda}{\partial B_j}\delta B_j\right). \tag{24}$$

Sin embargo, δB_j se anula porque

$$\delta B_j(\mathbf{x},t) = \left(\frac{\partial B_j}{\partial t} + \frac{\partial B_j}{\partial x^i}v^i\right)\delta t = 0, \tag{25}$$

de modo que la relación (24) se reduce a los tres primeros términos. Esto es debido que $\delta t = 0$ para toda t, porque el tiempo y el conjunto de parámetros geométricos son independientes entre sí.

Por otra parte, se puede demostrar que [2]

$$\delta v^i = \frac{d}{dt}(\delta x^i), \tag{26a}$$

y

$$\delta u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(u_{ik}\delta x^k). \tag{26b}$$

Si se sustituyen (26a) y (26b) en (24) y se toma en cuenta (25) se obtiene lo siguiente:

$$\rho\delta\lambda = \left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right)\right]\delta x^i + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\delta x^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}u_{ik}\delta x^k\right), \tag{27a}$$

en donde se ha usado el siguiente resultado:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right)u_{nn} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}u_{nn}\right) - \left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right)\frac{\partial u_{nn}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right), \tag{27b}$$

y el hecho que [3] $u_{nn} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$ es la traza del tensor de deformaciones pequeñas. Es un invariante en cualquier sistema de coordenadas. Supóngase que $\partial u_{nn}/\partial \mathbf{x} = 0$. Dado que las deformaciones son pequeñas [2]

$$u_{nn} \approx \frac{1}{\rho}. \tag{27c}$$

Ahora se puede demostrar que [2]

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \frac{d}{dt}\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\delta x^i\right] dV\,dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_R\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\right)\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta x^i\,dV\,dt. \tag{28a}$$

Además,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}u_{ik}\delta x^k\right] dV\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\oint_S \rho\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\,u_{ik}\,\delta x^k\,da_j\,dt, \tag{28b}$$

en donde $d\mathbf{a}$ es el elemento de superficie y se ha utilizado el teorema de Green. Si se considera un medio continuo infinito que no esté deformado en el infinito, se puede hacer que la superficie de integración se extienda hasta el infinito [3]. Entonces, el tensor $\partial\lambda/\partial u_{ij} = 0$ sobre la superficie y la integral es cero [2]. Así, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R\left[\rho\frac{\partial\lambda}{\partial x^i} - \mathcal{D}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right)\right]\delta x^i\,dV\,dt = 0, \tag{29}$$

Para que la ecuación anterior se satisfaga es necesario que [2]

$$\mathcal{D}\left(\rho\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\right) - \rho\frac{\partial\lambda}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right) = 0. \tag{30}$$

Ésta es la ecuación de balance de momento generalizada para un fluido real conductor que se mueve en presencia de un campo magnético. En ella $\mathcal{D}$ es el operador diferencial de Reynolds [2]. Es una ecuación vectorial para una lagrangiana específica cuya dependencia funcional está dada en (21), en donde aparece la contribución del campo magnético externo. Con el auxilio de la definición del operador diferencial de Reynolds, se puede desarrollar el término $\mathcal{D}(\rho\partial\lambda/\partial v^i)$ en (30) para obtener las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange de la MHD

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial v^i}\right] - \frac{\partial\lambda}{\partial x^i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}\right] = 0. \tag{31}$$

Claramente, la Ec. (31) tiene la misma forma que para el fluido viscoso newtoniano [2]. En consecuencia y dado que la diferencia entre ambos casos radica en la funcionalidad de las correspondientes lagrangianas, el efecto del campo magnético externo se va a sentir en la forma del tensor de esfuerzos generalizado y en la expresión para la energía interna específica generalizada, como es fácil convencerse de las relaciones (4) y (11).

3. Las variaciones temporales y la ecuación de balance de energía generalizada de la magnetohidrodinámica

Si a la funcional de acción para cualquier fluido conductor que se mueve en presencia de un campo magnético se le somete a un proceso variacional con respecto al parámetro de evolución, se puede demostrar que es invariante frente a transformaciones temporales continuas [4]. Considérese la integral de acción (18) sujeta a una variación temporal de modo que tanto las entidades cinemáticas como las funciones de campo contenidas en ella experimenten cambios infinitesimales. Como consecuencia de tal proceso, se demuestra que la funcional de acción es una invariante [4], es decir

$$\delta^+ W = 0 \tag{32}$$

De acuerdo con la definición de variación temporal [4] se puede demostrar que [2]

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\delta^+\ell - \frac{d\ell}{dt}\delta^+ t\right] dV\, dt = 0. \tag{33}$$

De acuerdo con la funcionalidad de ℓ, se tiene que

$$\delta^+\ell = \frac{\partial \ell}{\partial x^i}\delta^+ x^i + \frac{\partial \ell}{\partial v^i}\delta^+ v^i + \frac{\partial \ell}{\partial u_{ij}}\delta^+ u_{ij} + \frac{\partial \ell}{\partial B_j}\delta^+ B_j + \frac{\partial \ell}{\partial t}\delta^+ t. \tag{34}$$

Si se realiza el proceso de variación, se puede demostrar que [2]

$$\begin{aligned}\delta^+\ell = &\left[\rho\frac{\partial \lambda}{\partial x^i} - \mathcal{D}\left(\rho\frac{\partial \lambda}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}}\right)\right] v^i\,\delta^+ t \\ &+ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \ell}{\partial v^i}v^i\right) + \left(\frac{\partial \ell}{\partial v^i}v^i - \ell\right)\nabla\cdot\mathbf{v}\right]\delta^+ t \\ &+ \left[\rho\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}}v^i\right)\right]\delta^+ t + \frac{\partial \ell}{\partial B_j}\delta^+ B_j.\end{aligned} \tag{35}$$

Por otra parte [1],

$$\frac{\partial \ell}{\partial B_j}\delta^+ B_j = \delta^+ B_j = -\frac{\mathbf{H}}{4\pi}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}\delta^+ t. \tag{36}$$

Considérense ahora las relaciones (10) y (10b). Como para el caso presente no existen corrientes de conduccion [1] solo campos eléctricos inducidos, la ecuación de campo (10a) se reduce a $\nabla\times\mathbf{H} = 0$. Entonces, en (36) se tiene que

$$\frac{\partial \ell}{\partial B_j}\delta^+ B_j = \nabla\cdot\mathbf{S}\,\delta^+ t, \tag{37}$$

en donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \tag{38}$$

es el vector de Poynting [5].

Si se usa (37) en (35) y el resultado se sustituye en (33) se obtiene lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\mathcal{D}\mathcal{H} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}}v^i + S_j\right) + \rho\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right]\delta^+ t\, dV\, dt = 0, \tag{39}$$

debido a que el primer paréntesis cuadrado de (35) es cero porque se trata de la ecuación de balance de momento generalizada de la MHD. Si se invoca a la arbitrariedad tanto de los incrementos dV y dt como de la variación temporal $\delta^+ t$, la ecuación anterior sólo se satisface si

$$\mathcal{D}\mathcal{H} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_{ij}}v^i + S_j\right) + \rho\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0. \tag{40}$$

Ésta es la ecuación de balance de energía generalizada para un fluido conductor cualquiera que se mueve en una región R del espacio euclídeo tridimensional en donde existe un campo magnético. En ella

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \ell}{\partial v^i}v^i - \ell, \tag{41}$$

es la densidad hamiltoniana [2].

4. Las ecuaciones de movimiento de la MHD

Para obtener las ecuaciones de movimiento para un fluido real conductor que se mueve en presencia de un campo magnético se propone la siguiente densidad lagrangiana

$$\ell = \frac{1}{2}\rho v^2 - \rho\varepsilon', \tag{42}$$

en donde

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi\rho} \tag{43}$$

es la energía interna específica generalizada del sistema que toma en cuenta la presencia del campo magnético. Aquí, $\varepsilon(u_{ij})$ es la energía interna específica del fluido cuando $\mathbf{H}$ es nulo. Además, $\frac{1}{2}\rho v^2$ es la densidad de energía cinética y $\rho\varepsilon'$ la densidad de energía potencial. Por comodidad se está suponiendo que la fuerza externa

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \tag{44}$$

es cero para que la densidad lagrangiana sólo contenga términos hidrodinámicos y sea de la forma $t - u$, con t y u las densidades de energía cinética y potencial respectivamente [2]. En (44), $\phi(\mathbf{x})$ es algún potencial conservativo que solo depende de la posición. De acuerdo con (20), la lagrangiana especifica tiene la forma siguiente: .

$$\lambda = \frac{1}{2}v^2 - \varepsilon'. \tag{45}$$

Si se sustituye (45) en (30) y se toma en cuenta la relación (14), se obtiene que

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = \frac{\partial \sigma^o_{ij}}{\partial x^j}, \tag{46}$$

en donde σ^o_{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos generalizado, cuya forma es la siguiente:

$$\sigma^o_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} - C\delta_{ij} + \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_j - \frac{1}{2}H^2\delta_{ij}\right), \tag{47}$$

en donde se ha usado la relación (3), $C(T)$ es una constante que depende de la diferencia de temperaturas entre diferentes partes del fluido y σ'_{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos viscosos, cuya forma mas general es la siguiente [2]:

$$\sigma'_{ij} = \eta\left[\frac{\partial v^i}{\partial x_j} + \frac{\partial v^j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v^n}{\partial x_n}\right] + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial v^n}{\partial x_n}, \tag{48}$$

en donde η y ζ son los coeficientes de viscosidad, que en general son funciones de la presión y de la temperatura. Sin embargo, para muchos casos prácticos se les puede considerar como constantes. Así,

$$\frac{\partial \sigma^o_{ij}}{\partial x^j} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{4\pi}\left[H_i \nabla \cdot \mathbf{H} + (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} - \frac{1}{2}\nabla H^2\right].$$

Sin embargo, y de acuerdo con (1), $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$; además,

$$(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} - \frac{1}{2}\nabla H^2 = -\mathbf{H} \times \nabla \times \mathbf{H}, \tag{49}$$

En ese caso en (46) se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H}\times\nabla\times\mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}). \tag{50}$$

Éstas son las ecuaciones de movimiento de la MHD.

Si el fluido es incompresible, la densidad es una constante de modo que $d\rho/dt = 0$ y de la ecuación de continuidad [8] se obtiene que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. En ese caso y de acuerdo con (49)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}\,\vartheta\,\nabla^2\,\mathbf{v}. \tag{51}$$

Éstas son las correspondientes ecuaciones de Navier-Stokes de la MDH. Aquí ϑ es la viscosidad cinemática [8] y $H^2/8\pi$ la presión hidrostática magnética [1].

5. La ecuación de conservación de la energía de la MHD

Si en la Ec. (41) se sustituye la densidad lagrangiana (42) se obtiene la siguiente forma explícita para la densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}, \tag{52}$$

Por otra parte, y de acuerdo con la definición del operador $\mathcal{D}$, se tiene que

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}\right] + \nabla\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi\rho}\right)\right]; \tag{53}$$

además,

$$-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}v^i\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial u_{ij}}v^i\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}\left[p\mathbf{v} + C\mathbf{v} - \sigma'_{ij}v^i - \frac{1}{4\pi}\left(H_iH_jv^i - \frac{1}{2}H^2\right)\mathbf{v}\right]. \tag{54}$$

Sin embargo,

$$\frac{1}{4\pi}\left(H_iH_jv^i - \frac{1}{2}H^2\mathbf{v}\right) = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \tag{55}$$

en cuyo caso

$$-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_{ij}}v^i\right) = -\frac{\partial}{\partial x^j}\left[p\mathbf{v} + C\mathbf{v} - \sigma'_{ij}v^i + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\right]. \tag{56}$$

Sea $C\mathbf{v}$ la densidad vectorial de flujo de calor debido a la conducción térmica. Este vector está relacionado con la variación de la temperatura a través del fluido. Toma en consideración la transferencia directa de energía molecular desde aquellas partes del fluido donde la temperatura es alta a regiones donde T es baja [2]. Este flujo de calor está relacionado con la temperatura a través de la ley de Fourier [9]

$$C\mathbf{v} = -\kappa\nabla T, \tag{57}$$

en donde κ es la conductividad térmica que siempre es positiva debido a que la energía térmica fluye de regiones con altas temperaturas a partes del sistema que tienen temperaturas bajas; es decir $C\mathbf{v}$ y ∇T apuntan en direcciones opuestas.

Por otra parte y dado que para un medio conductor en presencia de un campo magnético [1]

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}\nabla\times\mathbf{H}, \tag{58}$$

entonces en (40) se tiene que

$$\mathbf{S} = -\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\mathbf{H}\times(\nabla\times\mathbf{H}). \tag{59}$$

Como es bien sabido, la ley de la conservación de la energía es una consecuencia de la uniformidad en el tiempo. Se dice que un sistema físico es conservativo si su lagrangiana no depende explícitamente del tiempo. En el caso presente, lo anterior significa que $\partial\lambda/\partial t = 0$. Entonces y con todos los resultados anteriores en (40) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\varepsilon+\frac{H^2}{8\pi}\right]=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h'\right)+\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H})-\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\mathbf{H}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})-\mathbf{v}\cdot\bar{\sigma}'-\kappa\boldsymbol{\nabla}T\right]. \quad (60)$$

Ésta es la ley de la conservación de la energía de la MHD [8], en ella

$$\mathbf{h}'=\varepsilon'+\frac{p}{\rho} \quad (61)$$

es la entalpía específica generalizada.

A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes de la MDH y de la ecuación de continuidad se puede transformar por medio de un cálculo directo la ecuación anterior para darle una forma más conveniente. En efecto se puede demostrar [8] que la Ec. (60) es totalmente equivalente a la siguiente relación [2]:

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}s\right]=\sigma'_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{\nabla}T)+\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})^2. \quad (62)$$

Ésta es la ecuación general de transferencia de calor de la MHD, en donde

$$\frac{j^2}{\sigma}=\frac{c}{16\pi^2\sigma}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H})^2, \quad (63)$$

es el calor de Joule por unidad de volumen [1].

6. La ecuación de estado generalizada

Para completar el sistema de ecuaciones de la MHD se requiere de la ecuación térmica de estado que relaciona la presión, la densidad y la temperatura del fluido. De acuerdo con las condiciones físicas del fenómeno la presencia del campo magnético externo debe modificar substancialmente esa relación de modo que sea

$$p=p(\rho,T,\mathbf{H}) \quad (64)$$

la forma funcional de la ecuación térmica de estado para el problema. La diferencial total de esa expresión está dada por

$$dp=c_o^2d\rho+\frac{\beta}{k}dT+\frac{\mathbf{H}}{4\pi}\cdot d\mathbf{H} \quad (65)$$

en donde

$$c_o^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,H}, \quad (66)$$

es la velocidad del sonido en el medio;

$$\frac{\beta}{k}=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho,H} \quad (67)$$

con

$$\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) \quad (68)$$

el coeficiente de expansión volumétrica [11] y

$$k=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) \quad (69)$$

la compresibilidad isotérmica que siempre es positiva [11]. Por otra parte,

$$\frac{\mathbf{H}}{4\pi}\equiv\left(\frac{\partial p}{\partial\mathbf{H}}\right)_{\rho,T}. \quad (70)$$

Ahora, es claro que

$$\frac{\mathbf{H}}{4\pi}\cdot d\mathbf{H}=d\left(\frac{H^2}{8\pi}\right) \quad (71)$$

Con el auxilio de estos resultados se puede integrar la Ec. (65) de modo que

$$p=c_o^2\rho+\frac{\beta}{k}T+\frac{H^2}{8\pi}, \quad (72)$$

Si aquí se utiliza la ecuación escalar para la densidad de masa [6] se obtiene finalmente

$$p=\frac{c_o^2\rho_o}{J}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}J+\frac{\beta}{k}T+\frac{H^2}{8\pi}, \quad (73)$$

Ésta es la forma explícita de la ecuación térmica de estado generalizada de la MHD.

7. Conclusiones

Con el presente trabajo se logra hacer de la MHD una rama de la mécanica analítica de Lagrange. El marco teórico utilizado es el mismo que se ha usado a lo largo de toda la serie de trabajos publicados por el autor en el campo de la dinámica de los fluidos.

La utilización del principio de acción extremal de tipo Hamilton permite la obtención del conjunto completo de ecuaciones diferenciales de campo de la MHD así como la ecuación térmica de estado generalizada. Adicionalmente, se cuenta con la ecuación de continuidad como una condición extra que se impone al sistema para tomar en cuenta la ley de la conservación de la masa [6].

1. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, (Addison-Wesley Publishing Co., 1960).
2. A. Fierros Palacios, *Rev. Mex. Fís.* **38** (1992) 518.
3. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, (Addison-Wesley Publishing Co., 1959).
4. F. Viniegra, A. Salcido y A. Fierros, "Las Ecuaciones de Balance de un Fluido Perfecto a partir de un Principio Variacional Tipo Hamilton", *Rev. del IMP* **XVI**, núm. 1 (enero, 1984).
5. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, Inc. New York, London, 1962).
6. A. Fierros, "La Ecuación de Campo para la Densidad de Masa", *Rev. del IMP* **XXVI**, núm. 1 (enero-junio, 1994).
7. A. Fierros, "El Principio Variacional Tipo Hamilton y las Ecuaciones de Balance de la Dinámica de los Fluidos", *Rev. del IMP* **XXIV**, núm. 3 (julio-septiembre, 1992).
8. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Co., 1959).
9. R. Meyer, *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*, (Wiley-Interscience, 1971).
10. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, (Addison-Wesley Publishing Co., 1979).
11. M.W. Zemansky y R.H. Dittman, *Calor y Termodinámica*, Sexta edición (McGraw-Hill, 1990).