¿Podemos aprender algo nuevo con la máquina de Atwood?

Raúl W. Gómez González
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
Circuito Exterior, CU, 04510 México, D.F., Mexico

Recibido el 29 de mayo de 1997; aceptado el 5 de noviembre de 1997

Se presenta una solución simple al problema de la máquina de Atwood (MA), con la cual se puede abordar cualquier MA, por compleja que ésta sea. Los conceptos que intervienen en la solución son: la segunda ley de Newton, la masa reducida y transformaciones entre referenciales inerciales y no inerciales

Keywords: Classical mechanics, reduced mass, inertial frames of reference

A simple solution for the Atwood's machine (AM) problem is presented, which allows to resolve any AM, notwithstanding its complexity. The conceptual background needed in the solution comprises Newton's second law, reduced mass and inertial to non inertial frames of reference transformations.

Descriptores: Mecánica clásica, masa reducida, sistemas de referencia inerciales

PACS: 01.55.+b

1. Introdución

Una de las formas más adecuadas para realizar experimentos en los cuales la aceleración permanece constante, es utilizando la máquina que el reverendo George Atwood describió en una publicacin de 1784 [1]. De hecho, en un artculo de T.B. Greenslade [2] se aborda este problema, tratando de mantener, hasta donde le es posible, la "tecnología" de la época de Atwood. En este trabajo se presenta una solución teórica simple al problema, con la cual se puede abordar cualquier máquina de Atwood (MA), por complicada que ésta sea. La motivación principal radica en el hecho de que la mayoría de los textos [3–6] sólo tratan este problema en forma elemental; es decir, la MA simple con poleas sin masa. Aun los textos avanzados [7–11] sólo abordan la solución de la MA compuesta para ejemplificar la utilización del método de Lagrange, produciendo la sensación de que resolverla de otra manera resultaría demasiado complicado. Una excepción la constituye el texto del profesor J.B. de Oyarzábal [12], aunque para poder resolver la MA compuesta "a la Newton", requiere que la polea móvil tenga masa.

El artículo está organizado de la manera siguiente: En la Sec. 2 se hace un repaso del problema de la MA simple y al final de esa sección se introduce la idea que permitirá abordar después cualquier otra máquina. En la Sec. 3 se plantea el problema de la MA simple tirada hacia arriba por una fuerza constante, para pasar, en las Secs. 4 y 5 al análisis de la MA compuesta y "supercompuesta" con poleas sin masa. Por último, en el Apéndice se retoman las Secs. 4 y 5 para los casos en que las poleas tengan masa.

2. La máquina de Atwood simple

En la Fig. 1a se ilustra esquemáticamente la MA simple, la cual consta de una polea ligera, cuya masa puede ignorarse, y cuyo eje no tiene fricción. A través de la polea pasa una cuerda inextensible sin masa, en cuyos extremos están sujetos dos cuerpos de masas m_1 y m_2. En la figura se ilustran las diferentes fuerzas que actúan sobre los cuerpos, incluyendo las tensiones sobre diferentes secciones de la cuerda y, como ésta es inextensible, la magnitud a de la aceleración de cada uno de los cuerpos suspendidos será la misma.

De la aplicación de la segunda ley de Newton se llega a que la aceleración del sistema es

$$\mathbf{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{g}. \tag{1}$$

El sentido del movimiento queda determinado por la magnitud relativa de m_1 y m_2, de tal forma que, a partir de este momento, sólo se considerarán las magnitudes de las aceleraciones de los diferentes cuerpos, tomando en cuenta el sentido de sus movimientos.

Una vez determinada la aceleración a, la aplicación de la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos permite calcular la magnitud de las tensiones en la cuerda. El resultado es que

$$T_1' = m_1(g-a) = 2\mu g = T_2', \tag{2}$$

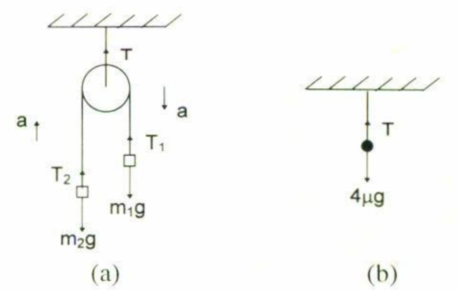
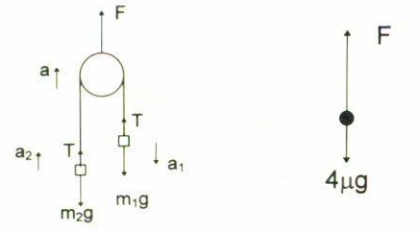


FIGURA 1. (a) La máquina de Atwood simple y (b) su equivalente estático.



(a) (b)

FIGURA 2. (a) La máquina de Atwood simple tirada hacia arriba por una fuerza F constante y (b) su equivalente.

en donde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

es la masa reducida asociada a los cuerpos en movimiento.

De este resultado surge la idea que permitirá resolver el problema general de la MA. Como la polea no sufre traslación alguna, la tensión de la cuerda que la sujeta (cuerda soporte) es $T = 2T'_{i,j} = 4\mu g$, así que, estáticamente, el problema se reduce al mostrado en la Fig. 1b. Aunque se trata de un resultado bien conocido [13], y hasta trivial, ninguno de los textos consultados lo utiliza.

3. La máquina de Atwood tirada por una fuerza

Para ver la utilidad de esta idea simple, consideremos el problema de la MA tirada hacia arriba por una fuerza F (Fig. 2a). Todo profesor que haya impartido el tema sabe que este problema es uno de los "toritos" para medir qué tanto han entendido los alumnos. El problema se puede resolver de manera simple si la situación original se cambia por otra, lo cual se ilustra en la Fig. 2b. En este caso,

$$F - 4\mu g = 4\mu a, \tag{4}$$

así que la aceleración a de la polea es

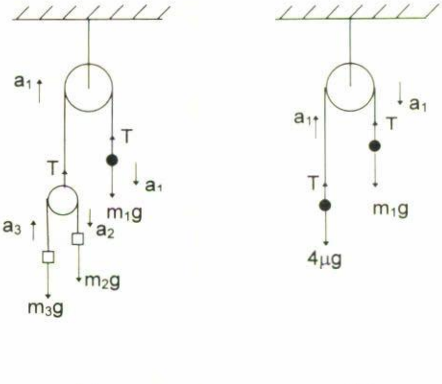
$$a = \frac{F}{4\mu} - g. \tag{5}$$

Para obtener las aceleraciones a_1 y a_2 de los cuerpos (en el referencial del laboratorio), primero se calcula la aceleración α del sistema en un referencial que se mueva con la aceleración a de la polea; recordando que en un referencial acelerado hay que sumar una fuerza inercial ("ficticia") proporcional a la aceleración del referencial, se obtiene:

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{F}{4\mu}\right) \tag{6}$$

y después se hace la transformación a un sistema inercial (sistema del laboratorio) para obtener:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha - a \\ &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{F}{4\mu}\right) - \left(\frac{F}{4\mu} - g\right) \\ &= g - \frac{F}{2m_1} \end{aligned} \tag{7}$$



(a) (b)

FIGURA 3. (a) La máquina de Atwood compuesta con polea sin masa y (b) su equivalente.

y

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha + a \\ &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{F}{4\mu}\right) + \left(\frac{F}{4\mu} - g\right) \\ &= \frac{F}{2m_1} - g \end{aligned} \tag{8}$$

El resultado contenido en estas dos últimas ecuaciones es interesante, pues inmediatamente hace ver que la tensión en la cuerda que pasa sobre la polea es $F/2$. De hecho, una vez que se establece este resultado, el cálculo de a_1 y a_2 es bastante trivial.

4. La máquina de Atwood compuesta

Siguiendo con la misma idea, el problema de la MA compuesta (Fig. 3a) se cambia por el ilustrado en la Fig. 3b, el cual ya fue resuelto, así que la aceleracin a de la polea móvil y de la masa m_1 es

$$a_1 = \left(\frac{m_1 - 4\mu}{m_1 + 4\mu}\right) g = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_1 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g, \tag{9}$$

porque, en este caso,

$$\mu = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}. \tag{10}$$

Para obtener la aceleración de las masas m_2 y m_3, observamos su movimiento desde un sistema acelerado con la aceleración a_1 recién calculada. Pero esto ya se calculó previamente, así que podemos escribir

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}(g + a_1) \\ &= \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)\left(\frac{2m_1}{m_1 + 4\mu}\right) g, \end{aligned} \tag{11}$$

en donde α es la aceleración de cada uno de los cuerpos en el sistema acelerado, y entonces calculamos a_2 y a_3 desde el sistema laboratorio:

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha - a_1 \\ &= \left[\left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)\left(\frac{2m_1}{m_1 + 4\mu}\right) - \left(\frac{m_1 - 4\mu}{m_1 + 4\mu}\right)\right] g \\ &= \frac{m_1(m_2 - 3m_3) + 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g. \end{aligned} \tag{12}$$

y

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha + a_1 \\ &= \left[\left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right)\left(\frac{2m_1}{m_1 + 4\mu}\right) + \left(\frac{m_1 - 4\mu}{m_1 + 4\mu}\right)\right] g \\ &= \frac{m_1(3m_2 - m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3} g. \end{aligned} \tag{13}$$

Desde luego, este resultado también se puede obtener si se utiliza el resultado de la Sec. 3 para la polea móvil tirada hacia arriba por una fuerza

$$F = T = \frac{8m_1\mu}{m_1 + 4\mu}.$$

5. La máquina de Atwood supercompuesta

Una vez establecido el método, podemos generalizarlo a cualquier MA. Como ejemplo, consideremos la máquina mostrada en la Fig. 4a, la cual se reduce al problema de la MA simple, tal como se indica en la parte b de la misma figura. Entonces, la aceleración a de las poleas será:

$$a = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} g. \tag{14}$$

Las aceleraciones α_1 de m_1 y m_2 se calculan primero en el referencial acelerado:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)(g - a) \\ &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) g \end{aligned} \tag{15}$$

y después en el referencial del laboratorio,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 - a \\ &= \frac{g}{\mu_1 + \mu_2}\left[\frac{\mu_2(3m_1 - m_2) - \mu_1(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

y

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha_1 + a \\ &= \frac{g}{\mu_1 + \mu_2}\left[\frac{\mu_2(m_1 - 3m_2) + \mu_1(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

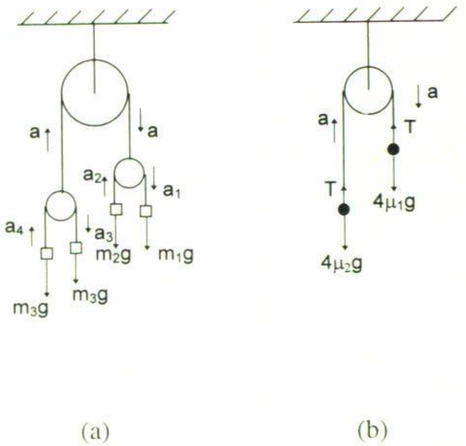


FIGURA 4. (a) La máquina de Atwood "supercompuesta" y (b) su equivalente.

Análogamente se calcula α_2:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \left(\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4}\right)(g - a) \\ &= \left(\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4}\right)\left(\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right) g \end{aligned} \tag{18}$$

y después a_3 y a_4:

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha_2 + a \\ &= \frac{g}{\mu_1 + \mu_2}\left[\frac{\mu_1(3m_3 - m_4) - \mu_2(m_3 + m_4)}{m_3 + m_4}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

y

$$\begin{aligned} a_4 &= \alpha_2 - a \\ &= \frac{g}{\mu_1 + \mu_2}\left[\frac{\mu_1(m_3 - 3m_4) - \mu_2(m_3 + m_4)}{m_3 + m_4}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

6. Conclusiones

Se ha presentado un método simple para resolver cualquier MA, por complicada que ésta sea. Considero que esta solución tiene interés didáctico, ya que, además de ser novedosa, es lo suficientemente simple como para que el problema general de la MA pueda ser abordado aun en los cursos elementales, logrando la confluencia de varios temas que normalmente se ven en forma aislada (sistemas de referencia acelerados, fuerzas de tensión y su papel en los movimientos, principio de D'Alembert, etc.). Siguiendo la tónica de la Ref. 2, los resultados obtenidos, principalmente los relacionados con las tensiones de las cuerdas, pueden corroborarse en forma experimental. Por otra parte, como ya se dijo, ninguno de los textos consultados hace un tratamiento del problema general.

Apéndice

En este apéndice presento los resultados de las secciones anteriores para los casos en que las poleas tienen masa.

En el caso de la MA simple con una polea cilíndrica de masa M, la aceleración de las masas m_1 y m_2 queda determinada por [14]

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g, \tag{A1}$$

así que la segunda ley de Newton aplicada a cada uno de los cuerpos conduce a

$$T_1 = m_1(g - a) = m_1 g \left(\frac{2m_2 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2} \right) \tag{A2}$$

y

$$T_2 = m_2(g + a) = m_2 g \left(\frac{2m_1 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2} \right). \tag{A3}$$

Resulta claro que, en este caso, $T_1 \neq T_2$. La tensión de la cuerda soporte es entonces

$$T = T_1 + T_2 = \frac{2m_1 m_2 + (m_1 + m_2)M/2}{m_1 + m_2 + M/2} g = \mu' g, \tag{A4}$$

y ahora el problema de la MA compuesta con poleas con masa se puede resolver en forma análoga a la expuesta. Como ejemplo considérese la MA compuesta con dos poleas con masas M_1 y M_2, la cual se ilustra, junto con su equivalente,

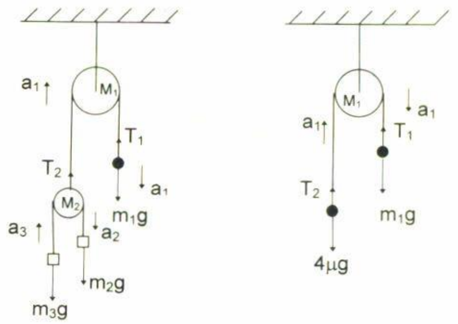


FIGURA 5. (a) La máquina de Atwood compuesta con polea con masa y (b) su equivalente.

en las Figs. 5a y 5b. Primero se calcula la aceleración de m_1:

$$a_1 = \frac{m_1 - \mu}{m_1 + \mu + M_1/2}, \tag{A5}$$

en donde

$$\mu = \frac{4m_2 m_3 + (m_2 + m_3)M_2/2}{m_2 + m_3 + M_2/2}. \tag{A6}$$

Conocida a_1, se determinan a_2 y a_3 en el referencial que se mueve con la aceleración a_1, y después en el referencial del laboratorio. Como el procedimiento ya está establecido, sólo calcularemos explícitamente a_2:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3 + M_2/2}(g + a_1) \\ &= \left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3 + M_2/2} \right) \left(\frac{2m_1 + M_1/2}{m_1 + \mu + M_1/2} \right)\end{aligned} \tag{A7}$$

y entonces

$$a_2 = \alpha - a_1 = \frac{m_2(m_1 + m_3) - 3m_1 m_3 + (m_2 - m_3)M_1/2 - (m_1 - \mu)M_2/2}{(m_2 + m_3 + M_2/2)(m_1 + \mu + M_1/2)}. \tag{A8}$$

El cálculo de a_3 es estrictamente análogo.

1. G. Atwood, *A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies, with a Description of original experiments relative to the Subjet*, (Cambridge, 1784).
2. T.B. Grenslade Jr., "Atwood's Machine," *The Physics Teacher*, january (1985).
3. D. Halliday y R. Resnik, *Física*, primera parte. (Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1983).
4. M. Alonso y E.J. Finn, *Fundamental University Physics I*, Mechanics, (Addison-Wesley Publishing Co., 1950).
5. E. Braun, *Física 1* Mecánica, (Editorial Trillas S.A., México, 1991).
6. P.A. Serway, *Physics for Scientist and Engineers with Modern Physics* (Saunders College Publishing Co., 1990).
7. D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, (Kluwer Academic Publishers, 1990).
8. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Co., 1950).
9. F.W. Constant, *Theoretical Physics* (Addison-Wesley Publishing Co., 1954).
10. K.R. Symon, *Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Co., 1960).
11. W. Hauser, *Introduction to the Principles of Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Co., 1965).
12. J.B. de Oyarzábal, *Ensayos sobre mecánica clásica*, Programa del libro de texto Universitario, (Universidad Nacional Autónoma de México, 1984).
13. Ver, por ejemplo, la referencia 3.
14. Ver, por ejemplo, la referencia 4.