Sobre la fórmula de Larmor y las ecuaciones de Abraham-Lorentz y Lorentz-Dirac

Rubén Mares y Gonzalo Ares de Parga
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Edificio 9, U.P. Adolfo López Mateos, Instituto Politécnico Nacional
07738 Zacatenco, México, D.F., Mexico

Recibido el 29 de mayo de 1997; aceptado el 5 de noviembre de 1997

Se realiza una revisión crítica de la formulación de las ecuaciones de Abraham-Lorentz y Lorentz-Dirac, así como de los procesos que conducen a la fórmula de Larmor. Especialmente se enfatizan las suposiciones *ad hoc* en la obtención de tales ecuaciones. También se llama la atención sobre la literatura no mencionada normalmente sobre el tema.

Descriptores: Fórmula de Larmor

We have made a critical review of the Abraham-Lorentz and Lorentz-Dirac equations and the processes leading to Larmor's formula. We have examined the hypothesis *ad-hoc* used to obtain these very equations. Simultaneously, we highlight historic contributions to this subject.

Keywords: Larmor's formula

PACS: 03.30.+P; 03.50.-Z; 03.50.De

1. Introducción

La ecuación de movimiento para una partícula cargada fue inicialmente desarrollada por Planck [1], Abraham y Lorentz [2] en su forma no relativista y, posteriormente, de manera relativista por Dirac [3]. Ambas ecuaciones manifiestan dos propiedades físicamente indeseables y sin análogo en la física clásica: las así llamadas soluciones autoaceleradas (*runaway*) y el fenómeno de preaceleración. Otras dificultades presentes en el proceso de deducción de la ecuación de movimiento, o bien en la naturaleza de la ecuación obtenida han sido señaladas en la literatura [4, 5] y por completez se recuerdan las más sobresalientes.

La fuerza de reacción de radiación es proporcional a la segunda derivada temporal de la velocidad, lo que implica que para resolver la ecuación dinámica se requieren tres condiciones iniciales y no dos, como es habitual en la dinámica newtoniana. Además, como se hace énfasis en la Ref. 5, la fuerza mencionada se sale del marco conceptual newtoniano en dos aspectos esenciales: su naturaleza de auto-fuerza y la dependencia de la derivada de la aceleración.

Para la mayoría de los valores de la aceleración inicial, la partícula sigue un comportamiento totalmente disparatado, acelerándose espontáneamente de manera exponencial. Para eliminar dicho comportamiento, Dirac introdujo la condición asintótica, según la cual el valor de la aceleración es cero para tiempos muy grandes. Sin embargo, la condición asintótica conduce al panorama siguiente: la aceleración al tiempo presente t depende del valor de la fuerza en tiempos posteriores $t + t'$ y ello para toda la historia de la partícula, violando de esta manera al concepto de causalidad física inherente a la electrodinámica clásica, o más concretamente al principio de antecedencia como lo señala Jiménez [6]. Además, como lo indica con toda precisión Penrose [7], ocurre una idea epistemológica radicalmente extraña al espíritu de creatividad en las ciencias físicas: la fijación de las condiciones iniciales debe ser totalmente arbitraria según el canon del determinismo físico convencional, pues de lo contrario se introduce cierta teleología en la estructura de los fenómenos físicos.

No obstante lo anterior, Haag [8] destaca la importancia de la condición asintótica en toda teoría de campos y en combinación con la ecuación de Lorentz-Dirac (LD), se elimina la presencia de las soluciones auto-aceleradas. En este caso, la ecuación LD, más la condición asintótica conducen a una ecuación integro-diferencial primeramente, en el caso no-relativista por Haag e Iwanenko y Sokolov [9] y para el caso relativista por Rohrlich en la Ref. 4.

Si la partícula se mueve con aceleración constante, la fuerza de reacción a la radiación se anula, pero según la fórmula de Larmor [10], toda partícula cargada y acelerada emite radiación, esperándose así una fuerza no-nula. Además, la masa electromagnética contiene un factor de $4/3$ que parece contradecir a la relación einsteniana entre masa y energía. El hecho de existir la así llamada controversia Rohrlich-Boyer [11] y la superación de la misma [12], muestra que algo es erróneo y que se trata de algo fundamental.

Finalmente, pero no menos importante, está el proceso de renormalización que al introducir en la ecuación de movimiento como masa de la carga un valor finito, le substrae esencial y formalmente una masa propia infinita y negativa de origen electromagnético, resultando así un proceso de renormalización no definido de manera unívoca [13]. Es interesante sealar que en el marco de la electrodinámica cuántica, Oppenheimer [14] y Rosenfeld [15] encontraron una divergencia cuadrática en la autoenergía, Weisskopf [16] en cambio obtiene una divergencia logarítmica, Kramers [17] sugiere un proceso de renormalización de la masa y Bethe [18] calcula el corrimiento Lamb empleando la sugerida renormalización de la masa. Schwinger, Tomonaga y Feynman [19] sistematizan la formulación covariante de la QED y el tratamiento de las divergencias y Salam [20] realiza el primer estudio sistemático de la renormalización.

Históricamente, las vías para determinar la ecuación de movimiento que incluya al efecto dinámico de la reacción de radiación sobre el emisor son: la basada en la conservación de la energía de las Refs. 1 y 2, en donde se considera el movimiento de la partícula sometida a la acción de una fuerza externa según la dinámica newtoniana. Al acelerar la partícula, emite radiación cuya potencia viene dada por la fórmula de Larmor. Con el propósito de tomar en cuenta esta pérdida por radiación, se modifica la ecuación de Newton sumándole una fuerza de reacción radiativa. Y se llega a la expresión siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\ddot{\vec{v}} - \vec{F}_{rr}\right] \cdot \vec{v} = 0, \tag{1}$$

donde e es la carga de la partícula, $\vec{v}$ la velocidad, $\ddot{\vec{v}}$ la segunda derivada respecto al tiempo, $\vec{F}_{rr}$ la fuerza de reacción de radiación y c la velocidad de la luz; e introducen dos suposiciones: (*i*) El integrando de la Ec. (1) se anula, lo que no es único y (*ii*) se extiende su validez a movimientos no necesariamente oscilatorios.

La segunda vía seguida por Abraham y Lorentz en la Ref. 2, se basa en el concepto de auto-interacción entre los diferentes elementos de una distribución de carga y en la determinación de la fuerza propia. En esta vía se postulan los principios siguientes: modelo del electrón caracterizado por distribución de carga rígida y simetría esférica, sistema de referencia en el que la partícula está en reposo, potenciales retardados de Liénard, y sólo los términos que no contienen al radio de la partícula se consieran de relevancia física con excepción de la aproximación $n = 0$, donde n significa el orden de potencias en el radio del electrón. Las dificultades con el modelo de Abraham-Lorentz son: índole no relativista del modelo, coeficiente incorrecto en la masa electromagnética, dificultades en el límite en que el radio del electrón tiende a cero y finalmente el problema de estabilidad del mismo.

Dirac en la Ref. 3 asume como punto de partida a las ecuaciones de Maxwell y mediante ellas calcula el campo en el punto de singularidad que describe al electrón, superando las dificultades asociadas con energías infinitas mediante un proceso de renormalización y se considera al electrón como partícula puntual. El propósito de Dirac es, en sus mismos términos, llegar a un esquema simple de ecuaciones que permita calcular los resultados obtenidos por el experimento y no un modelo para el electrón.

Fokker [21] sugiere la idea consistente en la cual, dado que el campo electromagnético juega un papel intermediario en la interacción de partículas cargadas, es posible su eliminación. Al realizar lo anterior sucede que el problema de infinitos en la posición de la partícula puntual no ocurre pues se han eliminado los campos, se establece la teoría sin la autointeracción eliminando el problema de la auto energía. La dificultad en las ideas de Fokker radica en la ausencia de radiación y su mérito en ser precursor de la teoría de acción a distancia.

La teoría de acción a distancia de Wheeler y Feynman [22] considera la interacción entre cargas a distancia con retardo en el tiempo sin mediar campo electromagnético alguno. La ecuación de movimiento no contiene inicialmente al término de radiación y para introducirlo se descompone al campo electromagnético explotando la simetría entre las soluciones avanzadas y retardadas. De esta manera, en la ecuación de movimiento resultan expresiones similares para la fuerza de reacción encontrada por Dirac, aunque de signo positivo para las soluciones retardadas y de signo negativo para las avanzadas. El artículo de Dirac de la Ref. 3 motivó una auténtica cascada de trabajos que se pueden clasificar en cuatro categorías: primeramente está la consideración de aquellos autores que argumentan que no existen razones suficientes en contra de la ecuación de Lorentz-Dirac como ecuación exacta dentro del marco de la electrodinámica clásica y resuelven la ecuación en casos en que la fuerza es función explícita del tiempo como en Plass [23]. En la segunda categoría están los avocados al propio formalismo matemático y la simplificación del esquema seguido por Dirac como en Infeld y Plebanski [24], Tabenski y Villaroel [25] y Evans [26]. La tercera se concentra en la eliminación de lo que hay de insatisfactorio en la ecuación de Dirac: divergencias y condición asintótica como en Gupta [27]. En la cuarta, se incluyen los esfuerzos tendientes a la formulación de la teoría de partículas cargadas clásicas que *ab-initio* se vea libre de auto-interacciones divergentes y demás dificultades señaladas, como en: Levine, Moniz y Sharp [28]; Glass, Ituschhill y Szamozi [29]; Chin Mo y Papas [30]; Shen [31]; Rohrlich [32]; de la Peña [33]; Jiménez [34]; Bonnor [35]; Ares de Parga y Rosales [36], entre otros.

Finalmente, están los artículos menos mencionados en la literatura habitual sobre el tema que lo abordan desde un punto de vista clásico como en: Wentzel [37]; Stückelberg [38]; Bopp [39]; Landé y Thomas [40]; Born e Infeld [41]; Mie [42]; Rosen [43]; Finkelstein [44]; Drell [45]; Dirac [46]; Bopp [47]; Peierls y MacManus [48] y Feynman [49].

En el presente artículo, el interés central se enfoca en mostrar que las anomalías analizadas en los párrafos anteriores se originan en las hipótesis *ad-hoc* que se introducen paso a paso en la formulación de una teoría clásica de partículas cargadas y ello desde el establecimiento de la fórmula de Larmor, suposiciones que están en el corazón mismo de la electrodinámica, como son las expresiones clásicas para la densidad de energía y el vector de Poynting. Naturalmente, dicho procedimiento de suposiciones *ad-doc* ha tenido éxito como lo muestra la corriente de desplazamiento que da consistencia a las ecuaciones de Maxwell. En la Sec. 2 se hace primeramente énfasis en que el proceso heurístico de Planck es una tautología y no se ajusta al esquema newtoniano en la obtención de la fuerza de reacción de radiación y se describe brevemente el proceso anterior con dos propósitos: (*i*) mostrar la no unicidad de la fuerza de reacción, y (*ii*) la contradicción a la que se conduce en el caso de fuerzas unidimensionales y fuerza constante. En la Sec. 3 se analiza la hipótesis de simplificación introducida por Dirac en la formulación del vector $B\mu$ y sus consecuencias. En la Sec. 4 se reinterpreta la fórmula de Larmor y se analizan todas la suposiciones *ad-hoc* que llevan a su formulación habitual y finalmente se plantean las conclusiones.

2. Proceso heurístico de Planck

2.1. Fuerza de reacción a la radiación

En lo esencial, el proceso de Planck consiste en un enfoque que da prioridad a la partícula sobre los campos electromagnéticos eligiendo de antemano una dinámica, la newtoniana. Sea un electrón de masa m en un campo de fuerzas externo dado por F. La segunda ley de Newton, habiendo elegido un sistema de referencia de acuerdo a la primera ley permite escribir:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{2}$$

Por la causalidad inherente a (2), la partícula es acelerada y en consecuencia ella emite radiación cuyo efecto sobre la misma se describe por una fuerza adicional $\vec{F}_{rr}$. Entonces, la ley dinámica se convierte en:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{rr}. \tag{3}$$

El problema se reduce entonces a determinar el término $\vec{F}_{rr}$ en el miembro derecho de (3). Ello se bosqueja en la sección siguiente y aquí se discute sola la validez conceptual del esquema seguido. Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$:

$$m\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{f}\cdot\vec{v} + \vec{F}_{rr}\cdot\vec{v}, \tag{4}$$

esta relación no es otra cosa que un balance de energía por unidad de tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_{rr}\cdot\vec{v}, \tag{5}$$

donde E es la energía mecánica total del sistema. Por otra parte, la causa del cambio no es otro que el inducido por la emisión de radiación de la partícula acelerada, y ello es dado por Larmor en la Ref. 10, como

$$\vec{F}_{rr}\cdot\vec{v} = -\left(\frac{2e^2}{3c^3}\right)a^2. \tag{6}$$

El esquema anterior es objetable por tres razones básicas: (*i*) la segunda ley de Newton exige que el término de la derecha en (2) sea algo externo al sistema, sin embargo $\vec{F}_{rr}$ proviene intrínsecamente del mismo; (*ii*) no es precisamente una teoría electrodinámica, pues los campos electromagnéticos aparecen sólo en la obtención de Larmor; (*iii*) se trata evidentemente de una tautología, que no permite ninguna predicción cuantitativa, pues su lógica inherente consiste en que existe fuerza de reacción de radiación porque la partícula irradia conforme a Larmor, por lo tanto la partícula es sólo un transductor de energía mecánica en radiación [6]

2.2. Ecuación de movimiento no-relativista y fórmula de Larmor

La deducción de la forma habitual para $\vec{F}_{rr}$ en (2) es bien conocida en la literatura [50] y se da a continuación para resaltar la suposición *ad-hoc* de simplicidad que no ha sido destacada hasta el momento. La fuerza $\vec{F}_{rr}$ debe satisfacer los requisitos siguientes: (*i*) anularse para $\vec{v} = 0$ ya que en tal caso no hay radiación; (*ii*) proporcional a e^2; (*iii*) incluir al tiempo característico τ:

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}, \tag{7}$$

ya que es el único parámetro con significación física en la teoría.

La fuerza $\vec{F}_{rr}$ se determina según el balance siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rr}\cdot\vec{v}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{v}}\,dt. \tag{8}$$

Integrando por partes el segundo miembro resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rr}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}}\cdot\vec{v} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{9}$$

Si el movimiento es periódico, o tal que $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}|_{t_1}^{t_2} = 0$, se puede expresar a (9):

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_{rr} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}}\right)\cdot\vec{v}\,dt = 0. \tag{10}$$

La conclusión tradicional consiste en que satisfechas las condiciones anteriores, se puede identificar a la fuerza de reacción de radiación como

$$\vec{F}_{rr} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}} = m\tau\ddot{\vec{v}} \tag{11}$$

y la ecuación de movimiento modificada toma la forma

$$m\left(\dot{\vec{v}} - \tau\ddot{\vec{v}}\right) = \vec{F}_{\text{ext}}, \tag{12}$$

que se conoce como ecuación de Abraham-Lorentz (AL). Las observaciones, además de las ya señaladas en la introducción son:

1) La hipótesis de que $\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}$ se anula es cierta para un movimiento oscilatorio, sin embargo la Ec. (11) se pretende de validez general.

2) El problema de unicidad en la Ec. (10). En efecto la Ec. (11) supone haber elegido que la única solución de la Ec. (11) sea

$$\vec{F}_{rr} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}} = 0, \tag{13}$$

sin embargo, es posible construir toda una familia de soluciones de la forma siguiente: se construye un vector $\vec{D}$, que es una combinación lineal de los únicos dos vectores disponibles dados por

$$\vec{D} = A\vec{v} + B\vec{a}, \tag{14}$$

con A y B constantes multiplicativas. Mediante multiplicación escalar con $\vec{v}$ y eliminando a A resulta

$$\vec{D} = B\left[-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v} + \vec{a}\right], \tag{15}$$

y la expresión (13) se convierte en:

$$\vec{F}_{rr} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}} = +B\left[\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{v}^{\,2}}\vec{v} + \vec{a}\right], \tag{16}$$

donde B es una constante de índole inercial a especificar.

Es interesante hacer notar que en el caso de aceleración constante, la fuerza de reacción de radiación dada por (16) no se anula, eliminando así una de las paradojas comentadas en la introducción.

2.3. Fórmula de Larmor y ecuación de movimiento

Nuestra siguiente crítica al empleo de la fórmula de Larmor como piedra angular en la obtención de la ecuación dinámica, consiste en la contradicción a la que conduce, habiéndola asumido como punto de partida en casos físicamente de interés y simples, como lo es el movimiento unidimensional en un campo de fuerza constante. La dinámica newtoniana es invariante bajo transformaciones de Galileo y de ello resulta el interés por esta clase de movimiento.

La fórmula de Larmor proporciona, como previamente se señaló, la potencia total radiada por una carga acelerada y es dada por

$$P = \tau m a^2, \tag{17}$$

con τ definido en (7). Para fuerzas constantes F, la energía de la partícula se expresa

$$E = \frac{mv^2}{2} - Fx, \tag{18}$$

que podemos reescribir en nuestro caso como

$$\frac{mv^2}{2} - Fx = -\tau m \int a^2\, dt. \tag{19}$$

Uno debe esperar por invariancia galileana que si se aplica una fuerza constante la aceleración debería ser constante también; o sea

$$\frac{ma^2t^2}{2} - \frac{F}{2}at^2 = -\tau m a^2 t; \tag{20}$$

simplificando y despejando a la aceleración resulta

$$a = \frac{Ft}{m(t+2\tau)}, \tag{21}$$

siendo asi la aceleración una función del tiempo. Cabe hacer notar que para tiempos tales que $\tau \ll t$, se recupera en el límite, la condición de aceleración constante.

Otra razón de la insostenibilidad del proceso habitual para llegar a la ecuación dinámica es proporcionada nuevamente por el balance de energía por unidad de tiempo:

$$mav - Fv = -\tau m a^2. \tag{22}$$

Recordando que el término de la derecha en la expresión anterior se obtiene haciendo la hipótesis $v \to 0$ y ello conduce nuevamente a una contradicción en ese límite. Esta dificultad subsiste también para (2.15) lo que llevaría inevitablemente a renormalizar la masa si $v \to 0$. Se concluye esta sección estableciendo que, partiendo de la fórmula de Larmor, se debe encontrar la ecuación de movimiento de manera intrínseca y los argumentos anteriores muestran que tal via introduce contradicciones inherentes e hipótesis simplificadoras *ad-hoc* lo cual, en este contexto da forma al viejo adagio latino: de hipótesis verdadera, se concluye sólo lo verdadero; de la falsa, cualquiera cosa es posible.

3. Ecuación de Lorentz-Dirac

Se considera al movimiento de un electrón de masa m, carga e, de naturaleza puntual en un campo de fuerzas dado por $F_{\mu\mathrm{ext}}$. La ecuación de Lorentz-Dirac (LD) se deduce a partir de primeros principios de validez universal: teoría electromagnética de Maxwell-Lorentz, conservación de energía y momento e invariancia relativista. La obtención de la misma es realizada por Dirac en la Ref. 3 y dentro del espíritu del artículo presente se tratan sólo dos suposiciones *ad-hoc* introducidas en el proceso.

Un campo extremadamente útil en la teoría de Dirac es $f^{\mu\nu}$ que lo define de la manera siguiente:

$$f^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}_{\mathrm{actual}} - \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} + F^{\mu\nu}_{\mathrm{adv}}\right), \tag{23}$$

lo que equivale a expresar al campo $F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}}$ como

$$F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}_{\mathrm{rad}} + \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} + F^{\mu\nu}_{\mathrm{adv}}\right). \tag{24}$$

Barut [51] hace notar que la descomposición anterior no es única, siendo más general

$$F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} = k\left(F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} - F^{\mu\nu}_{\mathrm{adv}}\right) + (1-k)F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} + kF^{\mu\nu}_{\mathrm{adv}}. \tag{25}$$

Dirac define el campo de radiación como

$$F_{\rm rad}^{\mu\nu} = F_{\rm ret}^{\mu\nu} - F_{\rm adv}^{\mu\nu} = F_{\rm out}^{\mu\nu} - F_{\rm in}^{\mu\nu}. \tag{26}$$

Un resultado fundamental para el campo de radiación es la expresión

$$F_{\rm rad}^{\mu\nu} = \frac{4e}{3}\left(v^\nu \dot{a}^\mu - \dot{a}^\nu v^\mu\right), \tag{27}$$

donde a^μ y v^ν, son la aceleración y velocidad, respectivamente, obtenidas a partir de la linea universo del electrón y el punto significa la derivada respecto al tiempo propio de la partícula. Para obtener la ecuación de movimiento del electrón, Dirac calcula al flujo de energía y momento a través de la superficie de un tubo en cuyo interior se localiza al electrón, empleando al tensor $T_{\mu\nu}$ de Maxwell, a partir del campo actual:

$$4\pi T_{\mu\rho} = F_{\mu\nu}F_\rho^\nu + \frac{1}{4\pi} g_{\mu\rho}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Con el campo $f^{\mu\nu}$ definido en (23) se obtiene que el flujo de energía y momento a travéz del tubo es dado por el vector

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{\varepsilon}\dot{v}_\mu - ev_\nu f_\mu^\nu\right) ds, \tag{29}$$

donde ε es el es el radio del electrón y la integral depende solo de los puntos extremos, siendo así el integrando una diferencial exacta del tiempo propio s; esto es, existe un vector B_μ tal que

$$\frac{dB_\mu}{ds} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{\varepsilon}\dot{v}_\mu - ev_\nu f_\mu^\nu. \tag{30}$$

El vector B_μ introducido en (30) satisface las dos propiedades siguientes:

$$B_\mu = B_\mu(v_\alpha, \dot{v}_\alpha, \dots), \tag{31}$$

$$v^\mu \dot{B}_\mu = 0. \tag{32}$$

La elección mas simple para B_μ que cumple con (31) y (32) es

$$B_\mu = kv_\mu, \tag{33}$$

con k una constante. En el límite en el cual el radio del electrón ε tiende a cero, el término primero de la derecha se hace infinito, lo que requiere renormalización de la masa para absorber la infinitud:

$$k = \frac{1}{2}\frac{e^2}{\varepsilon} - m_{\rm obs} \tag{34}$$

donde $m_{\rm obs}$ es otra constante en la teoría y corresponde a la masa observable del electrón. De esta manera se llega a la ecuación (LD)

$$m\dot{v}_\mu - \frac{2}{3}e^2\ddot{v}_\mu - \frac{2}{3}e^2\dot{v}^2 v_\mu = ev_\nu F_{\mu\rm in}^\nu. \tag{35}$$

Existen otras solucines alternativas para (31) y (32), Dirac en la Ref. 3, plantea la siguiente:

$$B_\mu = k\left[\dot{v}^4 v_\mu + 4(\dot{v}\cdot\ddot{v})\dot{v}_\mu\right]. \tag{36}$$

Sin embargo la Ec. (35) no es aceptable ni su generalización en virtud de que al renormalizar, con la finalidad de eliminar la divergencia en (30), el coeficiente k' no es constante sino igual a

$$k' = \frac{\frac{1}{2}\frac{e^2}{\varepsilon} - m}{\dot{v}^4 + 4\ddot{v}^2 + 4\dot{v}\cdot\dddot{v}}. \tag{37}$$

Resulta así que (33) es aceptada por una suposición *ad-doc* bajo la razón de la simplicidad.

Bonnor en la Ref. 35 introduce para $B\mu$ el ansatz siguiente:

$$B_\mu = P(s)v_\mu + Q(s)\dot{v}_\mu, \tag{38}$$

pero no evita el proceso de renormalización de la masa. Ante la pregunta ¿es posible evitar la renormalización?, Singe [52] responde afirmativamente y su propósito consiste en lo siguiente: utlizar un tubo definido por $w = cte$, donde w es la distancia retardada de un evento respecto a la linea-universo de la partícula, definida en términos de la geometría de Minkowski. Al calcular el flujo del auto-campo a través del tubo, resulta una formula simple que da el resultado habitual si $w\to\infty$ y un término singular si $w\to 0$. Posteriormente Singe elimina el problema de la autoenergía de la partícula cargada, modificando al tensor de energía y momento mediante un término que decrece muy rápidamente al hacer $w\to\infty$.

Otra teoría interesante es el modelo de Stückelberg [38]. Este último consiste en introducir un nuevo tipo de interacción de corto alcance que compense a la repulsión coulombiana. Así pues, la idea es básicamente postular la interacción del electrón con un campo escalar de corto alcance, para el cual es válido que dos cargas iguales se atraigan entre sí. Esto se logra a través de una carga mesónica. El corto alcance de la interacción es necesario a fin de que no exista efecto observable. Si f es la constante de acoplamiento con el campo escalar, Stckelberg obtiene $e^2 = f^2$ llevando esto a auto energías finitas y tensiones de Poincaré nulas para asegurar la estabilidad de la partícula cargada.

Finalmente en esta sección, se muestra la equivalencia entre la versión no relativista de Abraham-Lorentz de la fuerza de reacción de radiación y la relativista de Lorentz-Dirac. Para ello se obtiene la fuerza de reacción de radiación a partir del resultado de Dirac [Ec. (27)].

$$F_\mu^{\rm rad} = \frac{e}{c}\int dx\dot{z}^\nu \delta[x - z(s)]\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{\rm rad} \tag{39}$$

$$= \frac{2e^2}{3c^3}\left(v^\nu \dot{v}_\mu \dot{a}_v - \dot{a}_\mu\right). \tag{40}$$

Derivando sucesivamente a la relación cinemática resulta para (39) la expresión

$$F_\mu^{\rm rad} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\dot{a}_\mu + v_\mu a^2\right). \tag{41}$$

Se hace notar que en Dirac [3], las unidades se escogen de tal manera que $c = 1$. La equivalencia se demuestra si la expresión relativista (41) se descompone en la forma

$$F_\mu^{\rm rad} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\gamma^2\left[\ddot{\vec{v}} + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2(\vec{v}\cdot\ddot{\vec{v}})\vec{v} + 3\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})\dot{\vec{v}} + 3\left(\frac{\gamma}{c}\right)^4 4(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}})^2\vec{v}\right] \tag{42}$$

y tomando el límite $v/c \to 0$. Y como es habitual, $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

De esta manera se concluye que (40) deducida de (27) es la versión relativista de (11) y que el término $e^2\dot{v}_\mu/2\varepsilon$ que aparece en las Ecs. (29) y (30) es consecuencia de partir de (5) en el balance de energía. El balance correcto es el indicado por Jiménez: en la Ec. (10) de la Ref. 6, pero ello conduce nuevamente a la fórmula de Larmor y a su análisis crítico.

4. Crítica a la fórmula de Larmor

4.1. Fórmula de Larmor

En los textos de electrodinámica, por ejemplo Landau [50], la fórmula de Larmor se obtiene siguiendo los pasos bien conocidos: si una carga se observa en un sistema de referencia en que la velocidad es pequeña respecto a la de la luz, el campo de aceleración es dado por

$$\vec{E}_a = \frac{e}{c}\left[\frac{\hat{n}\times(\hat{n}\times\dot{\vec{\beta}})}{R}\right]_{\rm ret}. \tag{43}$$

Nótese que el campo total es de la forma

$$\vec{E} = e\left[\frac{(\hat{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{k^2R^2}\right]_{\rm ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\hat{n}\times\left\{(\hat{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right\}}{k^3R}\right]_{\rm ret}, \tag{44}$$

con $k = 1 - \hat{n}\cdot\vec{\beta}$, y el campo magnético viene dado por

$$\vec{B} = \hat{n}\times\vec{E}. \tag{45}$$

Los campos (44) se dividen en campos de velocidad que no dependen de la aceleración y campos de aceleración que dependen linealmente de $\dot{\vec{\beta}}$. Los campos de velocidad son esencialmente estáticos y tanto $\vec{E}_a$ como $\vec{B}_a$ son campos de radiación y decrecen como $1/R$. El flujo energético por unidad de tiempo viene dado por el vector de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}_a|^2\hat{n}. \tag{46}$$

El balance energético que toma en cuenta al sistema cerrado partícula + campo electromagnético es

$$\frac{d}{dt}(E + U) = -\oint \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}, \tag{47}$$

donde E es la energía mecánica y U es la energía total del campo dada por la expresión

$$U = \frac{1}{8\pi}\int dv\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right). \tag{48}$$

El miembro derecho de (47) es justamente la potencia radiada que se calcula según (46). El resto del proceso es bien conocido y culmina con la clásica expresión para la fórmula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\vec{a}^{\,2}. \tag{49}$$

4.2. Interpretación de la fórmula de Larmor

La interpretación habitual de la fórmula de Larmor consiste en considerar al flujo de energía a través de una superficie lejana respecto a la partícula y consecuentemente no se considera al retardo. En la Ref. 13 se interpreta a la fórmula de Larmor en la forma siguiente: se considera la energía radiada por el electrón en un sistema de referencia donde la partícula se encuentra en reposo y la superficie de integración del vector de Poynting en (47) es una esfera de radio $R \to 0$, de tal forma que se considera a toda la energía radiada por la partícula. En esto radica la esencia del enfoque de Dirac, considerar el retardo hasta tercer orden y como se vió anteriormente se llega a lo siguiente: el término $e^2/2\varepsilon$ es absorbido por la renormalización de la masa, y el término $\tau(\dot{a}_\mu + a^2 v_\mu)$ proviene del retardo pero no es satisfactorio por las anomalías ya mencionadas en la introducción. Por lo tanto, concluimos que el problema consiste en encontrar otra interpretación de los flujos de energía y momento tanto de la partícula como del campo. De hecho, como veremos en la siguiente sección, existen otras alternativas al respecto.

4.3. Suposiciones *ad-hoc* en la fórmula de Larmor

Una interrogante básica consiste en la validez universal y única de (46) y (48) y su origen. En la respuesta seguimos el razonamiento de Feynman [53]. La idea es suponer que existe una densidad de energía del campo u y un flujo $\vec{S}$ que depende únicamente de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tal como aparecen en (46) y (48). Siguiendo el razonamiento de Poynting se llega a (49). Sin embargo, la demostración de Poynting no es realmente una demostración según Feynman, ya que lo único que se logra es encontrar una u y un vector $\vec{S}$ posibles.

¿Cómo sabemos que jugando hábilmente con los términos en la ecuación de continuidad no encontraremos otra fórmula para u y otra para $\vec{S}$? El nuevo $\vec{S}$ y la nueva u serían diferentes pero seguirían satisfaciendo una ley de conservación. De hecho, en la literatura se encuentran expresiones alternativas para $\vec{S}$ [54, 55]:

$$\vec{S} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H} + \Phi\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), \tag{50}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{B}\right) + \Phi\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right). \tag{51}$$

De hecho, afirma Feynman, existe un número infinito de posibilidades diferentes para u y $\vec{S}$ y hasta ahora nadie ha concebido una manera experimental para decidir cuál es la correcta. La gente conjetura que la más simple es probablemente la correcta, pero ello es una suposición *ad-hoc*, y la solución que se adopta para la propuesta por Poynting y Heaviside en la Ref. 50. Además, en la expresión para la parte magnética de la densidad de energía, aparece el término

$$\frac{1}{8\pi} \int \vec{B}^2 dv. \tag{52}$$

Para llegar a (52) se parte de una distribución estacionaria de corrientes y campos. Se supone que el proceso de formación tiene lugar a velocidades muy pequeñas, de tal manera que se supone la validez de la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \tag{53}$$

La aplicación de la ley de Faraday, el teorema de Stokes y la ley de Ampere conducen finalmente a la expresión (52). Nuevamente resulta evidente que la suposición dada en la Ec. (53) es una hipótesis *ad-hoc*.

5. Conclusiones

El problema de la reacción de radiación clásica sigue manifestándose como un problema desafiante y sin ser resuelto hasta el presente, ello no obstante el tiempo transcurrido, desde finales del siglo pasado hasta el momento actual, lo que significa casi un siglo y a pesar igualmente de la cantidad de autores que de una manera u otra lo han abordado como lo sugiere la lista de referencias.

En este artículo se sintetizaron los principios, hipótesis y teorías que se han aplicado al problema de la dinámica de las partículas cargadas, con especial atención al electrón, sin abordar explícitamente a las teorías de acción a distancia que pueden ser catalogadas como teorías globales, y en ellas finalmente radicaría la explicación de parámetros tan básicos como la masa. Los dos esfuerzos fundamentales: Planck-Abraham-Lorentz, por una parte y Dirac por otra, se caracterizan por el deseo de llegar a una dinámica del electrón pero en simultaneidad con los principios de la teoría electromagnética clásica y ello básicamente tomando como piedra angular a la radiación de Larmor, de manera directa en el primero y por la equivalencia mostrada en el segundo. Sin embargo, en el transcurso de la deducción se introdujeron suposiciones *ad-hoc*, principalmente de simplicidad, que bien pueden estar en la base de todas las anomalías físicas inherentes y discutidas en la introducción, como también del proceso de renormalización de la masa a fin de evitar auto-energías infinitas. Y ello hasta el corazón mismo del proceso: la fórmula de Larmor. Lo anterior conduce a la conclusión siguiente: si las irregularidades que se manifiestan en la obtención de una auténtica electrodinámica de partículas y campos hacen dudar de su veracidad, sin abandonar al universo de campos y partículas, es necesario proponer ecuaciones alternativas que eviten aquellas irregularidades.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Dr. Fernando Angulo Brown sus comentarios y sugerencias y a COFAA y EDD del IPN por el apoyo recibido.

1. M. Planck, *Ann. Phys. (Leipzig)* **63** (1987) 419.
2. M. Abraham, *Ann. Phys. (Leipzig)* **10** (1903) 105; H.A. Lorentz, *Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomenon of Light and Radiation Heat*, second edition (Dover, N.Y., 1952).
3. P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc., London, Ser. A* **176** (1938) 148.
4. F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, (Addison-Wesley, Read., Mass., 1965).
5. J.L. Jiménez and I. Campos, *Am. J. Phys.* **55** (1987) 11.
6. J.L. Jiménez, *Ciencia* **40** (1989) 257.
7. R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, (Oxford University Press, Oxford, 1989), p. 188.
8. R. Haag von, *Z. Naturforsch* **10 A** (1955) 752.
9. D. Iwanenko and A. Sokolov, *Klassische Feldtheorie*, (Akademie-Verlag, 1953).
10. J. Larmor, *Phil. Mag. 44* (1897) 503.
11. T. Boyer, *Am. J. Phys.* **53** (1985) 167; T. Boyer, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 3246; F. Rohrlich, *Phys. Rev. D* **25** (1982) 3251.
12. I. Campos and J.L. Jiménez, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 607.
13. G. Ares de Parga, *Rev. Mex. Fís.* **35** (1989) 162.
14. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35** (1930) 461.
15. L. Rosenfeld, *Z. Phys.* **89** (1931) 454.

16. V. Weisskopf, *Z. Phys.* **89** (1934) 27; *Z. Phys.* **90** (1934) 817.

17. H.A. Kramers, *Proc. Kgl. Ned. Acad. Wet.* **40** (1937) 814.

18. H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **72** (1947) 339.

19. J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73** (1948) 416; S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27; R. Feynman, *Phys. Rev.* **74** (1948), 430.

20. A. Salam, *Phys. Rev.* **82** (1951) 217.

21. A.D. Fokker, *Z. Phys.* **58** (1929) 386.

22. J.A. Wheeler and R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1954) 157; *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 425.

23. G.N. Plass, *Rev. Mod. Phys.* **33** (1961) 37.

24. L. Infeld and J. Plebanski, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **4** (1956) 347.

25. R. Tabensky and D. Villarroel, *J. Math. Phys.* **16** (1957) 7.

26. A.B. Evans, *Found Phys.* **52** (1984) 894.

27. S.N. Gupta, *Proc. Phys. Soc., London, Ser. A* **64** (1951) 50.

28. H. Levine, E. Moniz, and D. Sharp, *Am. J. Phys.* **45** (1977) 1.

29. E. Glass, J. Huschhilt, and G. Szamozi, *Am. J. Phys.* **52** (1984) 5.

30. T.Chin and C. Papas, *Phys. Rev. D* **4** (1971) 15.

31. C.S. Shen, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 15.

32. F. Rohrlich, *Ann. Phys.* **13** (1961) 93.

33. L. de la Peña, *Rev. Mex. Fis.* **29** (1983) 537.

34. J.L. Jiménez y J.Hirsch, *Nuovo Cimento* **93 B** (1986) 87.

35. W.B. Bonnor, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **337** (1974) 591.

36. G. Ares de Parga and M. Rosales, *Am. J. Phys.* **57** (1989) 435.

37. G. Wentzel, *Z. Phys.* **68** (1933) 479; *Z. Phys.* **87** (1934) 726.

38. E.C. Stckelberg, *Nature* **144** (1939) 118; *Helv. Phys.* **Acta 14** (1941) 51.

39. F. Bopp, *Ann. Phys.* **38** (1940) 345.

40. A. Landé and L. Thomas, *Phys. Rev.* **60** (1941) 121; *Phys. Rev.* **60** (1941) 514; *Phys. Rev.* **65** (1944) 175.

41. M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **144** (1935) 425.

42. G. Mie, *Ann. Phys.* **85** (1928) 711.

43. N. Rosen, *Phys. Rev.* **55** (1939) 94.

44. R.J. Finkelstein, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1079.

45. S.D. Drell, *Phys. Rev.* **79** (1950) 220.

46. P.A.M. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **209** (1951) 291; *Ann. de Institut Henri Poincaré* **13** (1952) 1; *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **212** (1952) 330; *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **223** (1954) 438.

47. F. Bopp, *Ann. Phys.* **42** (1942) 473.

48. R. Peierls and H. McManus, *Phys. Rev.* **70** (1946) 795.

49. R.P.Feynman, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1430.

50. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2a. edición (Wiley, New-York, 1975); L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, (Addison-Wesley, Read. Mass., 1962).

51. O.Barut, *Electrodynamics and The Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, Inc, New York, Año???).

52. J.L. Synge, *Ann Math. Pura Appl.* **83** (1970) 33.

53. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2 (Addison-Wesley, 1964).

54. C.S. Lai, *Am. J. Phys.* **50** (1982) 12.

55. Hines, *Am. J. Phys.* **49** (1981) 9.