

Sobre la superficie libre de un fluido contenido en un cilindro pequeño con rotación eje simétrica

A. Medina

*Subdirección de Exploración y Producción, Instituto Mexicano del Petróleo
Eje Central Lázaro Cárdenas 152, 07730 México D.F., Mexico*

Recibido el 29 de noviembre de 1997; aceptado el 8 de septiembre de 1998

Estudiamos analíticamente la forma estacionaria de la superficie libre de un fluido confinado en un cilindro circular pequeño que rota verticalmente. Consideramos bajas velocidades angulares, ángulo de mojado igual a $\pi/2$ rad y tomamos en cuenta la tensión superficial en la ecuación de balance de esfuerzo normal a la superficie libre. Mostramos cómo la inclusión de la tensión superficial produce cambios importantes en la forma de la superficie libre.

Keywords: General theory of fluids; rotational flow

We study analytically the steady-state shape of the free surface of a fluid confined within a very small circular cylinder which rotates vertically. We have considered low angular velocities, wetting angle equal to $\pi/2$ rad and we take into account surface tension in the balance of stress normal at the free surface. We show that the inclusion of the surface tension produces important change on the free surface shape.

Descriptores: Teoría general de fluidos; flujo rotacional

PACS: 47.10.+g; 47.32.-y

1. Introducción

El estudio de la forma superficial que adquiere un fluido contenido en un cilindro circular vertical que rota alrededor de su eje en presencia del campo gravitatorio, es un problema clásico en mecánica de fluidos [1-5]. En este caso, es bien sabido que la superficie estacionaria es un paraboloides de revolución incluso para valores muy pequeños de la velocidad angular. Este comportamiento del fluido ha resultado ser muy útil, por ejemplo, en el diseño de concentradores solares, enfoques ópticos y acelerómetros [3, 4]. No obstante, cuando el radio del cilindro circular es muy pequeño, es necesario tomar en cuenta la influencia de la tensión superficial, ya que este parámetro afecta, principalmente a estas escalas, la forma de cualquier sistema fluido con una frontera libre [6]. En efecto, la tensión superficial se origina del hecho de que la energía potencial del sistema incluye la energía de interacción de cualesquiera dos interfaces. La energía contenida en cada interface es proporcional al área de la interface y el factor de proporcionalidad, el cual es una propiedad de los materiales que forman la interface, se conoce como tensión superficial. En nuestro sistema particular, hay energía superficial en la interface aire-fluido, en la interface aire-cilindro, y en la interface fluido-cilindro. Si la energía de bulbo del fluido es mucho mayor que la energía de las interfaces, los efectos de la tensión superficial estarán confinados en la vecindad de los puntos donde el aire, el fluido y el cilindro se encuentran. Muy cerca de estos puntos, las fuerzas superficiales dominan a las demás y determinan propiedades, tales como el ángulo entre la interface fluido-aire y la frontera sólida. De otra manera, si la energía de bulbo es igual o ligeramente mayor que las energías en la interface los efectos de la tensión superfi-

cial serán importantes a través de todo el fluido modificando la forma superficial y, por tanto, los niveles de energía potencial y las líneas de acción del campo gravitacional.

La influencia de la tensión superficial sobre la forma superficial ya ha sido analizada, de modo poco claro, tomando en cuenta la condición de equilibrio mecánico, por medio de la ecuación de Young-Laplace [7]. Debido a las dificultades de los cálculos sólo se ha tratado hasta ahora el caso en el cual el ángulo de mojado (medido desde de la superficie sólida a la tangente de la interface, desde el interior del fluido) es igual a $\pi/2$ rad. Aún así, esta situación produce superficies libres con importantes desviaciones respecto a la forma paraboloides. Parte de la falta de claridad en el trabajo antes mencionado consiste en la introducción de presiones ficticias y en la nula discusión de la importancia del marco de referencia en el tratamiento del problema. Con la finalidad de presentar una discusión cuidadosa de la existencia y forma de la superficie libre dividimos este artículo como sigue. En la Sec. 2 discutimos el problema sin tensión superficial en el marco de referencia que gira con el fluido. En la Sec. 3 construimos y analizamos la superficie libre tomando en cuenta la tensión superficial en el sistema girando con el fluido. Finalmente, en la Sec. 4 discutimos las principales conclusiones y las limitaciones de este trabajo.

2. Ecuaciones de la presión y de la superficie libre en un marco con rotación eje simétrica

Es muy conveniente estudiar el problema estacionario de la rotación eje simétrica de un fluido incompresible, desde un marco de referencia no inercial (x^*, y^*, z^*) que gira con el

cilindro con una velocidad angular Ω y cuya coordenada z^* coincide con el eje de simetría del cilindro y es paralelo al vector aceleración de la gravedad \mathbf{g} . Asociado con este marco escogemos el sistema de coordenadas cilíndricas (r^*, z^*, θ) , donde el eje z^* del sistema cilíndrico coincide con el eje z^* del sistema cartesiano. En el sistema de referencia que rota con el cilindro, el fluido está en reposo y, por lo tanto, la ecuación de balance de fuerza (por unidad de masa) para cualquier elemento de fluido es

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} = \mathbf{a}_p \text{ o } \nabla p = \rho[\mathbf{f} - \mathbf{a}_p], \quad (1)$$

donde $\rho(x^*, y^*, z^*)$ es la densidad del fluido, $p(x^*, y^*, z^*)$ es la presión, $\mathbf{f}(x^*, y^*, z^*)$ es la fuerza total de cuerpo por unidad de masa actuando en el elemento de fluido y \mathbf{a}_p es la aceleración del elemento de fluido relativa a un sistema inercial fijo (X^*, Y^*, Z^*) , respecto al cual se mueve el sistema no inercial (y el cilindro). Consideraremos de aquí en adelante que ambos marcos de referencia tienen su origen justo en el centro de la base inferior del cilindro.

Si $p(x^*, y^*, z^*)$ es no nula, a partir de la Ec. (1) se satisface que

$$\nabla \times (\rho[\mathbf{f} - \mathbf{a}_p]) = 0, \quad (2)$$

en cualquier lugar en el fluido. Si esta ecuación no se satisface, el fluido no puede estar en equilibrio en el sistema no inercial.

Si el fluido es homogéneo, entonces (en el sistema no inercial) en cualquier punto $P(x^*, y^*, z^*)$ del fluido existiría una presión $p(x^*, y^*, z^*)$ (que siempre puede ser supuesta positiva para que sea la presión del fluido) la cual es solución de la Ec. (1). Por otro lado, para que el fluido tenga una superficie libre S_f , la función $p(x^*, y^*, z^*)$ debe ser de la forma

$$p = \rho f(x^*, y^*, z^*) + c, \quad (3)$$

donde c es una constante relacionada con la presión externa que actúa sobre el fluido y f en el caso estacionario es una función sólo de las coordenadas. Entonces la ecuación de la superficie libre del fluido es

$$f(x^*, y^*, z^*) = c_1. \quad (4)$$

La constante c_1 puede ser evaluada al igualar el volumen inicial con el volumen ocupado por la forma designada para la superficie S_f y las paredes del contenedor.

Es fácil notar que si p no satisface la Ec. (3) pero cumple la Ec. (2), entonces la solución de la Ec. (1) determina, cuando $p = cte.$, una superficie de presión constante.

Para el caso de rotación pura (*i.e.*, sin traslación) y uniforme ($\Omega = cte.$), la aceleración \mathbf{a}_p del punto $P(x^*, y^*, z^*)$ respecto al sistema inercial fijo (X^*, Y^*, Z^*) es

$$\mathbf{a}_p = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}) = -\nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} \right) = -\Omega^2 \mathbf{r}^*, \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ es el vector velocidad angular paralelo al eje z^* , \mathbf{L} es el vector de posición del punto P respecto al origen

del sistema coordenado, $\mathbf{L} = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j} + z^* \mathbf{k}$, $\mathbf{r}^* = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j}$ y $r^{*2} = \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}^* = (x^{*2} + y^{*2})$. Debido a lo anterior la Ec. (2) asegura que

$$\nabla \times \mathbf{f} = 0. \quad (6)$$

Este resultado permite establecer que en el caso más general (cuando la región ocupada por el fluido es simplemente conexa [8]) existe una función potencial $V(x^*, y^*, z^*)$ tal que

$$\mathbf{f} = -\nabla V. \quad (7)$$

El cálculo de la presión en cualquier punto del fluido (en el sistema no inercial) es ahora directo. Multiplicando internamente la Ec. (1) por $d\mathbf{L}$ y usando las Ecs. (5) y (7), encontramos que

$$\nabla p \cdot d\mathbf{L} = -\rho [\nabla V - \Omega^2 \mathbf{r}^*] \cdot d\mathbf{L}, \quad (8)$$

lo cual conduce a que la presión en cualquier punto en el fluido en el sistema no inercial es de la forma

$$p(x^*, y^*, z^*) = -\rho \left[V(x^*, y^*, z^*) - V(0, 0, 0) - \frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} \right] + p(0, 0, 0). \quad (9)$$

Para calcular la superficie libre vemos que de acuerdo a la Ec. (9), si $V = -\Phi(x^*, y^*, z^*)$ el campo de presión es simplemente

$$p(x^*, y^*, z^*) = \rho \Phi(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} + c, \quad (10)$$

esto permite la formulación de la superficie libre de la forma dada en la Ec. (3), es decir,

$$\Phi(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} = c_1. \quad (11)$$

Es claro que para la rotación del fluido contenido en un cilindro circular de radio R , bajo la acción de la aceleración de la gravedad (g), se satisface que

$$V(x^*, y^*, z^*) = gz^*, \quad (12)$$

por tanto

$$p(x^*, y^*, z^*) = -\rho gz^* + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} + c, \quad (13)$$

donde c es una constante.

La ecuación de la superficie libre se calcula a partir de la Ec. (11), de donde obtenemos que

$$z = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 r^{*2}}{g} + c', \quad (14)$$

aquí $c' = c_1/g$. El valor de la constante en la ecuación de la superficie libre lo calculamos a partir de la conservación del volumen inicial, el cual para un fluido contenido en un cilindro de radio R y que alcanza una altura h es

$$2\pi \int_0^R z^*(r^*) r^* dr^* = \pi R^2 h, \quad (15)$$

sin embargo por ahora su valor no es importante.

3. La superficie libre para un cilindro pequeño

Con el propósito de encontrar la deformación de la superficie libre bajo la acción de la tensión superficial vamos a mantenernos en el marco no inercial que gira con el fluido. También debemos recordar que las condiciones de frontera en la superficie libre, para un sistema con estas características [6], son: (a) Una condición puramente cinemática la cual establece que el fluido no cruza la superficie libre. Ya que estamos considerando sólo el caso estacionario, la superficie libre en el marco no inercial se mantiene fija en el espacio. Esto implica que la componente de la velocidad, normal a la superficie libre es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (16)$$

aquí \mathbf{v} es el campo de velocidad en la superficie libre, \mathbf{n} es el vector unitario normal a la superficie libre. (b) Las condiciones de frontera sobre el esfuerzo son más complicadas. Físicamente, una condición de frontera establece que (para el caso de la interface aire-fluido y baja velocidad relativa) no hay esfuerzo cortante en la (dirección tangente a la) interface. La otra condición de frontera establece que el esfuerzo normal a la interface, dentro del fluido, debe ser balanceado por el esfuerzo normal debido a la tensión superficial, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= p_a - p \\ &= p_a + \rho g z^* - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} - c, \end{aligned} \quad (17)$$

donde σ es la tensión superficial del fluido, $(1/R_1 + 1/R_2)$ es la curvatura media de la superficie, p_a es la presión atmosférica (la cual sin pérdida de generalidad de ahora en adelante consideraremos nula) y p es la presión hidrostática obtenida en la sección anterior [Ec. (13)]. La Ec. (17) es conocida como ecuación de Young-Laplace [6].

La ecuación diferencial para la curvatura media [9], permite reescribir la Ec. (17) en la forma

$$\sigma \frac{\frac{d^2 z^*}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dz^*}{dr^*} \left[1 + \left(\frac{dz^*}{dr^*} \right)^2 \right]}{\left[1 + \left(\frac{dz^*}{dr^*} \right)^2 \right]^{3/2}} = \rho g z^* - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^{*2} - c. \quad (18)$$

Por claridad en los cálculos introducimos en la Ec. (18) un escalamiento en las coordenadas de la forma: $r = r^*/R$, $z = z^*/FR$, donde F es el número de Froude, el cual se construye mediante el cociente de las fuerzas inerciales ($\rho \Omega^2 R$) a las fuerzas gravitacionales (ρg) [1], i.e., $F = \Omega^2 R/g$. Este escalamiento nos permite encontrar una ecuación diferencial adimensional de la forma

$$\frac{1}{Bo} \left\{ \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \left[1 + F^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] \right\} = z - \frac{r^2}{2} - c', \quad (19)$$

$$\left[1 + F^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2}$$

donde c' es una constante adimensional y $Bo = \rho g R^2/\sigma$ es un parámetro adimensional conocido como el número de

Bond [6]. El número de Bond relaciona los parámetros del fluido (densidad y tensión superficial) con la gravedad y el radio del cilindro [6] y es una cantidad importante en la mayoría de los fenómenos capilares. El problema planteado por la ecuación diferencial (19) es no lineal y su solución analítica válida para todo F y Bo hasta ahora no se conoce. Por tanto, de aquí en adelante limitaremos el problema a soluciones lineales, es decir, imponemos la condición

$$1 \gg F^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2. \quad (20)$$

Físicamente esta condición asegura que el problema se resuelve para pequeñas velocidades angulares (bajos F) y leves cambios en la pendiente de la superficie libre (pequeños valores de dz/dr). En tal caso la ecuación diferencial (19) se transforma en

$$\frac{1}{Bo} \left[\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \right] = z - \frac{r^2}{2} - c'. \quad (21)$$

La solución adimensional de la superficie libre es entonces

$$z = \frac{1}{2} r^2 + 2 \frac{1}{Bo} - \frac{1}{Bo} M I_0(\sqrt{Bo} r). \quad (22)$$

La cantidad

$$M = \left(\int_0^1 r I_0(\sqrt{Bo} r) dr \right)^{-1}, \quad (23)$$

se obtuvo suponiendo la conservación del volumen de fluido [Ec. (15)], y $I_0(\sqrt{Bo} r)$ es la función modificada de Bessel de orden cero.

Comúnmente, el número de Bond puede relacionarse también con la constante capilar o longitud capilar $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$, en la forma $Bo = R^2/a^2$. Por tanto, este número también da una medida relativa de la longitud de la zona donde la tensión superficial supera a la gravedad. Así, el caso $Bo \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow 0$), implica que la influencia de la tensión superficial en la superficie libre (Ec. (19)) llega a ser nula. Lo contrario también es cierto: si $Bo \rightarrow 0$ las longitudes características de los fenómenos capilares es varias veces mayor que la longitud característica del sistema en el cual el fluido se encuentra confinado.

Para mostrar algunos aspectos importantes de los cálculos realizados previamente graficamos la superficie libre tomando en cuenta un cilindro de radio $R = 2.6$ cm (o radio adimensional $R = 1$). Supondremos que este sistema (para el cual se satisface que $\theta_w = \pi/2$) fué llenado con mercurio, y que rota a una velocidad angular muy baja de manera que $F \simeq 0.1336$. En este caso, la longitud capilar es $a \simeq 0.26/\sqrt{2}$, el número de Bond es $Bo = 200$ y $M \simeq 9.8848 \times 10^{-5}$. Estos valores de Bo y M cumplen exactamente con el hecho de que el ángulo de mojado, θ_w , es $\theta_w = \pi/2$. En efecto, si evaluamos

$$\frac{dz}{dr} = 0 \text{ en } r = 1, \quad (24)$$

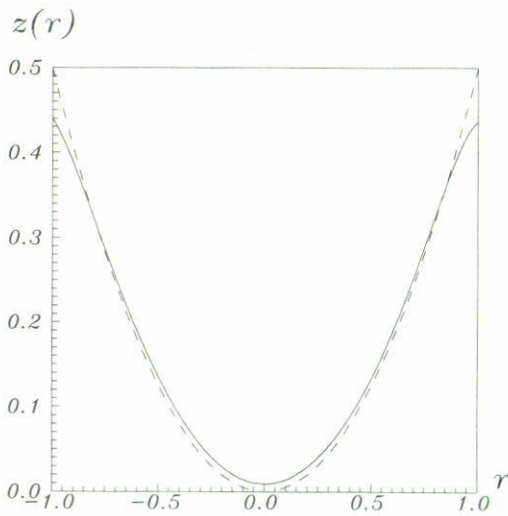


FIGURA 1. Gráfica adimensional de la superficie libre de un fluido dentro de un cilindro circular pequeño con rotación eje simétrica. La curva continua corresponde al caso para el cual $Bo = 200$ y la curva a trazos corresponde al caso sin tensión superficial ($Bo \rightarrow \infty$). En ambos casos el número de Froude es $F \simeq 0.1336$.

mediante la Ec. (21), encontramos que

$$\frac{\sqrt{Bo}}{M} = I_1(\sqrt{Bo}), \tag{25}$$

lo cual da

$$Bo = 200. \tag{26}$$

La gráfica (bidimensional) adimensional de la superficie libre [Ec. (21)] para estos valores de Bo , M y F la mostramos en la Fig. 1. Obsérvese que también hemos graficado la superficie libre para el caso sin tensión superficial ($Bo \rightarrow \infty$); aunque en la gráfica bidimensional se aprecian parábolas, las superficies libres en realidad son paraboloides. Un aspecto interesante que se nota a primera vista es la elevación central de la superficie libre afectada por la tensión superficial respecto a los paraboloides sin tensión superficial. Dicha elevación en el centro, $\Delta z \equiv z(r = 0)$, la obtenemos de la Ec. (22) y tiene la forma $\Delta z = 2(1/Bo) - (M/Bo)$. Por comparación calculamos Δz para mercurio y para agua con el mismo número de Froude, $\Delta z \simeq 0.009$, mientras que para agua ($Bo \simeq 0.0896$) $\Delta z \simeq 0.1664$. En este caso la ele-

vación del agua en el capilar que rota, bajo las mismas condiciones de mojado ($\theta_w = \pi/2$), es dos ordenes de magnitud mayor que la del mercurio!.

4. Conclusiones

- De acuerdo con los resultados previos debemos de destacar algunos hechos importantes. El cálculo de la superficie libre con y sin influencia de los efectos capilares es muy cómoda en el sistema no inercial. El aspecto más notorio en el cálculo de la superficie libre es que para cilindros pequeños hay una desviación importante de la nueva forma superficial, respecto al paraboloides de revolución, esto debido a la inclusión de la tensión superficial en la ecuación de balance de esfuerzo normal a la superficie libre. Esta desviación crece si R disminuye y/o si σ crece. Más aún, ya que la ecuación de la superficie libre depende de los parámetros del material a través del número de Bond, lo cual no ocurre en el caso ideal ($Bo \rightarrow \infty$), esto implica que la forma superficial depende del fluido y del medio material en el que está inmerso.

Desde un punto de vista formal es también muy importante observar que el problema dado por la Ec. (19) tiene una singularidad esencial si $Bo \rightarrow 0$ ya que el lado izquierdo de dicha ecuación queda indeterminado. De igual manera, si el límite impuesto por la desigualdad (20) no se mantiene, la búsqueda de una solución a la ecuación diferencial no lineal resultante es muy complicada. En ambos casos se requiere de técnicas matemáticas especiales (como la teoría singular de perturbaciones y el análisis asintótico) las cuales son muy sensibles a leves variaciones de las coordenadas espaciales. Debido a esto, comunmente se buscan soluciones locales que bajo un proceso de acoplamiento producen soluciones globales. Los adecuados escalamientos (en función de los cuales se dan las variaciones) de las coordenadas son parte del problema mismo. Detalles de estos métodos pueden encontrarse en libros de matemáticas avanzadas [10]. El uso de estos métodos, incluso para el caso de grandes números de Froude, están ahora en progreso.

Agradecimientos

El autor agradece a los Profesores César Treviño y Francisco Higuera sus valiosas sugerencias respecto a algunos puntos de este trabajo.

1. L.D. Landau y I.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London (1959).
2. J.L. Troutman, *Variational Calculus*, Springer-Verlag, New York (1983).
3. F.M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw Hill, New York (1994).
4. H.B. Squire, Rotating Fluids en *Surveys in Mechanics*, Editado por G.K. Batchelor y R.M. Davies. Cambridge University Press, Londres (1956).
5. G.M. Kapoulitsas, *Acta Mechanica* **122** (1997) 123.
6. S. Middleman *Modeling Axisymmetrical Flows: Dynamics of Films, Jets, and Drops*. Academic-Press, San Diego (1995).
7. Z. Ogorlec, *Eur. Jour. Phys.* **16** (1995) 256.
8. J. Lighthill, *An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1986).
9. I.N. Bronshtein y K.A. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*. Van Nostrand Reinhold Co., New York (1985).
10. C.M. Bender y S.A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers*. McGraw-Hill, New York (1978).