

Dinámica de vórtices en el sistema Chern-Simons-Higgs cerca del enlace crítico

A.I. Nesterov¹ and M. Flores Pérez²

*Departamento de Física, Universidad de Guadalajara
Guadalajara Jalisco, Mexico.*

e-mail: ¹nesterov@udgserv.cencar.udg.mx, ²mflores@physics.fismat.udg.mx

Recibido el 10 de marzo de 1998; aceptado el 4 de septiembre de 1998

En el modelo Chern-Simons-Higgs investigamos la dinámica del sistema no relativista de n -vórtices sobre el plano y cerca del enlace crítico. Encontramos el lagrangiano efectivo y en el caso de dos vórtices bien separados hicimos un análisis detallado.

Descriptores: Chern-Simons; vórtices

The dynamics of n non-relativistic vortices in Chern-Simons-Higgs system defined on infinite plane and near the critical coupling, is investigated. The effective lagrangian is found and a motion of two well separated vortices is studied with details.

Keywords: Chern-Simons; vortices

PACS: 11.15.Kc, 11.15.Ex, 74.20.Kk

1. Introducción

La "auto-dualidad" es una idea muy poderosa en la mecánica clásica y en la teoría del campo clásico, así como también en mecánica cuántica y en la teoría del campo cuántico. Esta auto-dualidad se refiere a teorías en las cuales las interacciones tienen formas particulares y fuerzas especiales, tales como las ecuaciones de segundo orden del movimiento que se reducen a ecuaciones de primer orden, las cuales son más simples de analizar. El "punto auto-dual", en el cual las interacciones y las fuerzas acopladas toman su valor especial auto-dual, corresponde a la minimización de alguna funcional, que frecuentemente es la energía o la acción. Estas teorías auto-duales dan una significancia física crucial. Por ejemplo, por mencionar algunas, las ecuaciones auto-duales de Yang-Mills tienen soluciones de acción mínima conocidas como instantones, las ecuaciones de Bogomol'nyi de la teoría auto-dual de Yang-Mills tiene soluciones de energía mínima conocidas como monopolos, y el modelo abeliano de Chern-Simons-Higgs (CSH) [1, 2] tiene soluciones auto-duales, las cuales implican campos escalares cargados acoplados mínimamente al campo de norma, cuya "dinámica" está provista por el término Chern-Simons (CS) en dimensión $(2 + 1)$.

El contexto físico en el cual tales modelos auto-duales surgen, es el de la teoría del campo cuántico aniónico. Usualmente las propiedades estadísticas de las partículas en la mecánica cuántica se conocen de dos formas o categorías: fermiones y bosones. Pero en el espacio de dimensión dos son bien conocidas las partículas de estadística fraccional (los aniones), las cuales no son exactamente los bosones o los fermiones y pueden satisfacer una u otra estadística o ninguna de estas dos [3-5]. La mecánica cuántica de muchos aniones ha sido investigada activamente en los últimos años en relación

a su relevancia directa al efecto Hall cuántico fraccional y su papel teórico en la superconductividad de altas temperaturas. Como fue enfatizado por varios autores, este nuevo superconductor está caracterizado por su naturaleza dos-dimensional y una estadística fraccional, la cual en el lenguaje de la teoría de campo puede estar relacionada con el término Chern-Simons en la teoría $(2 + 1)$ -dimensional abeliana de norma.

La teoría Chern-Simons en dimensión $(2 + 1)$ es muy atractiva ya que ésta exhibe varios aspectos teóricos interesantes, entre otros mencionamos las soluciones que corresponden a solitones y vórtices, ya sea topológicos y no-topológicos, muchas características de las cuales pueden deducirse analíticamente [6]. Durante las últimas dos décadas el estudio de los vórtices ha llegado a ser un tema interdisciplinario entre lo que es la física del estado sólido y física de partículas. La teoría de Ginzburg-Landau, que es la teoría macroscópica de la superconductividad, reconoció soluciones localizadas de vórtices [7]. Así como en el modelo abeliano de Higgs [8], el cual es el modelo relativista de la teoría de Ginzburg-Landau. Característicamente, esas soluciones de vórtices acarrean flujo magnético, pero son eléctricamente neutrales. El tema básico de este modelo es el referido a los aniones, un flujo cargado de partículas compuestas de una estadística inusual. Usualmente se toma la solución vórtices en la teoría de Ginzburg-Landau como este flujo; pero existen otras posibilidades. Con la introducción del término de Chern-Simons en el modelo abeliano de Higgs se observa que también existen soluciones vórtices. Esos vórtices de Chern-Simons-Higgs son diferentes a los vórtices de Nielsen-Olesen [9] en que ellos acarrean carga eléctrica, así como también flujo magnético.

Hay algunos rasgos o características especiales asociadas con las soluciones vórtices en el sistema de Chern-Simons. Anteriormente, la naturaleza del límite de Bogomol'nyi es

escasamente diferente de lo que se conocía, mientras que en la teoría original de Nielsen-Olesen los vórtices requerían de un campo escalar con el potencial de cuarto orden; el sistema de vórtices de Chern-Simons-Higgs requiere de un potencial de sexto orden $|\phi|^6$. La introducción del término $|\phi|^6$ en el potencial escalar no es artificial a la luz del criterio de renormalización en dimensión $(2+1)$. Ya que ϕ es un parámetro de orden complejo, esta diferencia en la forma del potencial (o energía libre) puede predecir una diferencia fenomenológica al de la teoría original de Ginzburg-Landau. Notaremos que al tener el vórtice CSH, el término maxwelliano no es necesario, ya que el término CS es dominante sobre el término de Maxwell en una región grande (o equivalentemente, en el límite de valores grandes para el coeficiente κ del término de CS). Más sin embargo, muy recientemente, Deser y Yang [2] observaron que el mecanismo de Higgs puede transmutar un campo de norma no-dinámico en un boson de norma. Así entonces al corroborar que hay un mecanismo de Higgs, la dinámica no se pierde con la ausencia del término de Maxwell.

El estudio de la dinámica de vórtices es muy difícil debido a la complejidad del problema. Sin embargo, en el caso no relativista que corresponde al movimiento con la energía baja, la dinámica de vórtices puede ser descrita como la dinámica sobre el espacio de moduli, el cual está parametrizado por las posiciones de los vórtices [10–12]. En esta aproximación adiabática se supone que la configuración del campo CSH es muy cercana a la configuración auto-dual y que la acción efectiva está determinada por esta última. El lagrangiano efectivo más general, el cual describe el movimiento de n -vórtices en el espacio de los parámetros, es la suma de la energía cinética, energía potencial y el término lineal, que conduce a la fuerza de Magnus [13, 14]. El término lineal fue obtenido en la forma explícita [13], pero hasta la fecha la parte cuadrática no fue encontrada en la forma explícita.

En nuestro trabajo en la aproximación adiabática de Manton [10] investigamos la dinámica de vórtices CSH en el plano cerca del límite de Bogomol'nyi. El artículo está organizado en la manera siguiente. En la Sec. 2 consideramos el sistema de n -vórtices CSH cerca del enlace crítico (o cerca del límite de Bogomol'ny) y obtenemos el lagrangiano efectivo. En la Sec. 3, utilizando los métodos analíticos y numéricos (paquete MAPLE V), estudiamos el sistema de 2-vórtices bien separados.

2. Dinámica de n -vórtices en la aproximación adiabática

Consideremos la teoría de un campo escalar complejo $\phi = (f/\sqrt{2})e^{i\theta}$ interactuando con un campo de norma A_μ cuyo término cinético es el de Chern-Simons. El lagrangiano para esta teoría está dado por [13]

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + \frac{f^2}{2} (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2 - V(f), \quad (1)$$

donde

$$V(f) = \frac{1}{8\kappa^2} f^2 (f^2 - v^2)^2.$$

Es conveniente hacer el siguiente cambio de variables :

$$f \rightarrow fv, \quad x^\mu \rightarrow (\kappa/v^2)x^\mu, \quad \partial_\mu \rightarrow (v^2/\kappa)\partial_\mu, \\ A_\mu \rightarrow (v^2/\kappa)A_\mu, \quad \mathcal{L} \rightarrow (v^3/\kappa)^2 \mathcal{L}$$

con el cual el lagrangiano cambia al lagrangiano adimensional

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + \frac{f^2}{2} (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2 - V(f), \quad (2)$$

con el potencial $V = \frac{1}{8} f^2 (f^2 - 1)^2$. De este lagrangiano uno obtiene las ecuaciones del campo

$$\partial_\mu^2 f - (\partial_\mu \theta + A_\mu)^2 f + V'(f) = 0, \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij} F_{0j} + f^2 (\partial_i \theta + A_i) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu (f^2 (\partial_\mu \theta + A_\mu)) = 0, \quad (5)$$

$$F_{12} + f^2 (\dot{\theta} + A_0) = 0. \quad (6)$$

La energía E del sistema está limitada por $E \geq E_{min} > 0$. Este límite está saturado, satisfaciendo

$$\dot{f} = 0, \quad (7)$$

$$\partial_i f \mp \epsilon_{ij} f (\partial_j \theta + A_j) = 0, \quad (8)$$

$$\dot{\theta} + A_0 \pm \frac{1}{2} (f^2 - 1) = 0, \quad (9)$$

$$F_{12} = \pm \frac{f^2}{2} (f^2 - 1). \quad (10)$$

Si hay un sistema de n -vórtices con sus posiciones en los puntos \mathbf{q}_a , $a = 1, \dots, n$, la fase θ puede elegirse como

$$\theta = \sum_a^n \arg(\mathbf{r} - \mathbf{q}_a), \quad (11)$$

la cual satisface $\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \theta = 2\pi \sum \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_a)$. Las Ecs. (7) a (11) implican que

$$A_i = \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j \left(\frac{\ln f^2}{\prod_{a=1}^n |\mathbf{r} - \mathbf{q}_a|^2} \right), \quad (12)$$

y la función f satisface

$$\Delta \ln f^2 - f^2 (f^2 - 1) = 4\pi \sum_{a=1}^n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_a). \quad (13)$$

Como se sabe las soluciones estáticas auto-duales para n -vórtices del sistema de Ecs. (7) a (10) dependen de $2n$ parámetros determinando la posición de los vortices [11]. Además es conveniente definir $F_{(n)}^2 = f^2 / \prod_{a=1}^n (\mathbf{r} - \mathbf{q}_a)^2$,

donde la función $F_{(n)}$ describe la solución para n -vórtices y satisface

$$\Delta \ln F_{(n)}^2 - \prod_{a=1}^n (\mathbf{r} - \mathbf{q}_a)^2 F_{(n)}^2 \times \prod_{a=1}^n (\mathbf{r} - \mathbf{q}_a)^2 F_{(n)}^2 - 1 = 0, \quad (14)$$

y $A_i = \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j \ln F_{(n)}^2$. Enseguida elegimos el signo superior.

La aproximación adiabática significa que la dinámica del campo es aproximada por permitir que las coordenadas \mathbf{q}_a varíen en el tiempo. La derivada temporal del campo de Higgs está aproximada por [10–12]

$$\dot{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{q}(t + \Delta t)) - f(\mathbf{r}, \mathbf{q}(t))}{\Delta t},$$

y similarmente para el campo de norma A_μ . Además, en esta aproximación las perturbaciones de las configuraciones del campo no serán atendidas.

Ahora consideremos la dinámica de vórtices auto-duales con un potencial específico de sexto orden

$$V(f) = \frac{\lambda + 1}{8} f^2 (f^2 - 1)^2$$

en la aproximación adiabática y cerca del acoplamiento crítico ($\lambda \ll 1$). Se supone que para el sistema de n -vórtices, la configuración del campo de vórtices, que se mueven lentamente, es muy cerrada a la configuración estática y la acción efectiva está determinada por la configuración auto-dual de los vórtices. El lagrangiano para n -vórtices que se mueven lentamente, con posición del centro del vórtice $\mathbf{q}_a(t)$ sería entonces

$$L(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) = \int \sum_{a,b=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_a^i} \frac{\partial f}{\partial q_b^j} + f^2 \frac{\partial \theta}{\partial q_a^i} \frac{\partial \theta}{\partial q_b^j} \right) \dot{q}_a^i \dot{q}_b^j - \tilde{U} \right] d^2 r - 2\pi \sum_{a=1}^N A_i(q_a) \dot{q}_a^i, \quad (15)$$

donde

$$\tilde{U}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \frac{\lambda}{8} f^2 (f^2 - 1)^2.$$

Definiendo el tensor métrico g_{ij}^{ab} en el espacio de los parámetros $\{q_a^i\}$ como

$$g_{ij}^{ab} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial q_a^i} \frac{\partial f}{\partial q_b^j} + f^2 \frac{\partial \theta}{\partial q_a^i} \frac{\partial \theta}{\partial q_b^j} \right) d^2 r,$$

el lagrangiano (15) lo podemos reescribir como

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N g_{ij}^{ab} \dot{q}_a^i \dot{q}_b^j - 2\pi \sum_{a=1}^N A_i(q_a) \dot{q}_a^i - U(\mathbf{q}_a), \quad (16)$$

donde $U(\mathbf{q}_a) = \int \tilde{U} d^2 r$ es la energía potencial. La energía total para nuestro caso está dada por

$$E = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N g_{ij}^{ab} \dot{q}_a^i \dot{q}_b^j + U(\mathbf{q}_a). \quad (17)$$

Así, en la aproximación adiabática el análisis de la dinámica de vórtices, se reduce a la investigación de un sistema mecánico (16).

3. Dinámica de 2-vórtices

Consideremos un sistema de dos vórtices cuyos centros están localizados en los puntos $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ y $\mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}$ en el plano. La simetría de la configuración implica [13]

$$F_{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = F_{(2)}(\mathbf{r}, -\mathbf{q}) = F_{(2)}(-\mathbf{r}, -\mathbf{q}),$$

que nos conduce a

$$\begin{aligned} -2\pi \sum_{a=1}^2 A_i(\mathbf{q}_a) \dot{q}_a^i &= 2\pi \epsilon_{ij} \partial_j \ln F_{(2)}^2(\mathbf{r}, \mathbf{q})|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}} \dot{q}^i \\ &= -\frac{2\pi}{\rho} \partial_r \ln F_{(2)}^2(\mathbf{r}, \mathbf{q})|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}} \epsilon_{ij} q^i \dot{q}^j, \end{aligned} \quad (18)$$

donde introducimos $\rho = |\mathbf{q}|$. Para este caso tenemos el problema de la mecánica clásica (similar al de dos cuerpos), el cual se reduce a un solo cuerpo y que se conoce como sistema de masa reducida. Pero como las masas no son constantes, sino que son funciones, esto no podemos arreglarlo de una manera simple. Ahora bien, calculando el lagrangiano de (16) en coordenadas polares (ρ, φ) , encontramos que

$$L = \frac{1}{2} (m_{\parallel} \dot{\rho}^2 + m_{\perp} \rho^2 \dot{\varphi}^2) + B \rho^2 \dot{\varphi} - U(\rho), \quad (19)$$

donde

$$m_{\parallel} = \int d^2 r \left[4F_{(2)}^2 \rho^2 + W \left(\frac{\partial F_{(2)}}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\partial F_{(2)}^2}{\partial \rho} \right] \quad (20)$$

es la masa “radial”, y

$$m_{\perp} = \int d^2 r \left[4F_{(2)}^2 \rho^2 + \frac{W}{\rho^2} \left(\frac{\partial F_{(2)}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial W}{\partial \chi} \frac{\partial F_{(2)}^2}{\partial \chi} \right] \quad (21)$$

es la masa angular, con $W = r^4 - 2r^2\rho^2 \cos 2(\varphi - \chi) + \rho^4$ y $d^2r = r dr d\chi$. El campo $B(\rho)$ es definido de la siguiente manera:

$$B = -\frac{2\pi}{\rho} \partial_r \ln F_{(2)}^2(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}}, \quad (22)$$

y donde $F_{(2)}$ satisface

$$\Delta \ln F_{(2)}^2 - W F_{(2)}^2 (W F_{(2)}^2 - 1) = 0. \quad (23)$$

La energía correspondiente del sistema está dada entonces por

$$E = \frac{1}{2} (m_{\parallel} \dot{\rho}^2 + m_{\perp} \rho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\rho), \quad (24)$$

donde la energía potencial es

$$U(\rho) = \frac{\lambda}{8} \int W F_{(2)}^2 (W F_{(2)}^2 - 1) d^2r. \quad (25)$$

Introduciendo el momentum angular

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_{\perp} \rho^2 \dot{\varphi} + B \rho^2, \quad (26)$$

expresamos la energía (24) del sistema como

$$E = \frac{1}{2} m_{\parallel} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}, \quad (27)$$

donde

$$U_{\text{eff}} = \frac{(M - B \rho^2)^2}{2m_{\perp} \rho^2} + U(\rho) \quad (28)$$

es el potencial efectivo.

Así, uno puede ver que el problema se reduce a la investigación de la dinámica de partículas con masas variables m_{\parallel} radial y m_{\perp} angular, moviéndose en el potencial central y en el campo "magnético". Las trayectorias de la partícula las podemos encontrar a través de

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{(M - B \rho^2) \sqrt{m_{\parallel}/m_{\perp}}}{\rho^2 \sqrt{2m_{\perp}(E - U_{\text{eff}})}} d\rho, \quad (29)$$

$$t - t_0 = \int \frac{\sqrt{m_{\parallel} m_{\perp}}}{\sqrt{2m_{\perp}(E - U_{\text{eff}})}} d\rho. \quad (30)$$

En efecto el problema para determinar las trayectorias es complicado así como el cálculo de las integrales (29) y (30) es bastante complicado por las funciones desconocidas m_{\parallel} , m_{\perp} y B ; pero en caso $\rho_{\text{min}} \gg 1$, donde ρ_{min} es la distancia mínima entre los vórtices, uno puede estudiar la dinámica del sistema con más detalle. Adaptaremos el método introducido por Sergeev y Chechin [15] para la descripción de la dispersión de vórtices en el modelo abeliano de Higgs (2+1)-dimensional. Sea r_v el radio característico del vórtice (como se sabe de [16] $r_v \sim 1$). Cuando $\rho_{\text{min}} \gg r_v$ la función $F_{(2)}$ solución para dos-vórtices puede presentarse como una superposición

$$F_{(2)} \approx F_{(1)}(\rho_1) F_{(1)}(\rho_2), \quad (31)$$

donde $F_{(1)}$ es la solución para un-vórtice y $\rho_{1,2}$ es la distancia entre el punto dado y el centro del primer (o segundo) vórtice.

Es conveniente dividir el plano en dos partes: Σ_0 retirado de ambos vórtices y $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ cerca de uno de los vórtices, donde Σ_1 y Σ_2 son los extremos donde comienzan los vórtices de radio r_0 con centro en los puntos $(q, 0)$ y $(-q, 0)$ respectivamente, y esto se asume así: $r_v \ll r_0 \ll \rho_{\text{min}}$. La expresión (31) y las condiciones asintóticas $F_{(2)}^2 W \rightarrow 1$ para $r \rightarrow \infty$, nos llevan a

$$F_{(2)}^2 \approx \frac{1}{W} = \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2} \quad \text{en la región } \Sigma_0, \quad (32)$$

$$F_{(2)}^2 \approx \frac{F_{(1)}^2(\rho_1)}{\rho_2^2} \quad \text{en la región } \Sigma_1, \quad (33)$$

$$F_{(2)}^2 \approx \frac{F_{(1)}^2(\rho_2)}{\rho_1^2} \quad \text{en la región } \Sigma_2, \quad (34)$$

donde $F_{(1)}$ es la solución para un-vórtice de la Ec. (14). Para el cálculo de las integrales utilizamos coordenadas bipolares (u, v) con los centros de los vórtices en los puntos $\pm q$,

$$u + iv = \ln \left(\frac{q+z}{q-z} \right),$$

donde $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Con esas condiciones se obtiene

$$\rho_{1,2}^2 = \frac{2\rho^2 e^{\pm u}}{\cosh u + \cos v}.$$

La región Σ_0 coincide aproximadamente con $\Sigma_u = \{|u| \leq u_0\}$ y la región Σ con $\tilde{\Sigma}_u = \{|u| \geq u_0\}$, donde $u_0 \approx \ln(2\rho/r_0) \gg 1$. Utilizando las condiciones (32), (33) y (34) se puede evaluar la contribución $m_{\parallel}(\Sigma_u)$ y $m_{\perp}(\tilde{\Sigma}_u)$ de las regiones Σ_u y $\tilde{\Sigma}_u$. Los cálculos nos conducen a

$$m_{\parallel}(\Sigma_u) = 2 \int_0^{u_0} du \int_0^{2\pi} dv \left[1 - \frac{4}{(\cosh u + \cos v)^2} \right] + O(r_0^2/\rho^2) \approx 4\pi \ln \frac{2\rho}{r_0}, \quad (35)$$

$$m_{\parallel}(\tilde{\Sigma}_u) = 4\pi \int_{u_0}^{\infty} du (4\rho^2 e^{-2u}) F_{(1)}^2(\rho_2) + O(r_0^2/\rho^2) \approx 4\pi \ln \frac{r_0}{r_v}. \quad (36)$$

La masa total $m_{\parallel} \approx m_{\parallel}(\Sigma_u) + m_{\parallel}(\tilde{\Sigma}_u)$ está dada por

$$m_{\parallel} \approx 4\pi \ln \frac{2\rho}{r_v}. \quad (37)$$

Un cálculo similar para la masa m_{\perp} nos lleva a

$$m_{\perp} \approx 4\pi \ln \frac{2\rho}{r_v}. \quad (38)$$

Así, la masa radial m_{\parallel} y la masa angular m_{\perp} coinciden hasta potencias de segundo orden (r_v/ρ). La función B encontrada es

$$B = 2\pi/\rho^2, \quad (39)$$

y la función $U = \lambda U_0$, donde

$$U_0 = \frac{\pi}{4} \int r^3 F_{(1)}^2(r) [r^2 F_{(1)}^2(r) - 1] dr$$

o como

$$U_0 \approx -\frac{\pi}{16} A r_B^4,$$

donde $r_B \sim 1.5$ y $A \sim 0.0389$.

Ahora calculamos el ángulo de dispersión $\Delta\varphi = |\pi - 2(\varphi_{\infty} - \varphi_{\min})|$, donde

$$\varphi_{\infty} - \varphi_{\min} = \int_{\rho_{\min}}^{\infty} \frac{(M - B\rho^2)\sqrt{m_{\parallel}/m_{\perp}}}{\rho^2 \sqrt{2m_{\perp}(E - U_{eff})}} d\rho. \quad (40)$$

Sustituyendo las expresiones (37), (38) y (39) en (40) obtenemos

$$\varphi_{\infty} - \varphi_{\min} = \pm 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2-c \ln t}}, \quad (41)$$

donde establecemos que $t = \rho_{\min}/\rho$ y $c^{-1} = \ln(2\rho_{\min}/\rho)$, ($c \ll 1$); y donde el signo positivo corresponde a $M > 2\pi$ y el signo menos a $M < 2\pi$. Calculando lo anterior, finalmente obtenemos

$$\Delta\varphi = \pm \frac{c}{2} + O(c^2). \quad (42)$$

Esta expresión es igual para los casos tanto de $\lambda \neq 0$ o $\lambda = 0$ existiendo una pequeña diferencia tan sólo en la magnitud c . De (42) en el límite cuando $\rho_{\min} \rightarrow \infty$ el ángulo de dispersión es igual a cero. Esto no es sorpresa por razón que para

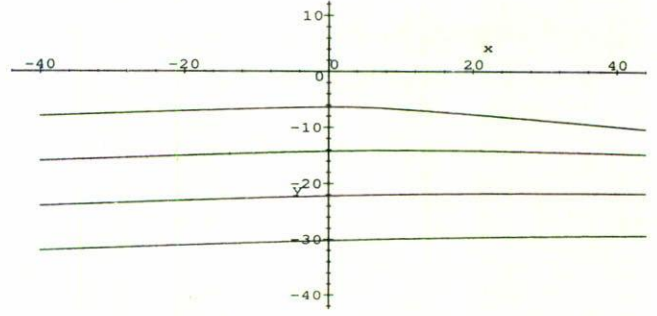


FIGURA 1. Las trayectorias de vórtices sobre el plano (x, y) con varias condiciones iniciales. Se observa que el ángulo de dispersión $\Delta\varphi \rightarrow 0$ en el límite para cuando $\rho_{\min} \rightarrow \infty$.

$\rho_{\min} \rightarrow \infty$ los vórtices se comportan como partículas libres; igual que en el modelo abeliano de Maxwell-Higgs [12].

En la Fig. 1 presentamos nuestro análisis numérico del comportamiento del sistema, el cual comprueba las predicciones analíticas. Los resultados numéricos fueron obtenidos utilizando el paquete MAPLEV (R.3).

4. Conclusiones

En este trabajo hemos investigado la dinámica de vórtices en el sistema Chern-Simons-Higgs (CSH) cerca del enlace crítico, definido por $\lambda \neq 0$; haciendo una comparación clara y concisa con lo que es el sistema de Maxwell-Higgs. Encontramos, que en el caso de dos vórtices para $\rho_{\min} \gg 1$, el movimiento de los vórtices es infinito y casi libre; el ángulo de dispersión tiende a cero cuando $\rho_{\min} \rightarrow \infty$.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por CONACyT, proyecto No. 1626P-E.

1. S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** (1982) 372.
2. S. Deser and Z. Yang, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 2123.
3. J. Leinass and J. Myrheim, *Nuovo Cimento B* **37** (1977) 1; G. Goldin, R. Menikoff, and D.H. Sharp, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 1664; F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957; Y.S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2103.
4. S.K. Kim and H. Min, *Phys. Lett. B* **281** (1992) 81; L. Hua and C. Chou, *Phys. Lett. B* **308** (1993) 286.
5. F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957.
6. G. Dunne, *Self Dual Chern Simons Higgs Theories*; hep-th/9410065
7. R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. D.* **23** (1981), 2291; J. Schonfeld, *Nucl. Phys. B.* **185** (1981) 157; S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975.

8. R. Pisarski and S. Rao, *Phys. Rev. D* **32** (1985), 2081; S. Paul and A. Khare, *Phys. Lett. B* **171** (1986) 244.
9. H.B. Nielsen and P. Olsen, *Nucl. Phys. B* **61** (1973) 45.
10. N.S. Manton, *Phys. Lett. B* **110** (1982) 54.
11. P.A. Shah and N.S. Manton, *J. Math. Phys.* **35**, (1994) 1171.
12. P.A. Shah, *Nucl. Phys. B* **429** (1994) 259.
13. Y. Kim and K. Lee *Phys. Rev. D* **49** (1994) 2041.
14. K. Lee *Int. Journ. Mod. Phys. A* **12** (1997) 1001.
15. A.G. Sergeev and S.V. Chechin, *Theor. Math. Phys.* **85** (1990) 397.
16. R. Jackiw and E.J. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2334.