

Estados electrónicos en puntos cuánticos semiconductores con geometría elipsoidal

A. Echevarría-Montano y J. Tutor-Sánchez*

*Departamento de Física Teórica, Facultad de Física, Universidad de la Habana
San Lázaro y L. Vedado 4, Ciudad de la Habana, Cuba*

Recibido el 13 de mayo de 1997; aceptado el 21 de septiembre de 1998

En el presente trabajo se estudian los estados electrónicos de un gas de electrones libres confinado al interior de un punto cuántico semiconductor. Con el objetivo de obtener resultados generales, se utiliza un modelo con una geometría elipsoidal para puntos cuánticos en casos tridimensionales, bidimensionales y unidimensionales dentro de un mismo marco calculacional. Se obtiene la ecuación trascendente para los niveles de energía, así como la función de onda normalizada. Los cálculos se realizaron en la aproximación de masa efectiva y no se tuvieron en cuenta efectos de anisotropía para la misma. Se compara con el caso límite esférico reportado por otros autores.

Descriptores: Estados electrónicos en puntos cuánticos

Single-particle states of a quasi-zero-dimensional electron gas confined in a semiconductor quantum dot were investigated. With the aim to be more realistic an ellipsoidal geometry was supposed for the quantum dot assuming a strong confinement regime for the electron gas. In such way it is possible to get an useful approach to study quasi-two-dimensional, quasi-one-dimensional and three-dimensional quantum dots. Eigenvalues and eigenfunctions were obtained under the effective-mass approximation with independent position effective mass in an isotropic material. Results and discussion were devoted to the prolate spheroidal coordinates case. Results were compared with the limiting case of spherical geometry done by other authors.

Keywords: Electronic states in quantum dots

PACS: 71.25.Hc; 73.20.Dx; 73.20.Mf

1. Introducción

En la última década el impresionante progreso en la fabricación de estructuras semiconductoras de baja dimensionalidad ha hecho posible obtener sistemas cuasi-bi-dimensionales (Q2D), cuasi-uni-dimensionales (Q1D) e incluso sistemas cuya dimensión efectiva es cero para los llamados puntos cuánticos (QD) [1-7]. Los efectos de confinamiento en tales sistemas semiconductores han atraído considerablemente la atención tanto teórica como experimental. En particular, los electrones confinados en QD's muestran comportamientos impresionantes. Tales estructuras acopladas a fuentes de voltaje y corriente a través de uniones de tunelamiento han tomado diversos nombres como: transistores mono-electrónicos e islas coulombianas [8]. Sin embargo, algunos autores han preferido llamarles "átomos artificiales", al considerar que su carga nuclear efectiva es controlada por electrodos metálicos [9]. No obstante las diversas denominaciones, la motivación tecnológica básica de los QD's es que con componentes ultrapequeños se obtienen respuestas más rápidas, y menos disipativas térmicamente que sus contrapartes de mayor dimensionalidad. Más aún, existen muchas nanoestructuras naturales tales como las del silicio poroso [10] y una gran variedad de estructuras biológicas que hacen de las nanoestructuras un tema de gran interés para la ingeniería, la química, la ciencia de los materiales y la biofísica molecular, entre otras.

De acuerdo con la forma geométrica de los puntos cuánticos, las escalas de confinamiento en tres direcciones mutuamente perpendiculares (L_x, L_y, L_z), pueden ser diferentes, indicando que aun cuando todas las dimensiones lineales sean comparables con las longitudes de onda de los portadores confinados pueden encontrarse situaciones asimétricas interesantes: punto cuántico cuasi-uni-dimensional (1DQD) (ej. $L_z \gg L_x, L_y$), punto cuántico cuasi-bi-dimensional (2DQD) (ej. $L_y, L_z \gg L_x$) y punto cuántico tridimensional (3DQD) ($L_x \sim L_y \sim L_z$). Esta situación geométrica exige una modelación más realista de los QD's a diferencia de los modelos esféricos, cúbicos o parabólicos más habituales en la literatura [7, 9, 11, 12].

Diversos autores, experimentalistas y teóricos, han tenido en cuenta puntos cuánticos con geometrías diferentes de los modelos esféricos, cúbicos y parabólicos [13-18]. Ashori [13], al referirse a la construcción y medición de "átomos artificiales", representa éstos en forma de elipsoides de revolución oblatados. En las Refs. 14 y 15 pueden observarse patrones de difracción por reflexión de electrones de altas energías (RHEED), en los que se evidencia la forma de elipsoides de revolución oblatados para puntos cuánticos auto-organizados (SAD) e islas incoherentes. En la Ref. 16 se presentan evidencias de que en el proceso de crecimiento de capas delgadas de CdSe, en las etapas preliminares, hay formación de puntos cuánticos en forma de elipsoides prolataados a manera de islas incoherentes. Los trabajos teóricos de Efros

y Rodina [17] y de Efros *et al.* [18] muestran la importancia de la no esfericidad de los "clusters" de CdSe en el estudio del ensanchamiento adicional de las transiciones interbandas, así como en los efectos de luminiscencia; en las Refs. 17, 18 se modelan "clusters" (o puntos cuánticos) elipsoidales, pero el efecto de no esfericidad es considerado como una perturbación anisotrópica al hamiltoniano de Luttinger, el cual es tratado en la aproximación esférica para los cálculos teóricos que en dichos artículos se realizan. Una modelación más realista, desde nuestro punto de vista, es considerar una geometría elipsoidal para los QD's que, usando coordenadas esferoidales prolataadas (p.e.c) o coordenadas esferoidales oblatadas (o.e.c), permitan obtener los casos límites mencionados anteriormente (o sea, el caso p.e.c tiene como casos límites el 3DQD y 1DQD para distintos parámetros de un elipsoide de revolución, mientras que el caso o.e.c tiene como casos límites el 3DQD y el 2DQD para otros parámetros geométricos del elipsoide). Esto último permitiría un tratamiento más adecuado de la interacción de los gases electrónicos cuasi-cero-dimensionales (Q0DEG) con campos externos.

El objetivo del presente trabajo es mostrar un procedimiento de cálculo de los estados mono-electrónicos en un QD de GaAs recubierto de una envoltura de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ masiva suponiendo una geometría elipsoidal al QD. Los cálculos realizados se efectuaron en el marco de la aproximación de masa efectiva y suponiendo la masa efectiva electrónica independiente de la posición, para lo cual se consideran dimensiones lineales al QD que permiten tal suposición. Se supuso además un régimen de confinamiento fuerte con potencial infinito en la superficie del QD.

Los estados electrónicos del electrón en QD's elipsoidales se calculan en la Sec. 2. En la Sec. 3 se discuten los resultados y se hacen comparaciones con el caso de QD's esféricos.

2. Estados mono-electrónicos

El operador de Hamilton para el modelo de un electrón con masa efectiva m^* , localizado en el interior de un punto cuántico de geometría esferoidal, se describe como

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + U(x, y, z), \quad (1)$$

donde $U(x, y, z)$, debido a la geometría esferoidal (prolataada/oblatada) supuesta del QD, es

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{z^2}{h^2} < 1, \\ \infty, & \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1, \end{cases} \quad (2)$$

correspondiente al límite de confinamiento fuerte [7, 11]. En el presente trabajo supondremos que las dimensiones del QD son suficientemente grandes de manera que la aproximación de masa efectiva pueda ser adoptada; además de considerar

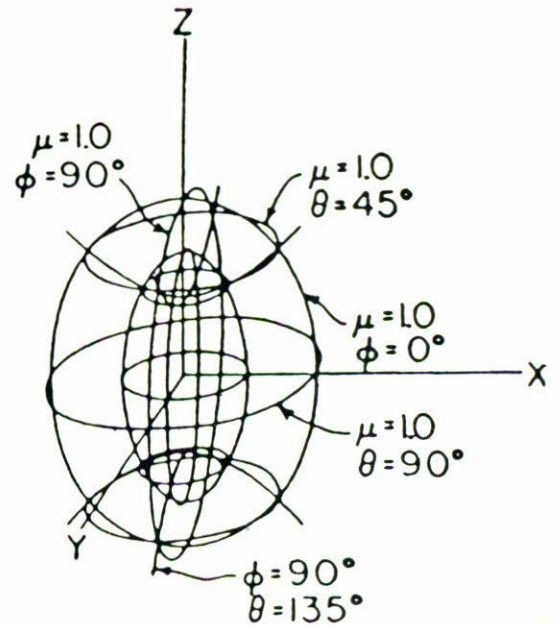


FIGURA 1. Representación gráfica de coordenadas esferoidales prolataadas: $\xi_1 = d \cosh \mu$; $\xi_2 = \cos \theta$; $\xi_3 = \cos \phi$. (Tomada de la Ref. 19 Cap. 5, §VIII, p. 661)

que m^* es independiente de la posición. La ecuación de autovalores correspondiente al caso estacionario será

$$\hat{H}\Psi = E\Psi. \quad (3)$$

Debido a la forma del potencial confinador, no podría ser considerada la existencia de simetría esférica en el problema, por lo cual el método de separación de variables será a través de las superficies cuádricas cofocales, o de sus formas degeneradas [19]. Por esta razón usaremos las coordenadas elipsoidales degeneradas

$$\begin{aligned} x &= \xi_3 \sqrt{(\xi_1^2 \mp d^2)(1 - \xi_2^2)}, \\ y &= \sqrt{(\xi_1^2 \mp d^2)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2)}, \\ z &= \xi_1 \xi_2, \end{aligned} \quad (4)$$

donde el signo $- (+)$ representa el caso de p.e.c (o.e.c); las representaciones gráficas de estas transformaciones de coordenadas se presentan en las Figs. 1 y 2.

En (4) el parámetro d representa la distancia focal en la geometría supuesta. Las superficies con $\xi_1 = \text{cte.}$ son elipsoides de revolución con semieje menor (mayor) $r = \sqrt{(\xi_1^2 \mp d^2)}$ en el caso p.e.c.(o.e.c.) y semieje mayor (menor) $h = \xi_1$ en el caso p.e.c. (o.e.c.); la excentricidad de la superficie será $\varepsilon = d/\xi_1$ para p.e.c. y $\varepsilon = d/\sqrt{\xi_1^2 + d^2}$ para o.e.c. y el volumen del elipsoide será $V = 4\pi(\xi_1^2 \mp d^2)\xi_1/3$.

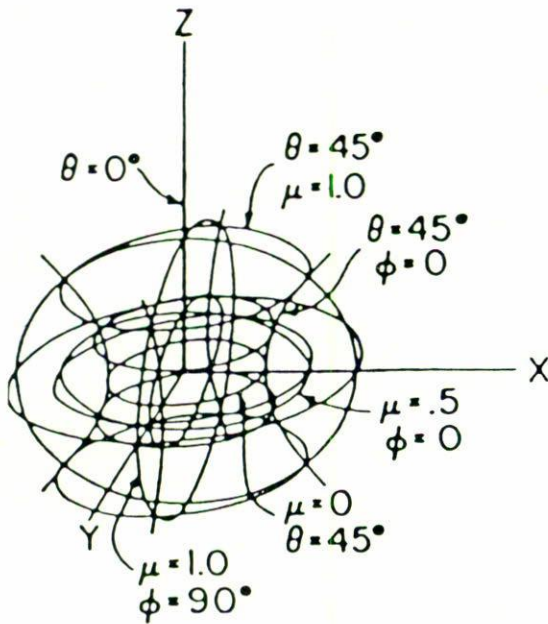


FIGURA 2. Representación gráfica de coordenadas esféricas oblatadas: $\xi_1 = d \sinh \mu$; $\xi_2 = \cos \theta$; $\xi_3 = \cos \phi$. (Tomada de la Ref. 19 Cap. 5, §IX, p. 662)

Debido a tales transformaciones, el problema de autovalores y autofunciones (3) se convierte en

$$\nabla^2 \Psi + k_1^2 \Psi = 0 \quad \begin{cases} \xi_1 > d, & (\text{p.e.c.}), \\ \xi_1 > 0, & (\text{o.e.c.}), \\ |\xi_2| < 1 \\ |\xi_3| < 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\Psi(\xi_1 = h) = 0,$$

donde $k_1^2 = 2m^* E / \hbar^2$.

Se propone que las autofunciones del problema son de la forma

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = R(\xi_1)S(\xi_2)\Phi(\xi_3) \quad (6)$$

y que además son ortonormales en la región definida en (5). De aquí se obtienen tres ecuaciones separadas y acopladas a través de las constantes de separación:

$$\frac{1}{(\xi_1^2 \mp d^2)} \frac{d}{d\xi_1} \left[(\xi_1^2 \mp d^2) \frac{dR}{d\xi_1} \right] + \left[k_1^2 + \frac{k_2^2}{\xi_1^2 \mp d^2} - \frac{k_3^2 d^2}{(\xi_1^2 \mp d^2)^2} \right] R = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{(1 - \xi_2^2)} \frac{d}{d\xi_2} \left[(1 - \xi_2^2) \frac{dS}{d\xi_2} \right] + \left[\pm k_1^2 d^2 + \frac{k_2^2}{\xi_2^2 - 1} + \frac{k_3^2}{(\xi_2^2 - 1)^2} \right] S = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \frac{d}{d\xi_3} \left[\sqrt{1 - \xi_3^2} \frac{d\Phi}{d\xi_3} \right] - \frac{k_3^2}{(\xi_3^2 - 1)} \Phi = 0 \quad (9)$$

En (9), si hacemos $\xi_3 = \cos(\phi)$,

$$\Phi(\phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{\pi}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad k_3^2 = -m^2 \quad (10)$$

Como se ve de (9) y (10), el número cuántico m estará relacionado con la componente del operador \hat{L} a lo largo del eje z del sistema de coordenadas rectangular ($L_z = m\hbar$), lo cual es lógico, pues en la geometría esferoidal supuesta se conserva L_z , ya que el problema tiene simetría azimutal.

Si se hacen los cambios de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\xi_1}{d}, \\ \lambda &= k_1^2 d^2 - k_2^2, \\ c &= k_1 d, \end{aligned} \quad (11)$$

Entonces (7) y (8) se convierten en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left[(x_1^2 - 1) \frac{dR}{dx_1} \right] - \left[\lambda - c^2 x_1^2 + \frac{m^2}{x_1^2 - 1} \right] R &= 0 \\ \frac{d}{d\xi_2} \left[(1 - \xi_2^2) \frac{dS}{d\xi_2} \right] + \left[\lambda - c^2 \xi_2^2 - \frac{m^2}{1 - \xi_2^2} \right] S &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

que están en coordenadas esféricas prolatas. El caso de las coordenadas esféricas oblatadas se obtiene directamente, *mutatis mutandis*, haciendo $c \rightarrow \mp ic$ y $x_1 \rightarrow \pm ix_1$ [20].

Las soluciones de S en (10) para (p.e.c) son

$$S_{ml}^{(1)}(c, \xi_2) = \sum_{k=0,1}^{\infty} d_k^{ml}(c) P_{m+k}^m(\xi_2), \quad (13)$$

$$S_{ml}^{(2)}(c, \xi_2) = \sum_{k=0,1}^{\infty} d_k^{ml}(c) Q_{m+k}^m(\xi_2). \quad (14)$$

La aparición del parámetro l se debe al siguiente razonamiento.

Al exigir que $S(\xi_2)$ sea continua y finita para $|\xi_2| \leq 1$ se encuentran los autovalores λ como función de c y m . Además, para una c dada hay infinitas soluciones $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$, que al ordenarse en forma creciente se obtiene que

$$\lambda = \lambda_{ml}(c) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

En (13) y (14), $P_1^{|m|}(\xi_2)$ y $Q_1^{|m|}(\xi_2)$ son los polinomios asociados de Legendre de primer y segundo tipo, respectivamente. Imponiendo la condición de normalización de las funciones $S_{|m|l}(x_2)$ se encuentra la relación entre m y l como sigue:

$$\begin{aligned} l &= 0, 1, 2, \dots \\ |m| &= 0, 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (15)$$

A través de las fórmulas de recurrencia para $d_k^{m,l}(c)$ [14], obtenemos las expresiones de los autovalores de λ :

$$\begin{aligned} \lambda_{|m|l} &= \sum_{k=0}^{\infty} q_{2k} c^{2k}, \\ q_0 &= l(l+1), \\ q_2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(2|m|-1)(2|m|+1)}{(2l-1)(2l+3)} \right], \\ &\dots \end{aligned} \tag{16}$$

(ver Ref. 20). El caso $\lambda_{ml}(c) = q_0 = l(l+1)$ se obtiene en el caso límite $c \rightarrow 0$ cuando la distancia focal $d \rightarrow 0$ para valores finitos de $k_1 \neq 0$. Este caso particular corresponde al de una esfera, en cuyo caso los estados electrónicos son esféricamente simétricos y l representaría el número cuántico orbital como es de esperarse.

Observando detenidamente la ecuación para $S(c, \xi_2)$ en (12), si multiplicamos dicha ecuación por \hbar^2 tenemos

$$\hbar^2 \frac{d}{d\xi_2} \left[(1 - \xi_2^2) \frac{dS}{d\xi_2} \right] + \hbar^2 \left[\lambda \mp c^2 \xi_2^2 - \frac{m^2}{(1 - \xi_2^2)} \right] S = 0, \tag{17}$$

(-) p.e.c.; (+) o.e.c.,

lo cual equivale a

$$\hat{\Lambda}^2 S = \hbar^2 \lambda S \tag{18}$$

donde

$$\hat{\Lambda}^2 = \hat{L}^2 \pm c^2 \xi_2^2 \hbar^2 \quad (-) \text{ p.e.c.}; (+) \text{ o.e.c.} \tag{19}$$

Este operador puede identificarse como uno de momentum angular "esferoidal" expresado en función del operador momentum angular esférico, más un término de corrección debido a la deformación alargada, o achatada, de la esfera. En el caso esferoideal Λ^2 representaría una magnitud que se conserva con autovalores $\hbar^2 \lambda_{ml}$.

En el caso (o.e.c)

$$\lambda_{ml} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_{2k} c^{2k} \tag{20}$$

y $S(-ic, \xi_2)$ están definidos en 21.8.3 de la Ref. 20.

Por último, la función radial solución de la primera ecuación en (12) es

$$\begin{aligned} R_{ml}^{(p)}(c, x_1) &= \left[\frac{1}{\sum_{k=0, l}^{\infty} \frac{(2|m+k)! d_k^{m,l}(c)}{k!}} \right] \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1^2} \right)^{|m|/2} \\ &\times \sum_{k=0, l}^{\infty} i^{k+|m|-1} \frac{(2|m|+k)!}{k!} d_k^{m,l} z_{|m|+k}^{(p)}(cx_1) \end{aligned} \tag{21}$$

donde $Z_1^{(p)}(z)$ se define en 21.9.1 de la Ref. 20. En consecuencia, la ecuación que determina el espectro de energía es

$$R_{m,l}^p(c, x_1^0) = 0 \tag{22}$$

donde c cumple con

$$c^2 = \frac{2m^* E d^2}{\hbar^2}. \tag{23}$$

De (22) y (23) vemos que

$$E = E(c, |m|, l; d), \tag{24}$$

donde c es un tercer número cuántico de nuestro problema y representa a un tipo de cuantización diferente al caso esférico. A diferencia de la simetría esférica E dependerá de un cuarto parámetro: x_1 que fijará la condición de homotecia.

Supongamos que la Ec. (22) se satisface para c_0 y x_1^0 ,

$$c_0^2 = \frac{2m^* E_0 d_0^2}{\hbar^2},$$

entonces (22), para $|m|$ y l fijo, será satisfecha también para E, d y x_1^0 siempre que

$$E = E_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^2, \tag{25}$$

puesto que al mantener x_1^0 fijo y variar d , se está haciendo una homotecia del elipsoide donde $E \propto 1/d^2$. Esto se cumple para cualquier tríada (c, l, m) y para cualquier partícula o cuasi-partícula considerada (electrones, huecos ligeros, huecos pesados). Puesto que el volumen del elipsoide es $V = 4\pi(x_1^2 \mp 1)x_1 d^3/3$ es obvio que $E(c, m, l) \propto V^{-3/2}$.

3. Discusión y conclusiones

En todos los cálculos se consideraron QD's de GaAs rodeados de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ masivo; se tomó el valor de masa efectiva electrónica igual a $m^* = 0.068m_0$ [1], siendo m_0 la masa del electrón libre. La Fig. 3 muestra los valores de c vs. ε (excentricidad) para los primeros cuatro estados electrónicos en el QD para $l = 0, m = 0$. En estas curvas se observa una similitud entre los autovalores de la energía para el caso p.e.c. y el caso o.e.c. para los mismos parámetros geométricos: ε y d . Esta similitud aumenta con la energía de los estados electrónicos. Según la definición de c [Ec. (23)], en el caso de límite esférico $c = 0$, pues la distancia focal y la excentricidad se anulan. Cuando ε tiende a 1 el número cuántico c tiende a infinito si d permanece constante; este caso corresponde, a una línea recta en el caso p.e.c., y a un plano en el caso o.e.c. lo cual es consecuente con el hecho de que al confinar totalmente al electrón en una línea recta o en un plano, su energía diverge. Para valores de $\varepsilon < 0.5$ se observa una tendencia, en ambas geometrías, hacia la de un QD esférico y por lo tanto los niveles de energía en ambos casos son casi iguales independientemente del estado energético que se analice. En la región $0.5 < \varepsilon < 0.9$ se diferencian los casos

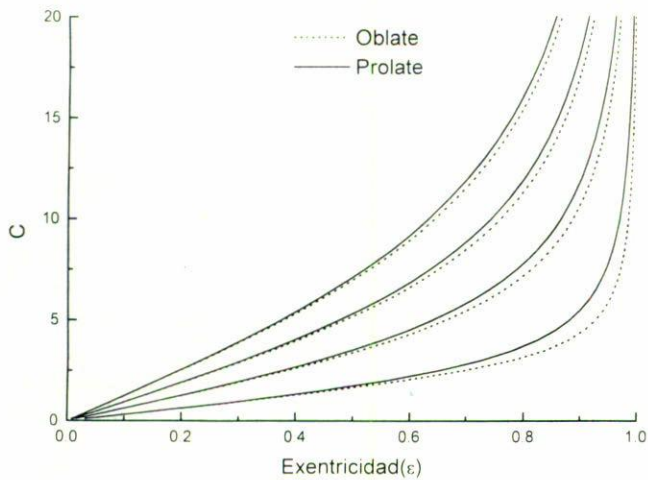


FIGURA 3. Parámetro c vs. excentricidad (ϵ) para los primeros cuatro estados electrónicos en el QD, $l = 0$, $m = 0$.

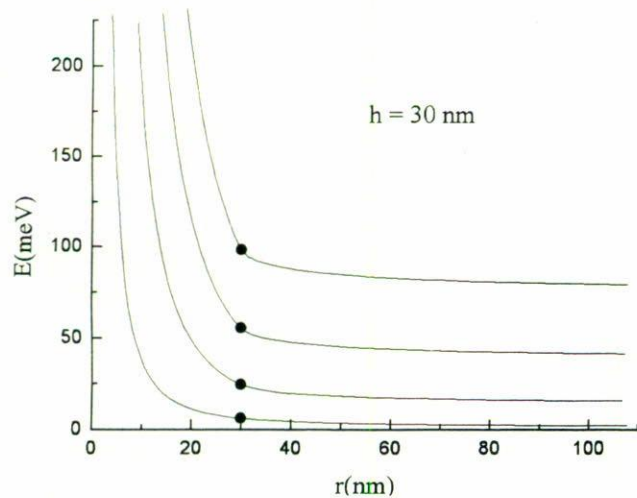


FIGURA 4. Energía de los primeros cuatro estados electrónicos vs. r . En el caso p.e.c, r representa el semieje menor; en el caso o.e.c, r representa el semieje mayor. Para ambos casos se toma la magnitud h (semieje de revolución) = 30 nm.

p.e.c. y o.e.c. fundamentalmente para los estados menos excitados. Esto se debe a que los estados menos excitados son menos sensibles a los cambios de geometría como se podrá analizar más profundamente los resultados mostrados en la Fig. 4. Para $\epsilon > 0.9$ se simplifica la dependencia de c con los parámetros característicos del QD: cuando se tiende al 1DQD sólo se dependerá del confinamiento en la dirección del semieje $r (\propto 1/r^2)$ y cuando se tiende al 2DQD se dependerá del confinamiento en la dirección del semieje $h (\propto 1/h^2)$. En la zona intermedia de valores de ϵ , la dependencia con r y h es más complicada y resulta de una competencia entre los límites señalados.

En la Fig. 4 se muestran los cuatro primeros niveles de energía electrónica vs. r (semieje menor p.e.c.; semieje mayor o.e.c.) manteniendo constante el valor de $h = 30$ nm (semieje mayor p.e.c.; semieje menor o.e.c.). Al aumentar r

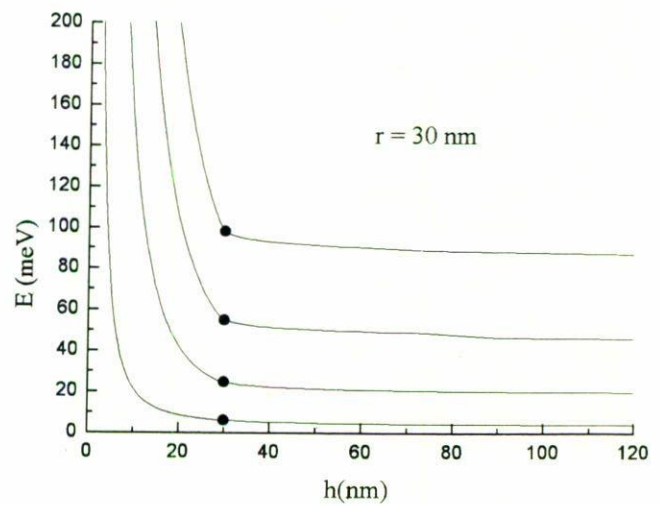


FIGURA 5. Energía de los primeros cuatro estados electrónicos vs. h . h representa el semieje de revolución del elipsoide en ambos casos (p.e.c y o.e.c). $r = 30$ nm en estas curvas.

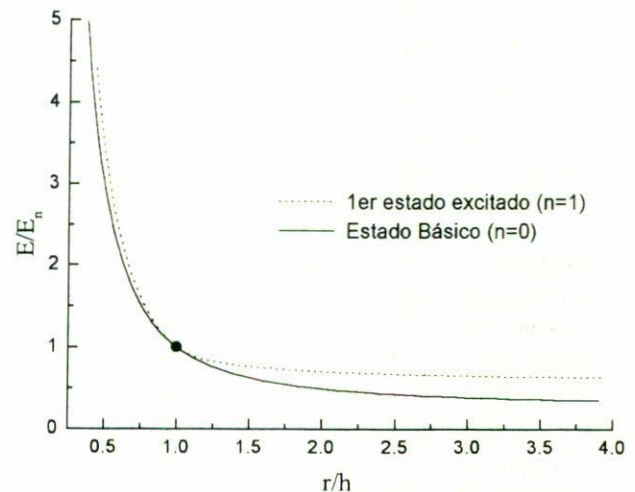


FIGURA 6. Representación universal del comportamiento de los estados electrónicos en un QD elipsoidal. E_n representa los niveles energéticos del QD esférico. E es la energía de los estados homólogos en el QD elipsoidal.

el QD elipsoidal tiende al caso 2DQD, que se comporta como un sistema Q2D. Como se observa, para valores grandes de r los niveles de energía no varían pues están determinados casi totalmente por el semieje de revolución h (semieje menor) que es ahora la dirección de confinamiento. En este caso hubo una transición de un 3DQD a un 2DQD. La diferencia de los valores de energía en la región $r > 30$ nm y $r < 30$ nm radica en que, en la primera región se está variando la longitud secundaria de confinamiento, mientras que en la segunda región varía la dirección principal de confinamiento (la de menor longitud). En el estado base, aun para valores de r algo menores que 30 nm, la energía no varía mucho, sin embargo, para los niveles superiores aparece una fuerte variación de la energía en cuanto disminuye un poco el valor de r . Esto indica que la forma geométrica de un punto cuántico influye más

en los estados más excitados. Los valores indicados por (●) representan los valores de energía correspondiente a un QD esférico de radio 30 nm.

La Fig. 5 es análoga a la anterior; en ella se presenta la dependencia de la energía en los primeros cuatro estados electrónicos *versus* h , el semieje de revolución (semieje mayor p.e.c.; semieje menor o.e.c.) manteniendo constante el valor de r (30 nm). Según lo predicho en el análisis de la Fig. 3, los resultados mostrados en esta Fig. 5 son cualitativamente análogos a los de la Fig. 4. En este caso, cuando $h \gg r$ se manifiesta una transición de un 3DQD a un 1DQD.

La Fig. 6 es una representación universal del comportamiento de los estados electrónicos en un QD elipsoidal *versus* la relación de los semiejes r/h . En el eje de las ordenadas se

grafica la relación de los valores de energía del QD elipsoidal $[E(c)]$ respecto a los valores de energía E_n para distintos niveles (n) del QD esférico. En las abscisas se grafica la relación r/h . En esta gráfica se resumen de forma general todos los análisis efectuados en las Figs. 3 y 4.

El presente trabajo permite mostrar una modelación más realista de los QD's que se ajusta a la clasificación dada por Johnson [6] y que se acerca mucho más a la variada tecnología de obtención de puntos cuánticos semiconductores. Además de los resultados expuestos acerca de los estados monoeléctricos en puntos cuánticos elipsoidales, el presente trabajo brinda una base para cálculos de estados de partícula simple, estados excitónicos acoplados, etc. lo cual intentarán los autores en trabajos futuros.

-
- * Dirección permanente: División de Ciencias Naturales y Básicas, Agencia de Ciencia y Tecnología, Calle 20 esquina 18-A. Miramar, Playa, Ciudad Habana, Cuba.
1. T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 473.
 2. M.A. Reed and W.P. Kirk, in "Nanostructure Physics and Fabrication", *proceedings of the International Symposium College Station Texas*, (Academic Press, 1989).
 3. F. Stern, in *SMR 459-11 Spring College on Physics of Low-dimensional Semiconductor Systems: Quantum Wires and Quantum Dots*, (ICTP Trieste, Italy, 1990).
 4. W.P. Kirk and M.A. Reed, "Nanostructures and Mesoscopic Systems", *proceedings of the International Symposium, Santa Fe, New Mexico, 1991*.
 5. Tutor, J. PhD. Thesis, Universidad de la Habana, Cuba, 1995.
 6. N.F. Johnson, *J. Phys. Condens. Matter* **7** (1995) 965.
 7. L. Bányai and S.W. Koch, *Semiconductor Quantum Dots*, (World Scientific Series on Atomic, Molecular, and Optical Physics, 1993) Vol. 2, Ch. 3.
 8. M.A. Kastner, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 849.
 9. M.A. Kastner, *Physics Today* **46** (1993) 24.
 10. L. Pavesi and R. Guardini, *Brazilian Journal of Physics* **26** (1996) 151.
 11. C.R. Proetto, in "Strong confinement approach for impurities in Quantum Dots", *SMR 859-32 Working party on the Fabrication, Physics, and Application of Quantum Dots*, (ICTP, Trieste, Italy, 1995).
 12. Y. Chiba and O. Shuhei, *Phys Rev.* **38** (1988) 12998.
 13. R.C. Ashoori, in "Adding electrons to Artificial atoms one by one", *SMR 859-27. Research Workshop on Condensed Matter Physics*, (ICTP, Trieste, Italy, 1995); *Working Party on the Fabrication, Physics and Applications of Quantum Dots*, (ICTP, Trieste, Italy, 1995).
 14. D. Leonard, K. Pond, and P.M. Petroff, *Phys. Rev. B* **50** (1994) 11687.
 15. A. Kutenbach *et al.*, *J. of Electr. Materials* **25** (1996) 395.
 16. O. de Melo and H. Rodríguez, (unpublished).
 17. A.L. Efros and A.V. Rodina, *Phys. Rev. B* **47** (1993) 10005.
 18. A.L. Efros *et al.*, *Phys. Rev. B.* **54** (1996) 4843.
 19. P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (Mc Graw Hill Book Company, Inc., 1953) Chap. 5.
 20. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 9th Edition, (Dover publications, Inc., New York, 1970) Chap 21.