

La tomografía dentro de un curso de óptica de Fourier: algunos arreglos optomecánicos ilustrativos

G. Rodríguez-Zurita¹, R. Rodríguez-Vera y A. Luna-Castellanos

Centro de Investigaciones en Óptica, Apartado postal 948, 37000 León, Gto., Mexico

¹Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas.

Apartado postal 1152, 72000 Puebla, Pue., Mexico.

Recibido el 26 de junio de 1998; aceptado el 13 de octubre de 1998

Se propone la presentación de la tomografía como un tópico avanzado adecuado para incluirse dentro de un curso de óptica de Fourier a nivel de posgrado. Se muestra una secuencia de exposición posible caracterizada por el empleo de las técnicas típicas de la óptica de Fourier, destacando luego algunos aparatos opto-mecánicos conocidos para ejemplificar justamente los métodos de análisis de Fourier. Finalmente, se describe un aparato simplificado, como una práctica de laboratorio de óptica de Fourier, que ilustra el teorema central de Fourier. Se muestran los resultados experimentales correspondientes al arreglo previamente descrito.

Descriptor: Óptica de Fourier; experimentos de laboratorio; tomografía; procesadores ópticos

The introduction of tomography as an advanced topic to be included in a Fourier optics course at graduated level is proposed. It is shown a possible presentation sequence which features the use of typical Fourier optics techniques, as well as some well-known opto-mechanical devices as examples. Finally, a simplified apparatus which illustrates the central Fourier theorem as an experimental project on Fourier optics is described. Corresponding experimental results are also shown.

Keywords: Fourier optics; laboratory experiments; tomography; optical processors

PACS: 42.30.Wb; 01.50.Pa; 42.30.Kq; 42.79.Hp

1. Introducción

La tomografía es una técnica del tratamiento de imágenes con actualmente una gama muy amplia de aplicaciones [1, 3], la cual incluye áreas como la medicina [la tomografía de rayos X computarizada (CAT), la tomografía de ultrasonido, la tomografía con resonancia magnética y la tomografía de emisión positrónica (PET)]; la geofísica; la oceanografía; la meteorología; la inspección de materiales; y, en particular, la inspección de objetos transparentes en el rango visible [4] (tomografía óptica y tomografía interferométrica). La técnica reconstruye imágenes de secciones internas de cuerpos, cuyo interior no es accesible a la observación directa en general. La reconstrucción se realiza a partir de la información del objeto transportada en señales que lo atraviesan (proyecciones).

Aunque la práctica ha favorecido el empleo de métodos basados en el tratamiento digital de datos asistido con computador (algoritmos de *backscattering* o algoritmos algebraicos), los métodos de transformadas de Fourier resultan esenciales en la discusión conceptual típica tocante a los fundamentos de la técnica [5]. De hecho, el enfoque introductorio más difundido se basa en el teorema central de Fourier (*Central Fourier Theorem*, o *Fourier Slide Theorem*) [1, 6, 7]. Este teorema establece una relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Radon [8]. Gracias a la estrecha relación entre la tomografía y las técnicas de Fourier, la técnica de reconstrucción tomográfica de proyecciones paralelas pue-

de constituir un ejemplo muy ilustrativo de los métodos de Fourier desarrollados a lo largo de un curso de óptica de Fourier [9]. A su vez, este ejemplo introduce algunas de las propiedades de la transformada de Radon y también puede mostrar otros recursos analíticos relacionados (como la transformada de Abel, recurso propio de simetrías circulares).

Por otra parte, previamente a la proliferación de los microcomputadores se propuso una variedad de arreglos optomecánicos para tomografía [10], fundamentados en la capacidad de los sistemas ópticos para realizar la transformada de Fourier analógicamente [9]. Aunque la importancia práctica de estos arreglos se ha visto limitada ante el desarrollo de las técnicas digitales, dichos arreglos ejemplifican los métodos de Fourier, muy especialmente dentro del rango óptico. Entonces, una mención de los arreglos optomecánicos básicos puede redondear la discusión del tema dentro del marco de un curso de óptica de Fourier, aportando ilustraciones de las técnicas de transformada de Fourier óptica que eventualmente pueden conducirse en un laboratorio.

A lo largo del presente trabajo se propone una secuencia de exposición que, considerando las motivaciones anteriores, presenta a la tomografía como una aplicación de los métodos de Fourier. Tras definir la notación en términos de sistemas ópticos coherentes, la secuencia propuesta se inicia con un novedoso argumento de plausibilidad para el teorema central de Fourier y su relación con proyecciones paralelas, presen-

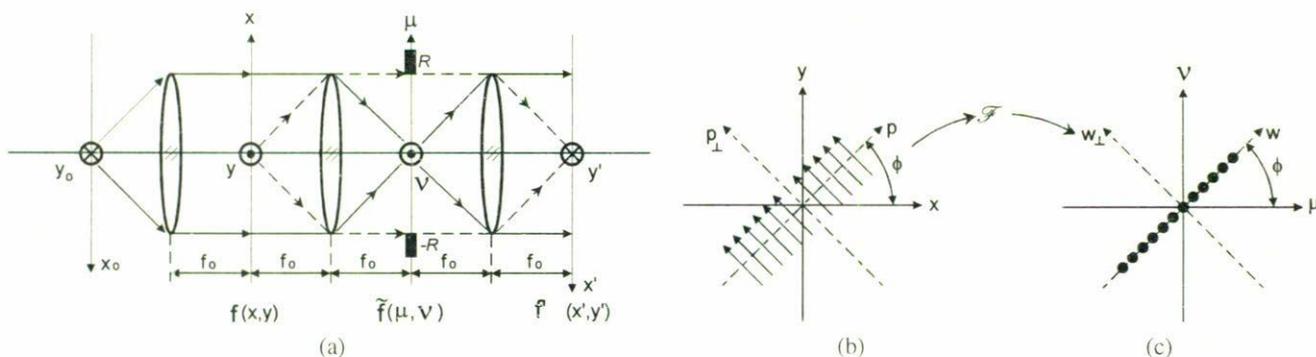


FIGURA 1. a) Sistema óptico telecéntrico para formar imágenes. (x_0, y_0) : coordenadas normalizadas de la fuente; (x', y') : coordenadas normalizadas de la imagen. b) Coordenadas normalizadas del objeto y coordenadas rotadas. c) Coordenadas normalizadas de las frecuencias espaciales y coordenadas rotadas. \mathfrak{S} , transformada de Fourier.

tando a la transformada de Radon. A continuación, se presenta algunas propiedades de esta última, tanto ilustrativas (transformada de Abel) como necesarias para la discusión posterior de un aparato optomecánico (*backprojections*). Luego, se consideran brevemente tres arreglos optomecánicos ilustrativos conocidos en la literatura, cuya función se relaciona con la tomografía. Entre los arreglos considerados, se destacan aquellos diseñados para registrar las transformadas de Fourier de proyecciones paralelas para que, en una etapa posterior, se pueda efectuar la reconstrucción ópticamente. De entre éstos, no dejan de mencionarse en particular los arreglos capaces de reconstruir distribuciones propias de objetos transparentes (objetos de fase) y que están provistos de una señal o haz de referencia para justamente poder detectar distribuciones de fase. Finalmente, se discute una versión simplificada de un arreglo optomecánico experimental llevado a cabo en un laboratorio de óptica, presentando una reconstrucción correspondiente obtenida al emplear una rejilla de Ronchi como objeto de inspección. El ejercicio propuesto constituye una ejemplificación del teorema central de Fourier en el laboratorio.

2. Teorema central de Fourier.

Existen excelentes y numerosas referencias exponiendo el teorema central de Fourier dentro del contexto del tratamiento de señales (ver, por ejemplo, las Refs. 1, 6–8). El enfoque aquí presentado, sin embargo, se expone como un argumento alternativo a los contenidos en las referencias más conocidas, argumentación que puede ser complementaria a éstos.

2.1. Formación de imágenes con un sistema óptico lineal: la notación empleada

Se considerará un sistema óptico coherente formador de imágenes, lineal e invariante, en una disposición telecéntrica para transformada de Fourier con lentes de igual longitud focal f_0 [9] (Fig. 1a). Las coordenadas de los planos objeto, de frecuencias espaciales (o plano de Fourier), y de imagen, se denotan por (X, Y) , (f_X, f_Y) y (X', Y') , respectivamente. Empleando las coordenadas normalizadas respecto al

diámetro de la pupila del sistema, R , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x &= \frac{RX}{\lambda f_0}, & y &= \frac{RY}{\lambda f_0} \\ \mu &= \frac{f_X}{R}, & \nu &= \frac{f_Y}{R} \\ x' &= \frac{RX'}{\lambda f_0}, & y' &= \frac{RY'}{\lambda f_0} \end{aligned} \quad (1)$$

(con λ la longitud de la onda empleada) e ignorando constantes multiplicativas no relevantes, en cada plano se obtienen las siguientes relaciones que describen las respectivas distribuciones de amplitud en los planos de frecuencias y de imagen:

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\mu, \nu) &= \tilde{f}(\mu, \nu) \cdot P_R(\mu, \nu), \\ f'(x', y') &= \mathfrak{S}^{-1}[\tilde{f}(\mu, \nu)], \end{aligned} \quad (2)$$

donde $P_R(\mu, \nu)$ es la función de pupila coherente, la distribución de amplitud objeto es $f(x, y)$, y su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mu, \nu) &= \mathfrak{S}[f(x, y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Cabe aclarar que esta notación se encuentra conveniente pese a que, en los arreglos experimentales a considerarse más adelante, el plano (x, y) no estará iluminado de la forma indicada en la Fig. 1a. Sin embargo, cuando la transformada de Fourier entre (μ, ν) y (x', y') se realice mediante una lente, las relaciones (1) serán de utilidad directa.

2.2. Proyección paralela como convolución: un argumento de plausibilidad

Por conveniencia, considérense los ejes coordenados rectangulares (p, p_\perp) y (w, w_\perp) obtenidos por rotación, al ángulo ϕ , de los ejes (x, y) y (μ, ν) , respectivamente. Entonces,

$$\begin{pmatrix} p \\ p_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} w \\ w_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \quad (4)$$

(ver Figs. 1b y 1c). Entre las coordenadas (p, p_{\perp}) y las (x, y) media, como constante de proporcional, sólo la unidad. Entonces, las coordenadas de proyección reales conservan igual relación con las (X, Y) .

Ahora bien, considérese los valores que toma la transformada $\tilde{f}(\mu, \nu)$ lo largo de una línea recta (muestreo de la transformada sobre línea recta) que cruce por el origen y tenga una inclinación ϕ respecto al eje horizontal. Dichos valores pueden escribirse como sigue:

$$\tilde{f}(\mu, \nu)\delta(-\mu \text{sen } \phi + \nu \cos \phi) = \tilde{f}(\mu, \nu)\delta(w_{\perp}), \quad (5)$$

y esquematizarse como en la Fig. 1c, donde $\delta(w_{\perp})$ denota una línea de muestreo a lo largo de la recta $w_{\perp} = 0$, es decir, a lo largo del eje w . Pero los muestreos de valores a lo largo de líneas se corresponden, en el plano del objeto, con la convolución entre las transformadas inversas de cada factor. De hecho, considerando que $\mathfrak{S}^{-1}[\delta(w_{\perp})] = \delta(p)$ para cualquier valor de ϕ , al determinar la transformada de Fourier del muestreo lineal [Ec. (6)] surgen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}^{-1}\{\tilde{f}(\mu, \nu)\delta(-\mu \text{sen } \phi + \nu \cos \phi)\} \\ &= \mathfrak{S}^{-1}\{\tilde{f}(\mu, \nu)\} * \mathfrak{S}^{-1}\{\delta(-\mu \text{sen } \phi + \nu \cos \phi)\} \\ &= f(x, y) * \delta(x \cos \phi + y \text{sen } \phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f(\xi, \eta)\delta[(x - \xi) \cos \phi + (y - \eta) \text{sen } \phi] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f(\xi, \eta)\delta(p - \xi \cos \phi - \eta \text{sen } \phi) \\ &\equiv \mathfrak{R}\{f(x, y)\} = \tilde{f}_{\phi}(p), \end{aligned} \quad (6)$$

donde el asterisco designa a la operación de convolución. Aquí se ha identificado a la transformada de Radon y se ha indicado por $\mathfrak{R}\{f(x, y)\}$ [8]. A la función $\tilde{f}_{\phi}(p)$ de la variable p resultante se le conoce también como la proyección paralela de $f(x, y)$ [8]. Esta proyección viene a ser la señal emergente de la sección del objeto cuando es atravesada por una onda de sondeo, tal como se esquematiza en la Fig. 1b.

De esta manera se puede establecer una relación entre la proyección paralela de la función, $\tilde{f}_{\phi}(p)$, y su transformada de Fourier, identificando a ésta como un muestreo, a lo largo de una línea, de los valores de la transformada de la distribución $\tilde{f}(\mu, \nu)$ (absorción o índice de refracción) buscada. Entonces, en principio, el conocimiento de todas las proyecciones paralelas de la distribución, equivale a conocer la transformada de Fourier de la distribución a lo largo de las líneas rectas que se cortan por el origen del eje de frecuencias. En consecuencia, mediante la transformación inversa puede determinarse la distribución, resultado que constituye el pilar de la tomografía.

2.3. El caso de la simetría circular: un ejemplo

Introducida la posibilidad de reconstrucción con base en proyecciones paralelas, podría aprovecharse la oportunidad para ilustrar algunas técnicas analíticas adicionales, en modo opcional y colateral al tema propuesto inicialmente, y tocar el punto de la simetría circular. Éste es el caso de tener una distribución radial caracterizada por obedecer a la propiedad $f(x, y) = f_r(r)$, con $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Al tratar de determinar la forma respectiva de su transformada de Radon, se puede inspeccionar su proyección paralela en coordenadas polares, para hallar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\phi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y)\delta(p - x \cos \phi - y \text{sen } \phi) \\ &= \int_p^{\infty} dr r f_r(r) \int_0^{2\pi} d\phi \delta(p - x \cos \phi - y \text{sen } \phi) \\ &= 2 \int_p^{\infty} dr r f_r(r) \int_0^{\pi} d\phi \delta(p - x \cos \phi - y \text{sen } \phi) \end{aligned} \quad (7)$$

donde se ha empleado la paridad de la integral respecto a ϕ . Por otra parte, puede mostrarse que [6]

$$\int_0^{\pi} d\phi \delta(p - x \cos \phi - y \text{sen } \phi) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - p^2}}, \quad (8)$$

de donde se obtiene que

$$\tilde{f}_{\phi}(p) = 2 \int_p^{\infty} dr \frac{r f_r(r)}{\sqrt{r^2 - p^2}} \equiv \mathcal{A}\{f_r(r)\} = f_A(p). \quad (9)$$

Esta forma particular de transformada integral $\mathcal{A}\{f_r(r)\}$ se conoce como la transformada de Abel [6, 7]. Se hace notar que $f_A(p)$ no depende del ángulo de proyección ϕ . Para considerar una discusión más amplia del caso de simetría circular, así como su relación con la tomografía, es recomendable acudir a la Ref. 7.

2.4. La retroproyección de proyecciones (backprojection): otro ejemplo

Usando una atinada interpretación para la coordenada p de proyección [6], ésta puede identificarse como $\vec{r} \cdot \hat{n}_p$, donde \vec{r} es un vector de coordenadas cartesianas (x, y) y \hat{n}_p es el vector unitario en dirección creciente de p . Entonces, $\tilde{f}_{\phi}(p) = \tilde{f}_{\phi}(\vec{r} \cdot \hat{n}_p)$ puede interpretarse como una función definida sobre (x, y) cuyo valor es el valor constante $\tilde{f}_{\phi}(p_0)$ para toda la recta determinada por la ecuación $\vec{r} \cdot \hat{n}_p = p_0$. De este modo, la proyección paralela equivale, gráficamente, a la impresión continua (o traza) de su propio valor sobre el plano (x, y) efectuada a lo largo de la dirección de p_{\perp} original (retroproyección, o *backprojection*). Al superponer todas las retroproyecciones sobre el plano de la sección, para todos los ángulos, se obtiene una imagen conocida como la imagen de superposición de retroproyecciones (*summation image*), denotándola provisionalmente como $b(x, y)$. Sustituyendo las

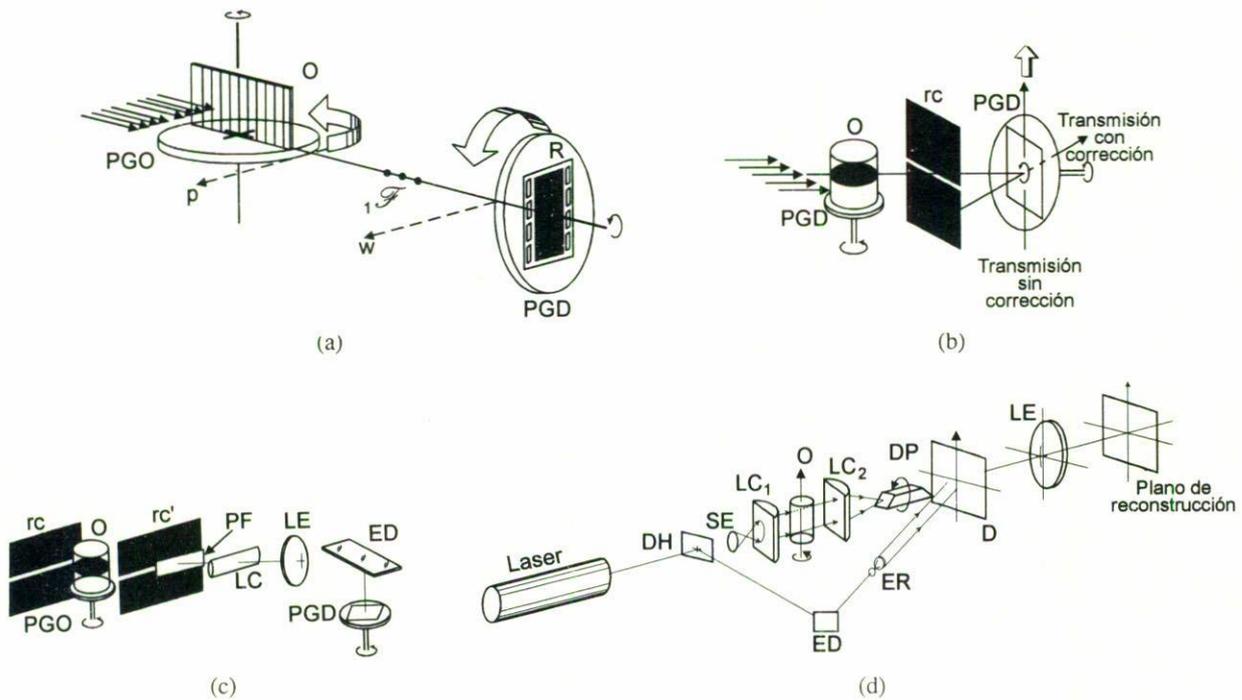


FIGURA 2. a) Esquema optomecánico básico para tomografía óptica. En una etapa posterior, debe obtenerse la transformada de Fourier del registro obtenido. O: objeto; PGO: platina giratoria objeto; R: medio de registro; PGD: platina giratoria de registro. \mathcal{F}_1 : transformada de Fourier unidimensional. b) Cámara de Lindegaard-Andersen. O: objeto; rc: rendija de colimación. c) Cámara de Peter. rc, rc': rendijas de colimación; PF: pantalla fluorescente; LC: lente cilíndrica; LE: lente esférica; ED: espejo desviador. d) Sistema coherente con referencia. DH: divisor de haz; SE, ER: expansores de haz; LC1, LC2: lentes cilíndricas; DP: prisma Dove giratorio; D: plano de la detección; LE: lente esférica de transformación bidimensional.

proyecciones paralelas por la relación de la Ec. (6), y cambiando los órdenes de integración, se tiene que la imagen de superposición de proyecciones es

$$\begin{aligned}
 b(x, y) &= \int_0^\pi d\phi \check{f}_\phi(x \cos \phi + y \sin \phi) \\
 &= \int_0^\pi d\phi f(x, y) * \delta(x \cos \phi + y \sin \phi) \\
 &= \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta f(\xi, \eta) \\
 &\quad \times \int_0^\pi d\phi \delta[(x - \xi) \cos \phi + (y - \eta) \sin \phi] \\
 &= \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\eta \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} f(\xi, \eta) \\
 &= f(x, y) * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{10}
 \end{aligned}$$

Así, $b(x, y)$ resulta ser, por su parte, una convolución entre la imagen de la sección del objeto, $f(x, y)$, con una cierta respuesta impulso del tipo $1/r$ (imagen “difuminada”). La imagen de superposición puede obtenerse mecánicamente, como se ejemplifica en la Sec. 3.1.1. Dicha imagen constituye una

versión de $f(x, y)$ de reducida fidelidad, pero susceptible de mejorarse con filtrado de cada proyección, por ejemplo (retroproyección filtrada).

3. Algunos arreglos optomecánicos

La Fig. 2a ilustra la idea fundamental para registrar apropiadamente a las transformadas unidimensionales de cada proyección paralela. Un arreglo debe satisfacer dos condiciones importantes: primero, al girar el objeto, debe girar en igual medida el medio de registro (o los datos respecto al medio de registro); segundo, el medio de registro debe captar la transformada de la proyección en una línea. Ambas condiciones sugieren colocar al objeto sobre una platina giratoria (PGO) que se encuentre engranada apropiadamente con una segunda platina giratoria (PGD) sobre la cual se halle el detector. Entre el plano emergente del objeto (plano de proyección, p) y el plano de detección (w) debe mediar una transformación de Fourier de la variable p a la variable w (unidimensional). Esta operación puede llevarse a cabo ópticamente [9]. En una etapa posterior, las muestras de los valores de la transformada así obtenidas deben someterse a una transformada inversa de Fourier, que puede hacerse también ópticamente. Se revisarán brevemente tres aparatos, propuestos en la literatura [10], que ponen en práctica esta idea.

3.1. Arreglos para registrar las transformadas de Fourier de las proyecciones paralelas

Se comentan tres arreglos opto-mecánicos directamente ilustrativos de las propiedades discutidas anteriormente.

3.1.1. La cámara de Lindegaard-Andersen

El aparato esquematizado en la Fig. 2b engrana adecuadamente las platinas giratoria objeto (PGO) y de detección (PGD), de modo que los ejes de giro resulten perpendiculares. La proyección se realiza con radiación X, mientras que la detección consiste en un registro fotográfico de la proyección [10]. Tras colimar el haz emergente con una rendija (rc), la proyección paralela incide sobre el plano de la detección. En este arreglo no se realiza la transformada de Fourier, porque se opta por efectuar la retroproyección (*backprojection*, Sec. 2.4) de manera mecánica. Puesto que la retroproyección de proyecciones paralelas consiste en la suma de las convoluciones de cada proyección con su línea de proyección original [6], cada proyección paralela debe trasladarse uniformemente (convolución) a lo largo de la línea de proyección durante cada toma de datos. Con ese propósito es que la platina (PGD) está adicionalmente provista de ejes de translación (cámara de Lindegaard-Andersen). De existir sólo el eje de translación contenido en el plano del detector, la cámara proporcionaría la imagen de superposición de retroproyecciones, $b(x, y)$, sin corrección de los posibles errores de colimación después de las exposiciones necesarias entre 0° y 180° . Para corregir los efectos ocasionados por desviaciones de una colimación perfecta, puede emplearse un eje inclinado en lugar del vertical [10].

3.1.2. La cámara de Peter

También diseñada para emplear rayos X [10], se efectúa la colimación del haz con una rendija apropiada (rc), recogiendo la proyección con una segunda rendija (rc') y una pantalla fluorescente (PF). El par de lentes cilíndrico (LC) y esférico (LE) realizan la transformada de Fourier unidimensional de la proyección [9] y envían su imagen sobre la película de registro. Ésta se encuentra montada sobre la plataforma giratoria (PGD) con eje de giro vertical, dado que se pliega al eje óptico 90° respecto del resto del sistema gracias a un espejo (ED) apropiado [10].

El registro obtenido por esta cámara requiere de un procesamiento posterior para conocer su transformada inversa de Fourier. Si el registro es fotográfico, la transformada inversa de Fourier puede realizarse ópticamente (Fig. 1a) en un arreglo suplementario.

3.2. Tomografía óptica de objetos transparentes

A diferencia de los arreglos anteriores, el método se propone para emplear iluminación coherente visible proveniente de un láser [11]. Además, el arreglo mostrado en la Fig. 2d incorpora una referencia para codificar la fase de la proyección

sobre el plano de la detección D. Así, no se graba la irradiancia de la proyección únicamente (proporcional a su módulo al cuadrado), sino que se puede reconstruir el frente de onda correspondiente a cada proyección (holograma). En el esquema, LC1 define el plano de la sección del objeto a estudiar, empleando el haz previamente expandido y colimado por un sistema óptico adecuado (SE). LC2 realiza la transformada unidimensional de Fourier y la dirige hacia un prisma tipo Dove provisto de giro. De esta manera, el medio de registro permanece estático, mientras los datos son quienes giran, rastreando el plano de detección. En el caso de emplear un medio de registro de ejecución en "tiempo real", la etapa de transformación inversa de Fourier puede realizarse "en línea" con una lente esférica (LE) como sugiere el esquema. La imagen de la sección estudiada se debe de observar en el plano de la reconstrucción al concluir la toma de todas las proyecciones necesarias entre 0° y 180° .

Los fundamentos de otros métodos optomecánicos (incorporando elementos electrónicos, por ejemplo) pueden consultarse en las Refs. [12, 13]. Las Refs. [14, 17] se sugieren para quien desee enterarse más sobre los métodos holográficos.

4. Tomografía con un objeto con periodicidad unidimensional

Un objeto de simetría cilíndrica, con eje de simetría a lo largo del eje de giro de PGO, presenta la conveniencia práctica de relajar un poco sus demandas en la iluminación. Un objeto periódico en una dirección, pero sin variación a lo largo del eje de giro de PGO pertenece al tipo de objetos citado. Además, siendo plano el objeto periódico, se cuenta con otra simplificación importante, porque así la difracción no ocurre dentro de un volumen (exceptuando muy cerca del plano conteniendo al objeto). Una clase de objetos semejante se describe mediante un tren de impulsos delta de Dirac (peine de Dirac), por lo cual éste se considerará a continuación.

4.1. El caso de las proyecciones del peine de Dirac

Considérese como una distribución objeto a un peine de Dirac de frecuencia espacial σ , y definido sobre el eje x . Entonces, para esta distribución se tiene la expresión

$$f(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi n\sigma) \delta(y). \quad (11)$$

Cualquier objeto periódico con perfil de ancho y formas determinadas puede expresarse como una convolución entre el peine de Dirac y la función describiendo el perfil apropiado.

Gráficamente (Fig. 3), puede mostrarse que las proyecciones paralelas del peine de Dirac resultan ser

$$\tilde{f}_\phi(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(p + n\sigma \cos \phi), \quad (12)$$

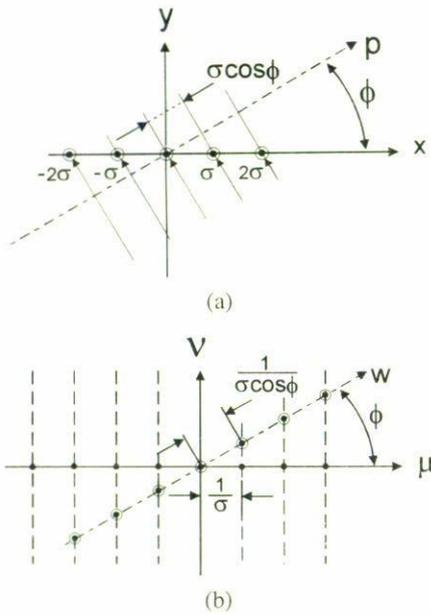


FIGURA 3. a) Peine de Dirac de frecuencia σ . b) transformada de Fourier del objeto anterior.

resultado que coincide con la transformada de Radon de la Ec. (6) porque, por sustitución,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[f(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x + n\sigma) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \delta(p - \cos \phi - y \sin \phi) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x + n\sigma) \delta(p - \cos \phi). \end{aligned} \quad (13)$$

4.2. La reconstrucción del peine de Dirac

El muestreo de la transformada de Fourier de cada proyección realizado a lo largo de una línea recta asociada a $\delta(x_{\perp})$ (Sec. 1.2), es también la transformada de Fourier unidimensional (de p a w), denotada en lo siguiente por ${}_1\mathfrak{F}\{\dots\}$. Conociendo que $\mathfrak{F}[\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(p - n)] = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - n)$ [9], se tiene que la transformada sobre todo el plano de las frecuencias espaciales cumple con la siguiente proporcionalidad

$${}_1\mathfrak{F}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(p + n\sigma \cos \phi)\right\} \propto \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(w + \frac{n}{\sigma \cos \phi}\right), \quad (14)$$

cuya representación gráfica consiste en líneas paralelas equidistantes (Fig. 3b). Algunos de estos resultados pueden verificarse experimentalmente como se describe en la siguiente sección. Se considerarán principalmente las posiciones de los máximos (impulsos).

5. Una práctica de laboratorio con rejilla de Ronchi

Una rejilla de Ronchi tiene como sección transversal a su rayado una función periódica unidimensional. Esto circunda pragmáticamente al problema de buscar un objeto con transmitancia en volumen diferente de cero porque, si bien una rejilla convencional tiene regiones de cero transmisión, éstas sólo tienen influencia muy cerca de ser iluminadas en dirección al plano que la contiene. Otra conveniencia consiste en que, si la frecuencia de la rejilla no es muy baja, la difracción de Fraunhofer ocasionada en un haz láser sin expandir puede observarse a una distancia no necesariamente muy grande.

5.1. Descripción del arreglo

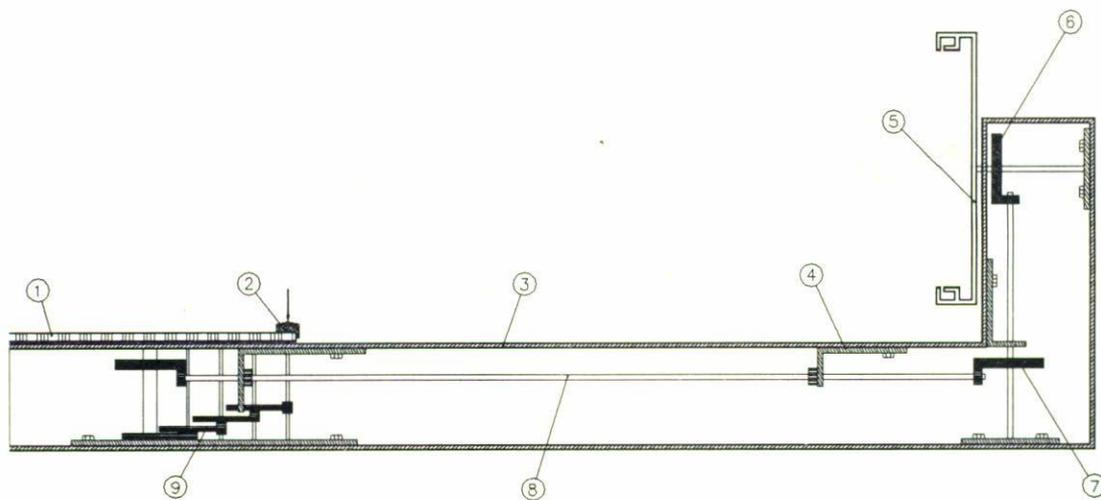
En la Fig. 4 se muestra un esquema del aparato empleado. La perilla de giro (2) se engrana (9) con la platina PGO para imprimirle, manualmente, una rotación. PGO (1) comparte su giro con la platina PGR (5) a través de una flecha de transmisión (8) y otro par de engranes (7,6). Los engranes, algunos de ellos plásticos (9), se obtuvieron como elementos de deshecho, mientras que la flecha de transmisión se realizó en el taller mecánico. La longitud de la carcasa (3) que soporta al sistema es de 38 cm, diseñada para dar cabida a lentes con longitudes focales de 10 cm y 20 cm. El porta película (5) se proveyó también de una ranura para sujetar la película, así como de una rendija de ancho variable. El aparato viene a ser la componente mecánica de una cámara tipo Lindegaard-Anderson para trabajar con radiación coherente en el rango visible, realizando la transformada de Fourier por difracción en lugar de efectuar la retroproyección. O resulta ser parte de una cámara de proyección de Peter, simplificando la óptica de transformación de Fourier [8].

5.2. Las limitaciones básicas del arreglo

Con un arreglo como el planteado sólo puede registrarse la irradiancia de la proyección, lo cual lo limita a estudiar objetos de absorción. Objetos puramente transparentes requieren de modificaciones al arreglo (inclusión de una referencia, o de un filtrado espacial *ad hoc*). Al iluminar con radiación visible, el objeto debe ser tal que las proyecciones puedan considerarse paralelas. Para distribuciones en volumen, lo anterior impone condiciones en la dimensión mínima del objeto (no muy pequeña), y en su refracción (no demasiado alta). Sin embargo, una de las ventajas de las distribuciones planas, como en el caso de la rejilla de Ronchi, es que dichas condiciones pueden relajarse considerablemente (la frecuencia puede ser alta, por ejemplo).

6. Resultados

Las sesiones de registro se realizaron con el arreglo experimental mostrado en la Fig. 5. Sobre la platina (PGO), con eje de giro vertical, se sujetó una rejilla de Ronchi con sus fran-



9	Engranes/platina			
8	Flecha de transmisión			
7	Engranes de conversión			
6	Engranes/porta película			
5	Porta película			
4	Soporte			
3	Estructura			
2	Perilla de giro			
1	Platina Giratoria			
No.	Denominación	Cant.	Material	Observaciones

FIGURA 4. Diagrama del aparato mecánico empleado. Mediante la perilla (2), manualmente se gira la platina giratoria (1) que soporta al objeto, gracias al engranaje indicado (9). El mismo giro se transmite, mediante el eje (8) y engranes (7) y (6), al portapelícula (5).

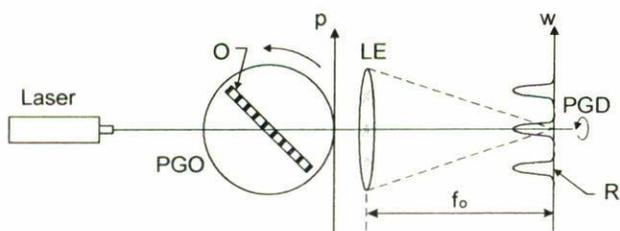
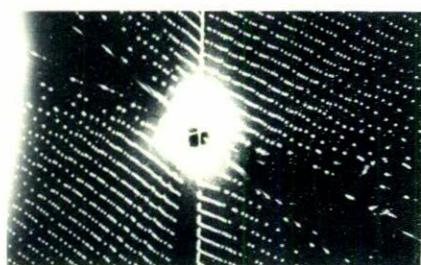


FIGURA 5. Arreglo experimental. Un haz láser sin expandir determina el eje óptico del sistema e incide en una rejilla de Ronchi (O) soportada por la platina giratoria (PGO). La lente esférica (LE) proyecta la transformada de Fourier de la rejilla sobre el plano de la película de detección (PGD).

jas alineadas con el eje de giro. El objeto se formó, por contacto, a partir de una rejilla de Ronchi comercial (150 líneas/pulgada según el fabricante) sobre una película fotográfica para holografía (Agfa Gavaert 10E75). Con ello se buscó evitar problemas suplementarios producidos por el espesor del substrato de vidrio de la rejilla original. El registro se realizó sobre película holográfica del mismo tipo. En esta etapa, otro tipo de película no ofreció resultados igual de satisfactorios debido a su reducido contraste (Plus-X, por ejemplo). Iluminando una pequeña región de la rejilla con un haz láser (He-Ne emitiendo a 632.8 nm) sin expandir, se buscó proyectar su campo de difracción lejano sobre el porta-película (PGD), el cual cuenta con eje de giro horizontal coincidiendo con el haz. Se requirió de una lente esférica de longitud focal $f_0 = 20$ cm para lograr enfocar el campo de

difracción precisamente sobre la película. Estos parámetros determinan un período espacial sobre la película de registro con valor de, aproximadamente, 0.8 mm ($\lambda f_0/u_0$, con $u_0 \sim 0.16$ mm, el período de la rejilla).

La tracción del sistema se llevó a cabo manualmente. Una vez obtenido el registro de un cierto número de tomas (fue posible realizar más de 30), y revelado, la reconstrucción de la sección se realizó con el auxilio de un sistema óptico de transformada de Fourier suplementario (sección del plano (μ, ν) al (x', y') de la Fig. 1a) empleando una lente de longitud focal $f_0 = 20$ cm e iluminado, de manera opcional, bajo dos tipos de radiación. Uno, con un láser como el empleado para la grabación. Otro, con un láser de He-Ne emitiendo luz verde (543.5 nm). La Fig. 6a muestra un conjunto de tomas registradas (ampliación del registro total, con contraste opuesto), mientras que la Fig. 6b, una ampliación de la respectiva transformada óptica de Fourier. Para destacar mejor los máximos de las tomas, al imprimir el positivo mostrado en la Fig. 6a, se obstruyó una región central brevemente para no exponer el papel fotográfico en exceso; pero el tamaño de la obstrucción resultó insuficiente y se formó un anillo en la impresión. El registro de tomas de datos resulta ser un muestreo, discreto en este caso, realizado a lo largo de líneas aproximadamente paralelas, de acuerdo con la Ec. (14) (Fig. 3b). La transformada óptica de las tomas, por su parte, pudo observarse como una serie de máximos alineados, lo cual corresponde a la sección de un objeto periódico [Ec. (11)]. Estos máximos, correspondientes a la sección transversal de la rejilla de Ronchi, resul-



(a)



(b)

FIGURA 6. Resultados experimentales. a) Típico registro fotográfico obtenido. Comparar con la Fig. 3b. b) Transformada de Fourier óptica del registro. La película resultó sobre-expuesta en torno al orden cero. Los máximos correspondientes a la sección transversal de la rejilla de Ronchi se alinean diagonalmente (de la izquierda arriba, a la derecha abajo).

taron registrados más débilmente que otras bajas frecuencias en la fotografía de la Fig. 6b, pero pueden distinguirse como puntos alineándose diagonalmente (desde la izquierda arriba, hacia la derecha abajo).

Dada la escala del patrón de máximos bajo iluminación con luz verde, la separación entre máximos adyacentes pudo estimarse midiendo la distancia entre dos máximos, teniendo entre ellos dos sólo un máximo intermedio. El valor determinado así resultó ser de $1.5 \text{ mm}/2 = 0.75 \text{ mm}$, correspondiendo a un período de rejilla medio calculado en 0.145 mm , valor cercano al implicado por las especificaciones del fabricante. El estudio de una rejilla de Ronchi no deja de ser útil en la calibración del instrumento porque puede servir para detectar errores del arreglo, juzgando la ejecución del aparato. Por ejemplo, un error en la alineación del sistema, puede hacer que el orden cero imprima un círculo sobre el registro como su traza después de varias tomas. Si la película tiene deformaciones, o si el sistema mecánico presenta movimientos

irregulares, la traza de los máximos de las tomas no resultará correctamente alineada. Tal como se recomienda en la literatura, conviene atenuar el orden cero para evitar la excesiva exposición de la película.

7. Comentarios finales

Se presentó a la tomografía dentro del marco ofrecido por los métodos de la óptica de Fourier, empezando por identificar a las proyecciones paralelas como una convolución. Permanece abierta la posibilidad de emplear este argumento para el estudio de otro tipo de proyecciones, para las cuales el muestreo sobre el plano de las frecuencias no sea sobre líneas rectas (tomografía con objetos difractores [1], por ejemplo; o tomografía con objetos caracterizados con una refracción considerable [18, 19]). Se mostraron también algunos ejemplos de métodos optomecánicos para ilustrar las técnicas de Fourier. En particular, se reportaron los resultados experimentales obtenidos con un aparato optomecánico simplificado, buscando con ello ilustrar experimentalmente el teorema central de Fourier. En el caso de la inspección de objetos transparentes dentro del rango visible, son necesarios los métodos ópticos de detección (ya sean interferométricos, o bien de filtrado espacial, o también holográficos). Puesto que dicho campo es de actual actividad, un ejercicio de tomografía en el laboratorio de óptica como el planteado puede proporcionar antecedentes pertinentes, así como estimular el diseño de nuevos arreglos útiles en dicha área particular.

Agradecimientos

Uno de los autores (GRZ) goza de una estancia sabática en el Centro de Investigaciones en Óptica de León, Gto. (México) bajo permiso de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. La colaboración de otro autor (ALC) se realizó cuando él aun no se graduaba, y se encontraba en la FCFM-BUAP. Se agradece la colaboración técnica del Ing. Fernando Torres Vallejo (Diseño optomecánico, CIO) para la ejecución del esquema del aparato presentada. Se reconoce también la asistencia técnica de José F. Vázquez Castillo en la obtención de los registros fotográficos (JVC se encuentra en capacitación técnica en el CIO, bajo permiso de la BUAP). El resto de las figuras las realizó Raymundo Mendoza Arce (Diseño optomecánico, CIO). Para el presente trabajo, se recibió apoyo parcial del CONACyT (claves 3649E y 92984).

1. A.C. Kak y M.Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, (IEEE Press, New York 1987).
2. G.T. Herman (ed.), *Topics in Applied Physics*, (Springer-Verlag, Berlin 1979) Vol. 32.
3. A.K. Jain, "Fundamentals of Digital Image Processing", *Infor-*

mation and System Science Series, edited by T. Kailath, Prentice Hall, New Jersey 1989).

4. A.J. Decker and S.H. Izen, *Appl. Opt.* **31** (1992) 7696.
5. A. Klug and R.A. Crowther, *Nature* **238** (1972) 435.
6. H.H. Barrett, en *Progress in Optics*, edited by E. Wolf, (North-

- Holland (Amsterdam 1984) Vol. XXI.
7. R.N. Bracewell, "Two-Dimensional Imaging", *Signal Processing Series*, edited by A.V. Oppenheim, (Prentice Hall, New Jersey 1995).
 8. S.R. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, (Krieger Publishing Co., Malabar 1993).
 9. J.W. Goodman, "Fourier Optics", 2nd edition, *McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering*, (McGraw-Hill, New York 1988).
 10. A.F. Gmitro *et al.*, *Opt. Enginner* **19** (1980) 260.
 11. A.L. Auslender, G.N. Vishnyakov, and G.G. Levin, *Optical Processor, Opt. Spectrosc* (USSR) **49** (1980) 518.
 12. A.F. Gmitro, G.R. Gindi, H.H. Barrett, and R.L Easton, *SPIE* **388** (1983) 132.
 13. J.E. Greivenkamp, W. Swindell, A.F. Gmitro, and H.H. Barrett, *Appl. Opt.* **20** (1981) 264.
 14. R.D. Matulka and D.J. Collins, *J. Appl. Phys.* **42** (1971) 1109.
 15. G. Groh, *Appl. Opt.* **10** (1971) 25.
 16. G.N. Vishnyakov and G.G. Levin, *Opt. Spectrosc.* (USSR) **53** (1982) 434.
 17. R. Snyder and L. Hesselink, *Appl. Opt.* **24** (1985) 4046.
 18. A.H. Andersen, *JOSA A* **4** (1987) 1385.
 19. K.I. Schultz and D.L. Jagaard, *JOSA A* **4** (1987) 1773.