

Generalización del método de mediciones interferométricas múltiples en pruebas de superficies ópticas

F.S. Granados Agustín* y A. Cornejo Rodríguez
Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica
Apartado postal 216, 72000 Puebla, Mexico

Recibido el 2 de julio de 1998; aceptado el 4 de noviembre de 1998

Se presenta un método más general para determinar la calidad de una superficie óptica plana, a partir de mediciones interferométricas parciales. La propuesta es considerar determinada curvatura a la superficie, que no se había considerado en trabajos previos.

Descriptores: Mediciones interferométricas parciales; superficie óptica plana

A more general method is developed for the testing of a flat optical surface, from the knowledge of partial interferometric measurements. The most important aspect is to take into account certain curvature of the optical surface, that in previous works have not been considered.

Keywords: Interferometric measurements; flat optical surface

PACS: 42.25.Hz

1. Introducción

En el taller de óptica del Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE) se construyó una superficie plana de calidad óptica que formará parte del proyecto IOTA (Infrared Optical Telescope Array), llevado a cabo en el Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics. Este plano óptico debe cumplir con las siguientes especificaciones; una planicidad de $\lambda/6$ en toda la superficie, y en secciones del plano con un tamaño de 12 cm de diámetro, la planicidad deberá ser de $\lambda/20$. El tamaño de la superficie es de 460×690 mm.

La superficie se caracterizó por medio de una serie de mediciones parciales interferométricas traslapadas. Cada medición parcial sólo proporciona información de la subárea en la que fué adquirida, pero el objetivo final es integrar todas las informaciones parciales para conocer la forma de toda la superficie. En el campo de pruebas ópticas existen una serie de propuestas que permiten conjuntar toda la información sobre la calidad de una superficie, a partir de una serie de medidas parciales [1–10]. El punto común de todas esas técnicas es la utilización de una superficie de referencia más pequeña en comparación con la superficie que se mide. La superficie de referencia se traslada en distintas posiciones hasta cubrir el área completa a evaluar. Las distintas propuestas se diferencian en la forma de las subaberturas y distribución de las mismas, a lo largo y ancho de la superficie total.

En este trabajo se utilizó inicialmente una de ellas [1], pero este método fue modificado para cuando la superficie bajo estudio posee una pequeña curvatura, sobre todo, cuando la superficie se encuentra en sus primeras etapas de pulido. En consecuencia se propone una modificación a la propuesta original para resolver el problema de ajuste de las medidas parciales.

2. Mediciones múltiples

La idea general del método de mediciones múltiples consiste en obtener una serie de interferogramas, traslapados parcialmente entre ellos, y uno de estos interferogramas es considerado como referencia de los demás. Los interferogramas son generados con la ayuda de una superficie de referencia, de un tamaño menor con respecto a la superficie que se prueba. Estos interferogramas son considerados como mediciones parciales de toda la superficie. Cada interferograma proporciona información parcial de la subárea correspondiente y la tarea siguiente es conjuntar la información de cada subárea, y de esta manera reconstruir la forma total de la superficie que se desea caracterizar. La forma como se puede obtener cada interferograma zonal es empleando la prueba clásica de Newton de dos superficies en contacto [11].

En principio la integración de los interferogramas no representaría problema alguno, pero debido a las imperfecciones mecánicas presentes en los arreglos experimentales, usados para obtener los interferogramas, se introducen una serie de errores en la información obtenida. Estos errores generalmente se traducen en inclinaciones y desplazamientos que afectan a la información que brindan los interferogramas de cada subárea respecto a las demás, y estos errores son distintos para las diferentes subaberturas, ver Fig. 1. Si se logran estimar y eliminar estos valores de inclinación y desplazamiento para cada una de las subáreas, para encontrar la totalidad de la información sobre la superficie, entonces se puede obtener la forma de la superficie, a partir de las mediciones parciales hechas.

Para una serie de m medidas parciales traslapadas, se debe cumplir que en las áreas de traslape las funciones de diferencia de camino óptico sean iguales respecto a la m -ésima

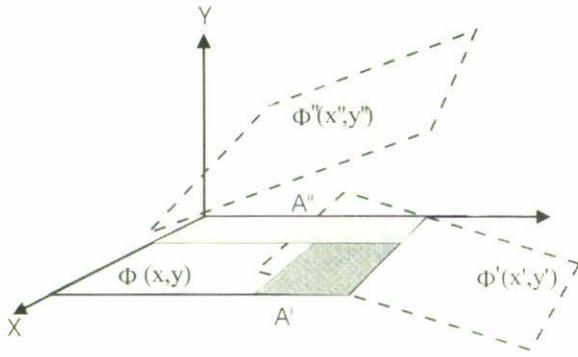


FIGURA 1.

función de referencia, es decir,

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, y) &= \Phi_0(x - x_0, y - y_0) + a_0x + b_0y + c_0, \\ \Phi_m(x, y) &= \Phi_1(x - x_1, y - y_1) + a_1x + b_1y + c_1, \\ &\vdots \\ \Phi_m(x, y) &= \Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}) \\ &\quad + a_{M-1}x + b_{M-1}y + c_{M-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde a_i, b_i y c_i son los distintos valores de los coeficientes de inclinación y desplazamiento respecto a la función de referencia para cada una de las mediciones. Para encontrar las magnitudes de los desplazamientos e inclinaciones, se hace uso de un ajuste de mínimos cuadrados de la siguiente manera:

$$\sum_{l=0}^{M-1} \sum_1 \{ \Phi_m(x, y) - [\Phi_l(x - x_l, y - y_l) + a_lx + b_ly + c_l] \}^2 \rightarrow \min, i \neq m. \quad (2)$$

El resultado de este proceso (ver apéndice) es

$$\left[\left(\sum_k^{M-1} P_{ik} \right)_i \right] = \left[\left(Q_{ij} - \delta_{ij} \sum_k^{M-1} Q_{ik} \right)_{ij} \right] [(R_i)_i]. \quad (3)$$

La solución del problema es encontrar los valores de las componentes del vector R_i , que corresponde a los parámetros de ajuste de la i -ésima medida parcial. En la Ec. (3) se hace uso de la definición tradicional de la función delta de Kronecker δ_{ij} , y donde las matrices P_{ik} y Q_{ik} de forma explícita son iguales a

$$\sum_k^{M-1} P_{ik} = P_{i0} + P_{i1} + \dots + P_{iM}, \quad (4)$$

$$\sum_k^{M-1} Q_{ik} = Q_{i0} + Q_{i1} + \dots + Q_{iM} \quad (5)$$

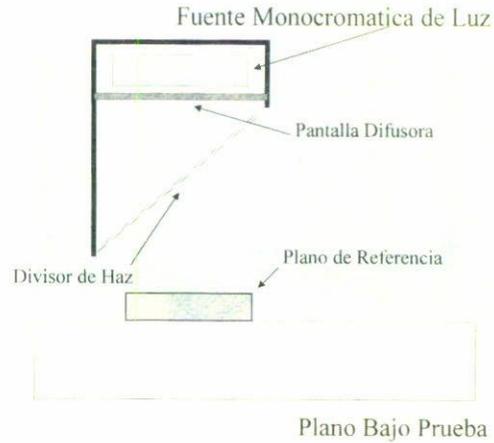


FIGURA 2.

La estructura de estas matrices es la siguiente:

$$\begin{aligned} R_i &= \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}; & P_{ij} &= \begin{bmatrix} \sum_{i \cap j} \Delta x \\ \sum_{i \cap j} \Delta y \\ \sum_{i \cap j} \Delta \end{bmatrix}; \\ Q_{ij} &= \begin{bmatrix} \sum_{i \cap j} x^2 & \sum_{i \cap j} xy & \sum_{i \cap j} x \\ \sum_{i \cap j} xy & \sum_{i \cap j} y^2 & \sum_{i \cap j} y \\ \sum_{i \cap j} x & \sum_{i \cap j} y & \sum_{i \cap j} n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

En estas matrices se ha hecho uso de la función Δ , cuya definición es la siguiente:

$$\Delta = \Phi_i(x - x_i, y - y_i) - \Phi_j(x - x_j, y - y_j). \quad (7)$$

También se debe entender que las componentes de las matrices P_{ij} y Q_{ij} , sólo tienen sentido para puntos pertenecientes al área de traslape, generada entre las medidas i -ésima y j -ésima. Lo anterior se indica por medio del símbolo de intersección (\cap) entre dichas áreas. Se debe recordar que se ha excluido la matriz generada por la medición de referencia, es decir, la m -ésima área. Por último, en las matrices Q_{ij} , una de sus componentes es el número de puntos (n), pertenecientes al área de traslape.

3. Medidas experimentales

Las mediciones experimentales se tomaron utilizando un interferómetro tipo Newton, el cual es de uso muy común en un taller de óptica, en particular en el INAOE. El interferómetro, como ya se mencionó, consta de los elementos tradicionales [11]: una fuente de luz extendida y cuasimonocromática, un divisor de haz y una superficie de referencia plana; en este caso de abertura circular y con un diámetro de 150 mm, Fig. 2.

Para llevar a cabo las mediciones parciales se diseñó una montura mecánica que sustenta y al mismo tiempo permite trasladar a la fuente de luz a lo largo y ancho de la superficie a evaluar. El desplazamiento de la superficie de referencia se llevó a cabo manualmente. La precisión en el montaje mecá-

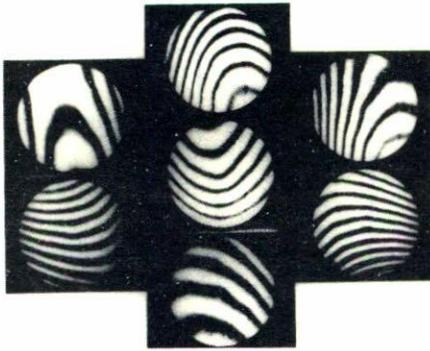


FIGURA 3.

MEDIDAS PARCIALES SIN AJUSTAR

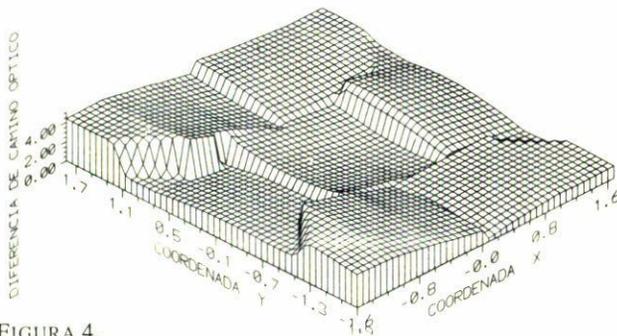


FIGURA 4.

nico no es de alta calidad por que no es necesario, debido a que éste es parte del problema planteado en el ajuste de las mediciones parciales. El soporte mecánico es estable, portátil, seguro y es fácil de instalar sobre la misma mesa de pulidora donde se estaba tallando la superficie, facilitando con esto las mediciones en etapas intermedias del pulido de la superficie. Una característica importante es que el arreglo experimental es un diseño propio, y su construcción fué llevado a a cabo en los talleres mecánicos del INAOE, lo que la hace de un bajo costo y se adecúa a las características deseadas en el método de mediciones múltiples traslapadas.

La distribución de las medidas experimentales está constituida por el traslape de siete medidas parciales y sus respectivos interferogramas se observan en la Fig. 3. En la Fig. 4 se observa las siete mediciones graficadas simultaneamente, se puede ver que cada medición parcial tiene su propia forma y orientación, hecho que se corrobora en la Fig. 5 en las que se muestran las curvas de nivel.

Con estas mediciones se realiza el ajuste propuesto, y con los parametro calculados se modifican las medidas experimentales. Para observar los resultados de esta modificación se grafican nuevamente las distribuciones observandose una mayor continuidad, Fig. 6. De hecho, al observar las curvas de nivel existe mayor continuidad entre ellas, Fig. 7, pero aún persisten algunos saltos entre ellas. Esto último hace ver la necesidad de mejorar de alguna forma el ajuste propuesto.

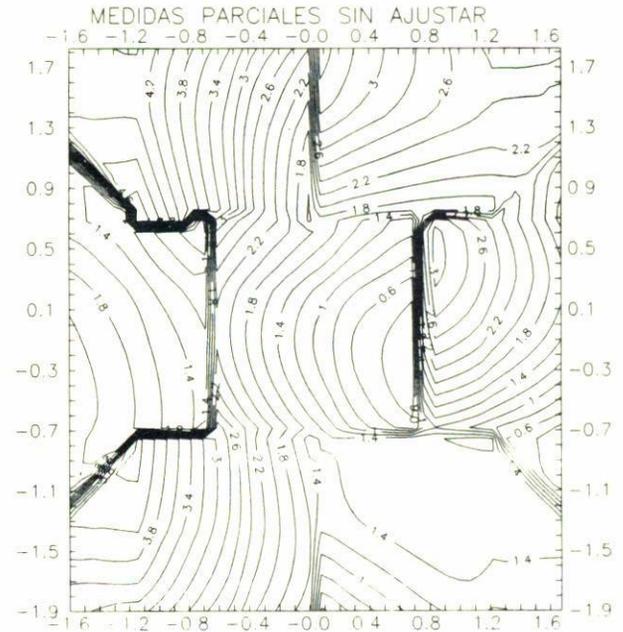


FIGURA 5.

MEDIDAS PARCIALES AJUSTADAS METODO DE OTSUBO

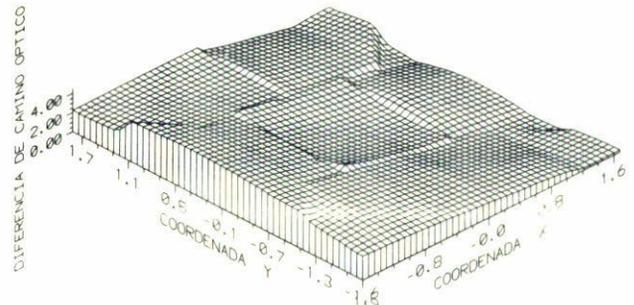


FIGURA 6.

4. Propuesta de un nuevo ajuste

Una de las razones encontradas en nuestro trabajo, por la cual no se mejoraba la continuidad entre las medidas parciales, es que en el arreglo experimental se prueba una superficie de referencia plana de calidad optica ($\lambda/10$), contra una que esta muy proxima a ella pero aún posee una pequeña curvatura (superficie plana en el proceso de generado). Esta es una diferencia importante respecto a la idea original de Otsubo [12], en la que el arreglo experimental para analizar la superficie bajo estudio sólo genera un frente de onda plano. Es decir, se prueban y suponen dos superficies planas entre sí. Sin embargo en este trabajo se observa que cuando una de las superficies posee una curvatura es necesario realizar una modificación a la propuesta original en el procesamiento de la información obtenida por las diferentes medidas parciales.

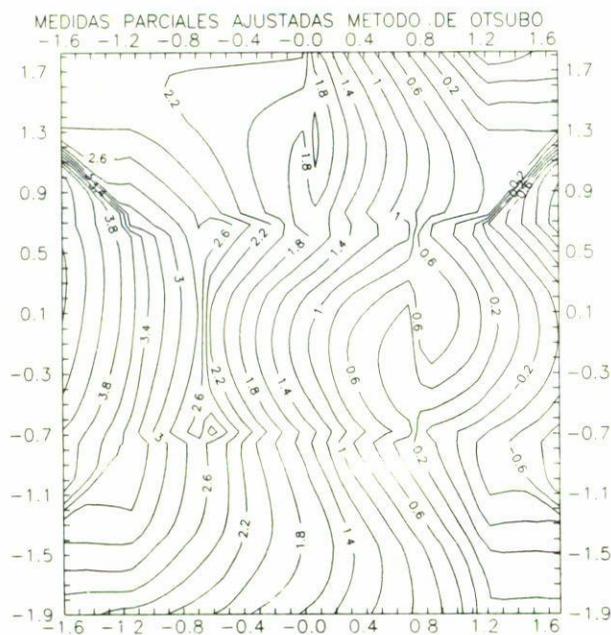


FIGURA 7.

La modificación que se debe proponer tiene que estar relacionada con los errores mecánicos presentes. Una situación similar se presenta cuando el centro de curvatura del frente de onda del sistema bajo estudio está desplazado en el espacio

respecto al sistema de coordenadas del plano imagen y cuyo origen está localizado a una distancia R del vértice de la pupila de salida (donde R es el radio del frente de onda generado). Como consecuencia de lo anterior surgen los términos de inclinación y error de foco, en la diferencia de camino óptico entre todo el frente de onda y la esfera de referencia [13].

En cambio cuando se realizan pruebas por medidas parciales, éstas sólo proporcionan fragmentos del frente de onda, y cada uno de estas medidas presentarán distintas magnitudes de errores de foco e inclinación. Lo anterior como consecuencia del desplazamiento del plano imagen de cada medida parcial. Un caso particular se obtiene cuando los frentes de onda involucrados son planos, como consecuencia de este hecho desaparece el término de error de foco y solo están presentes las inclinaciones distintas para cada medida parcial. Como ya se mencionó éste es el caso que ha analizado Otsubo. Como consecuencia de que en este trabajo uno de los frentes involucrados presentaba una curvatura, fue necesario tomar en consideración el término de error de foco como parámetro adicional de corrección [14, 15]. Por lo tanto se propone que en las áreas de traslape se cumpla la siguiente igualdad:

$$\Phi_m(x, y) = \Phi'_i(x', y') + a_i(x^2, y^2) + b_i x + c_i y + d_i. \quad (8)$$

De nueva cuenta, para calcular los parámetros de corrección se hace uso de mínimos cuadrados. Al realizar el mismo proceso, descrito en la sección uno, se obtiene la Ec. (3) y sólo cambia la forma de las matrices R_i , P_{ik} y Q_{ik} , cuya forma específica ahora es

$$R_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix}, \quad P_{ij} = \begin{bmatrix} \sum_{i \cap j} \Delta(x^2 + y^2) \\ \sum_{i \cap j} \Delta x \\ \sum_{i \cap j} \Delta y \\ \sum_{i \cap j} \Delta \end{bmatrix};$$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2)^2 & \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2)x & \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2)y & \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2) \\ \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2)x & \sum_{i \cap j} x^2 & \sum_{i \cap j} xy & \sum_{i \cap j} x \\ \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2)y & \sum_{i \cap j} xy & \sum_{i \cap j} y^2 & \sum_{i \cap j} y \\ \sum_{i \cap j} (x^2 + y^2) & \sum_{i \cap j} x & \sum_{i \cap j} y & n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

La diferencia básica es considerar el término adicional de foco para corregir los valores de las diversas medidas parciales, y mejorar con esto la continuidad entre ellas cuando se involucran frentes de onda con curvatura. La idea también hace que el método pueda utilizarse para superficies esféricas, puesto que ahora se considera el efecto de forma de éstas sobre cada una de las medidas parciales, hecho no considerado en la idea original de Otsubo.

5. Simulación numérica

Para verificar el funcionamiento de la nueva propuesta se llevó a cabo una simulación numérica. En esta simulación se utiliza la función

$$f(x, y) = A_1(x^2 - y^2) + A_2(2xy). \quad (10)$$

TABLA I. Resultados de la simulación numérica.

Area y coeficiente	Valor teótico propuesto	Valor calculado	Dif va real-va cal 0.01
A0 defoco	-1/2	-0.499999563	4.37×10^{-7}
A0 Tilt X	1/2	0.500000159	1.59×10^{-7}
A0 Tilt Y	-1/20	-0.050000236	2.36×10^{-7}
A0 Piston	1	1.000000038	3.80×10^{-8}
A1 defoco	1/2	0.500000125	4.37×10^{-7}
A1 Tilt X	-1/4	-0.250000056	1.59×10^{-7}
A1 Tilt Y	0	1.54×10^8	1.54×10^{-8}
A1 Piston	0	19.9×10^{-09}	9.90×10^{-9}
A2 defoco	1	0.999999594	4.06×10^{-7}
A2 Tilt X	-11	-11.00000029	2.93×10^{-7}
A2 Tilt Y	-1	-0.999999992	8.30×10^{-9}
A2 Piston	0	-0.000000034	3.40×10^{-8}
A4 defoco	-7	-7.000000273	2.73×10^{-7}
A4 Tilt X	7	7.00000017	1.69×10^{-7}
A4 Tilt Y	-1/3	-0.333333334	4.67×10^{-10}
A4 Piston	10	9.999999985	1.49×10^{-8}
A5 defoco	1/100	0.009999914	8.59×10^{-8}
A5 Tilt X	1/4	0.249999979	2.14×10^{-8}
A5 Tilt Y	1/4	0.249999943	5.68×10^{-8}
A5 Piston	-1	-1.000000006	5.70×10^{-9}
A6 defoco	-1/100	-0.010000009	9.10×10^{-9}
A6 Tilt X	1/20	0.049999994	5.80×10^{-9}
A6 Tilt Y	5	5.000000022	2.24×10^{-8}
A6 Piston	-1	-0.999999994	6.10×10^{-9}

Los resultados se muestran en la Tabla I. De los valores obtenidos se observa que la nueva propuesta no introduce errores adicionales en el calculo numérico, puesto que las diferencias entre los valores de las columnas dos y tres no son muy diferentes; obteniéndose diferencias, mostradas en la cuarta columna, que desde el punto de vista practico son mínimas.

6. Ajuste de medidas experimentales

Con las nuevas ecuaciones para R_i , P_{ik} y Q_{ik} , mostradas en la Ec. (9) se realizó de nueva cuenta el ajuste. Es decir, se comenzó por calcular los parámetros de inclinación y el error de foco de cada medición parcial. Después de lo anterior, se modifican los valores experimentales con ayuda de los parámetros calculados. Con estos nuevos valores se obtiene una grafica simultánea de las siete medidas experimentales, Fig. 8, y en esta grafica se ve ya la continuidad de la información, que no se observa en la Fig. 4. La continuidad entre las medidas experimentales se observa aún mejor en las curvas de nivel Fig. 9.

De los resultados obtenidos con la nueva propuesta, se puede concluir como existe una mejora sustancial en el ajust-

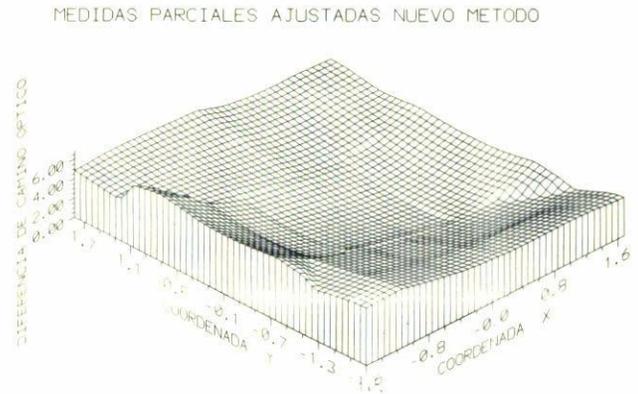


FIGURA 8.

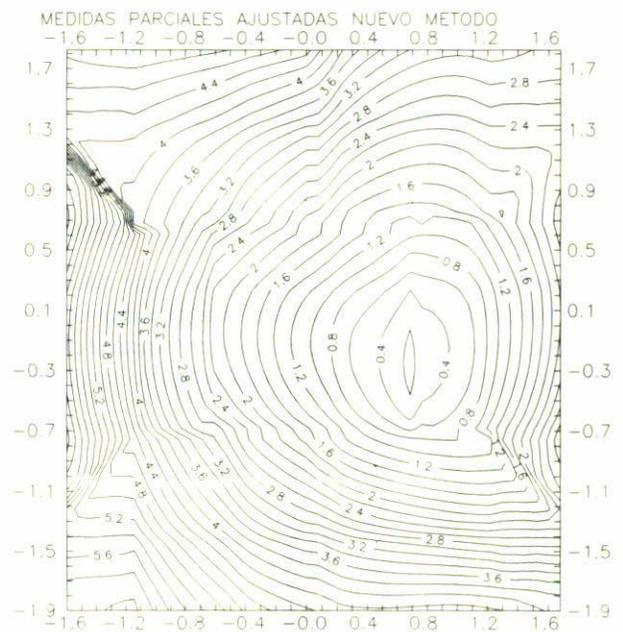


FIGURA 9.

te de las medidas experimentales, en comparación con la propuesta original, sobretodo cuando se considera cierta curvatura en la superficie bajo prueba. Como consecuencia, el termino de error de foco debe ser considerado cuando se prueba una superficie por medidas parciales y los frentes de onda involucrados sean esféricos.

7. Conclusiones

En el trabajo se introdujo un nuevo termino para el ajuste de una serie de medidas parciales traslapadas, obtenidas al caracterizar una superficie cuyas dimensiones son mayores que la superficie de referencia utilizada para llevar a cabo tal tarea. Este termino adicional de ajuste se asocia al error de foco y éste es consecuencia del desplazamiento del plano de observación respecto a la pupila de salida. Este termino adicional

requiere importancia cuando la superficie que se caracteriza no es plana y posee alguna curvatura. Situación que se presenta con suma frecuencia al generar superficie planas en las primeras etapas de pulido, puesto que éstas se generan a partir de una superficie con un gran radio de curvatura y llegan a ser planas cuando este radio tiende a infinito.

El desplazamiento del plano de observación es consecuencia de los errores existentes en las monturas mecánicas empleadas en los arreglos interferométricos experimentales, en consecuencia el nuevo termino de ajuste será mas o menos importante dependiendo de la curvatura de la superficie y de los errores mecánicos involucrados. Se ha visto además, que al introducir este nuevo termino la forma general de las ecuaciones originalmente propuesta por Otsubo, necesarias para el ajuste de las medidas parciales no se modifican y sólo cambia el tamaño de las submatrices involucradas e esta ecuación.

Además, se demostró la factibilidad del nuevo ajuste de medidas parciales tomando en cuenta el termino adicional de error de foco, puesto que no se introduce un error adicional en el calculo de los parámetros como se desmostró en la simulación numérica. Con esta nueva idea el método puede ser utilizado como herramienta de supervisión en el proceso de generado superficies planas cuyas dimensiones sean mayores a 1.5 metros. Por último al considerar esta nueva propuesta el método de mediciones múltiples, puede utilizarse en superficie esféricas y asféricas.

Apéndice

Al desarrollar la Ec. (2), se obtiene

$$\begin{aligned}
 T = & \sum_{m \cap 0} \{ \Phi_m(x, y) - [\Phi_0(x - x_0, y - y_0) + a_0x + b_0yc_0] \}^2 \\
 & + \sum_{m \cap 1} \{ \Phi_m(x, y) - [\Phi_1(x - x_1, y - y_1) + a_1x + b_1y + c_1] \}^2 \\
 & \vdots \\
 & + \sum_{m \cap M-2} \{ \Phi_m(x, y) - [\Phi_{M-2}(x - x_{M-2}, y - y_{M-2}) + a_{M-2}x + b_{M-2}y + c_{M-2}] \}^2 \\
 & + \sum_{m \cap M-1} \{ \Phi_m(x, y) - [\Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}) + a_{M-1}x + b_{M-1}y + c_{M-1}] \}^2 \\
 & + \sum_{0 \cap 1} \{ [\Phi_0(x - x_0, y - y_0) + a_0x + b_0y + c_0] - [\Phi_1(x - x_1, y - y_1) + a_1x + b_1y + c_1] \}^2 \\
 & \vdots \\
 & + \sum_{0 \cap M-1} \{ [\Phi_0(x - x_0, y - y_0) + a_0x + b_0y + c_0] - [\Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}) + a_{M-1}x + b_{M-1}y + c_{M-1}] \}^2 \\
 & \vdots \\
 & + \sum_{M-2 \cap M-1} \{ [\Phi_{M-2}(x - x_{M-2}, y - y_{M-2}) + a_{M-2}x + b_{M-2}y + c_{M-2}] \\
 & \quad - [\Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}) + a_{M-1}x + b_{M-1}y + c_{M-1}] \}^2,
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde en las sumatorias se ha indicado que estas se llevan acabo sólo para puntos pertenecientes al área de traslape ó de intersección entre las medidas *i*-ésima y *j*-ésima. Para simplificar la notación y realizar el cálculo correspondiente se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{m0} &= \Phi_m(x, y) - \Phi_0(x - x_0, y - y_0), \\
 &\vdots \\
 \Delta_{mM-1} &= \Phi_m(x, y) - \Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}), \\
 \Delta_{01} &= \Phi_0(x - x_0, y - y_0) - \Phi_1(x - x_1, y - y_1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 \Delta_{0M-1} &= \Phi_0(x - x_0, y - y_0) \\
 &\quad - \Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}), \\
 &\vdots \\
 \Delta_{M-2M-1} &= \Phi_{M-2}(x - x_{M-2}, y - y_{M-2}) \\
 &\quad - \Phi_{M-1}(x - x_{M-1}, y - y_{M-1}).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

De esta forma al utilizar el proceso de mínimos cuadrados para la Ec. (A.1), por ejemplo para la constante a_i de la medida i -ésima se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta a_i} = & \sum_{m \cap i} \{ \Delta_{mi}x + a_i x^2 + b_i xy + c_i x \} + \sum_{i \cap i+1} \{ \Delta_{ii+1}x + a_i x^2 + b_i xy + c_i x - a_{i+1} x^2 - b_{i+1} xy - c_{i+1} x \} \\ & + \sum_{i \cap i+2} \{ \Delta_{ii+2}x + a_i x^2 + b_i xy + c_i x - a_{i+2} x^2 - b_{i+2} xy - c_{i+2} x \} \dots \\ & \dots + \sum_{i \cap M-1} \{ \Delta_{iM-1}x + a_i x^2 + b_i xy + c_i x - a_{M-1} x^2 - b_{M-1} xy - c_{M-1} x \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Al separar estas sumatorias y reorganizar términos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta a_i} = & \left\{ \sum_{m \cap i} \Delta_{mi}x + \sum_{i \cap i+1} \Delta_{ii+1}x + \sum_{i \cap i+2} \Delta_{ii+2}x + \dots + \sum_{i \cap M-1} \Delta_{iM-1}x \right\} \\ & + \left\{ \sum_{i \cap i+1} a_i x^2 + \sum_{i \cap i+2} a_i x^2 + \dots + \sum_{i \cap M-1} a_i x^2 \right\} + \left\{ \sum_{i \cap i+1} b_i xy + \sum_{i \cap i+2} b_i xy + \dots + \sum_{i \cap M-1} b_i xy \right\} \\ & + \left\{ \sum_{i \cap i+1} c_i x + \sum_{i \cap i+2} c_i x + \dots + \sum_{i \cap M-1} c_i x \right\} \\ & - \left\{ \sum_{m \cap i} a_i x^2 + \sum_{i \cap i+1} a_{i+1} x^2 + \sum_{i \cap i+2} a_{i+2} x^2 + \dots + \sum_{i \cap M-1} a_{M-1} x^2 \right\} \\ & - \left\{ \sum_{m \cap i} b_i xy + \sum_{i \cap i+1} b_{i+1} xy + \sum_{i \cap i+2} b_{i+2} xy + \dots + \sum_{i \cap M-1} b_{M-1} xy \right\} \\ & + \left\{ \sum_{m \cap i} c_i x + \sum_{i \cap i+1} c_{i+1} x + \sum_{i \cap i+2} c_{i+2} x + \dots + \sum_{i \cap M-1} c_{M-1} x \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \sum_{m \cap i} \Delta_{mi}x + \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} \Delta_{ij}x \right\} = & \sum_{m \cap i} a_i x^2 + \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} a_j x^2 \right\} - \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} a_i x^2 \right\} + \sum_{m \cap i} b_i xy + \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} b_j xy \right\} \\ & - \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} b_i xy \right\} + \sum_{m \cap i} c_i x + \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} c_j x \right\} - \sum_j^{M-2} \left\{ \sum_{i \cap j} c_i x \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Definiendo nuevas sumatorias se simplifica esta expresión:

$$\left(\sum_k^{M-1} \Delta_{ik}x \right)_i = \sum_{m \cap i} a_i x^2 - \left(\sum_k^{M-1} a_i x^2 \right)_i + \sum_{m \cap i} b_i xy - \left(\sum_k^{M-1} b_i xy \right)_i + \sum_{m \cap i} c_i x - \left(\sum_k^{M-1} c_i x \right)_i, \quad (\text{A.6})$$

donde $i = m, i+1, i+2, \dots, M-1$. De la misma forma se procede para los parámetros b_i y c_i ,

$$\left(\sum_k^{M-1} \Delta_{ik}y \right)_i = \sum_{m \cap i} a_i xy - \left(\sum_k^{M-1} a_i xy \right)_i + \sum_{m \cap i} b_i y^2 - \left(\sum_k^{M-1} b_i y^2 \right)_i + \sum_{m \cap i} c_i y - \left(\sum_k^{M-1} c_i y \right)_i, \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\sum_k^{M-1} \Delta_{ik}y \right)_i = \sum_{m \cap i} a_i x - \left(\sum_k^{M-1} a_i x \right)_i + \sum_{m \cap i} b_i y - \left(\sum_k^{M-1} b_i y \right)_i + \sum_{m \cap i} c_i - \left(\sum_k^{M-1} c_i \right)_i. \quad (\text{A.8})$$

Puesto que se tiene un sistema de ecuaciones lineales, se hace uso de notación matricial [1] y se obtiene la Ec. (3).

- *. Becario de CONACYT (doctorado).
1. Otsubo Masashi, Okada Katsuyuki, and Tsujiuchi Jumpei, *Opt. Eng.* **33** (1994) 608.
 2. Chow Weng W. and Lawrence George N., *Opt. Letts.* **8** (1983) 468.
 3. Jensen Stephen C., Chow Wen W., and Lawrence George N., *Appl. Opt.* **23** (1984) 740.
 4. Stuhlinger Tilman W., *SPIE* **656** (1986) 118.
 5. J.E. Negro, *Appl. Opt.* **23** (1984) 1921.
 6. C.J. Kim, *Appl. Opt.* **21** (1982) 4521.
 7. Liu Ying-Moh, Lawrence George N., and Koliopoulos Christ L., *Appl. Opt.* **27** (1988) 4504.
 8. E.R. Cochran and J.C. Wyant, *SPIE* **680** (1986) 112.
 9. De Hainaut Christopher R. and Erteza Ahmed, *Appl. Opt.* **25** (1986) 503.
 10. Y.J. Fan, C.H.F. Velzel, K.G. Struik, and P.H.J. Schellekens, *SPIE* **2778** (1996) 1062.
 11. D. Malacara, (ed.), *Optical Shop Testing*, (John Wiley & Sons Co., New York, 1992).
 12. Otsubo Masashi, Okada Katsuyuki, and Tsujiuchi Jumpei, *SPIE* **1720** (1992) 444.
 13. R.R. Shannon and J.C. Wyant, (eds.), *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. 11, (Academic Press Inc., San Diego, 1992).
 14. D. Malacara and A. Cornejo, *Appl. Opt.* **4** (1970) 837.
 15. Jian Bai, Shangyi Cheng, and Guoguang Yang, *Opt. Eng.* **36** (1997) 2355.
 16. Fermín Salomón Granados Agustín, Tesis Doctoral, INAOE, Puebla, México, 1998.