Cálculo del potencial eléctrico en algunos sistemas simples

P. Villaseñor-González
Instituto de Física "Manuel Sandoval Vallarta", Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Alvaro Obregón 64, 78000 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico

Recibido el 16 de junio de 1997; aceptado el 9 de noviembre de 1998

Se presenta una forma sencilla y rápida de calcular el potencial eléctrico en dos casos muy comunes en electromagnetismo; uno debido a una distribución volumétrica de carga y otro el de una esfera con un potencial conocido en su superficie. Para llegar a estos resultados es necesario que la parte angular de la distribución volumétrica de carga o el potencial en la superficie de la esfera, puedan escribirse como una combinación lineal de armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ para una l fija.

Descriptores: Potencial eléctrico

It is presented an easy and rapid form to calculate the electrical potential in two very common cases in electromagnetism; one is due to a volumetric charge distribution and the other is due to a sphere with a potential known in its surface. We show that in order to derive these results it is necessary that the angular part of the volumetric charge distribution or the potential at the surface of the sphere can be written as a linear combination of spherical harmonic $Y_{lm}(\theta, \phi)$ for a fixed value or l.

Keywords: Electrical potential

PACS: 01.50.Kw

1. Introducción

El curso de electromagnetismo a nivel de posgrado requiere en general de muchos desarrollos matemáticos y el curso puede resultar árido, tanto para maestros como para estudiantes. Gran parte de la complejidad del curso se manifiesta cuando no se tiene un amplio dominio sobre las funciones especiales, y el nivel del curso [1–3] presupone que se tiene. Acompañado con este hecho se encuentra la gran cantidad de desarrollos matemáticos que se tienen que hacer para encontrar la solución a los problemas que vienen como ejemplos. Muchas de las veces se pierde la idea del concepto original por estar inmerso en el desarrollo algebraico del problema o en ocasiones resultan los desarrollos algebraicos tan similares que se termina por suponerlo resuelto, dejando un sentimiento de duda. Por último, otro factor que influye para que sea un curso difícil, es que la mayoría de los problemas que se presentan como ejemplos, tienen la característica de que el resultado del problema queda expresado como un desarrollo infinito de potencias. Esto deja la sensación de que el problema no ha quedado resuelto exactamente, ya que por lo general una apreciación gráfica del resultado produce un mejor entendimiento del problema, y en un resultado expresado como una serie infinita lo único que puede visualizarse con facilidad es el comportamiento asintótico. En este trabajo se calcula el potencial electrostático para un conjunto de problemas que hacen su solución directa, rápida y en forma analítica. El resultado que se encuentra puede fácilmente memorizarse y al momento de abordar ejemplos en la exposición del curso, la presentación del mismo puede hacerse didácticamente más fluido. Dos resultados se presentan en este trabajo para determinar el potencial electrostático; el de una distribución volumétrica de carga y el de una esfera con un potencial especificado en la superficie. Las características que debe de tener la densidad volumétrica de carga en un caso y el potencial en la superficie en el otro se discuten en el texto. La organización de este trabajo es como sigue: en la Sec. 2 se presenta el resultado del cálculo del potencial electrostático para una distribución volumétrica de carga, en la Sec. 3 se presenta el cálculo del potencial producido por una superficie esférica y finalmente en la Sec. 4 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Potencial de una distribución de carga

Es bien conocido que el potencial eléctrico en el punto $\mathbf{x}$ debido a una distribución volumétrica de carga $\rho(\mathbf{x}')$ está dado por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')\, d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \tag{1}$$

El tipo de coordenadas que se escoge para evaluar esta integral depende de las características de la distribución de carga. Aquí se supone que la distribución volumétrica de carga está expresada en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y que puede descomponerse en una parte radial y una angular, esto es,

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_o(r) H(\theta, \phi). \tag{2}$$

La integral expresada en la Ec. (1) generalmente no puede resolverse analíticamente, y lo que se hace es obtener el potencial como una serie de potencias de r. Para lograr esto se sustituye en la Ec. (1) la Ec. (2) y el desarrollo en armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ de la función [1],

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)\times Y_{l,m}(\theta,\phi)Y_{l,m}^*(\theta',\phi'), \quad (3)$$

con lo que se obtiene la expresión para el potencial

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} g_l(r)\lambda_{lm}Y_{l,m}(\theta,\phi), \quad (4)$$

donde

$$g_l(r)=\frac{4\pi}{2l+1}\int\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\right)\rho_o(r')r'^2\,dr', \quad (5)$$

$$\lambda_{lm}=\int Y_{l,m}^*(\theta,\phi)H(\theta,\phi)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi. \quad (6)$$

Aquí $r_<(r_>)$ se refiere a qué valor es menor (mayor) entre r y r', y λ_{lm} son los coeficientes del desarrollo en armónicos esféricos de la función angular $H(\theta,\phi)$. Si se escribe explícitamente la función $g_l(r)$, el potencial obtenido en la Ec. (4) es el clásico desarrollo multipolar [1–4]. El propósito de mantener esta forma es con el fin de mostrar que hay un conjunto de funciones $H(\theta,\phi)$ que permiten simplificar el resultado expresado en la Ec. (4), obteniéndose además el potencial en forma analítica. Las características que debe tener $H(\theta,\phi)$, así como la expresión del potencial que se obtiene pueden enunciarse de la siguiente manera.

Si la parte angular $H(\theta,\phi)$ en la distribución volumétrica de carga $\rho(\mathbf{x})$ puede escribirse como una combinación lineal de armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ para un solo valor de l ($l=k$),

$$H(\theta,\phi)=\sum_{m'=-k}^{k}\lambda_{m'}Y_{k,m'}(\theta,\phi), \quad (7)$$

entonces el potencial en cualquier punto del espacio está dado por

$$\Phi(\mathbf{x})=g_k(r)H(\theta,\phi). \quad (8)$$

Este resultado, además de su forma simple, expresa que el potencial en cualquier punto del espacio tiene la misma dependencia angular $H(\theta,\phi)$ que la distribución volumétrica de carga. Ahora lo único que se tiene que hacer para conocer el potencial explícitamente es evaluar la función $g_k(r)$ que está dada por la Ec. (5).

La prueba de este resultado es inmediata, se sustituye la Ec. (7) en la Ec. (6), se usa la ortonormalidad de los armónicos esféricos y se obtiene

$$\lambda_{lm}=\lambda_m\delta_{lk},$$

Estos coeficientes se sustituyen en la Ec. (4) y entonces

$$\Phi(\mathbf{x})=g_k(r)\sum_{m=-k}^{k}\lambda_m Y_{k,m}(\theta,\phi).$$

La sumatoria que aparece al final de esta expresión, vuelve a ser $H(\theta,\phi)$, con lo que se obtiene la demostración. Puede verse de esta demostración que no es necesario conocer explícitamente los coeficientes λ_m, para determinar el potencial, pero si hay que tener seguridad del valor $l=k$ que se debe tomar porque es el que determina a $g_k(r)$.

El resultado anterior puede extenderse de manera directa al caso en que la distribución volumétrica de carga pueda escribirse como una suma finita de combinaciones de armónicos esféricos, esto es,

$$H(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{N}H_{k_i}(\theta,\phi),$$

$$H_{k_i}(\theta,\phi)=\sum_{m=-k_i}^{k_i}\lambda_m^{(k_i)}Y_{k_i,m}(\theta,\phi).$$

En este caso el potencial viene dado por

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}g_{k_i}(r)H_{k_i}(\theta,\phi). \quad (9)$$

Un punto importante que hay que notar aquí es que el potencial no tiene la misma dependencia angular que la distribución volumétrica de carga, como sucedió en el caso anterior. Cuando $N=\infty$ es preferible el desarrollo multipolar clásico reportado en la literatura [1–3] o pueden usarse las expresiones obtenidas en el trabajo de Ley-Koo y Góngora [4], donde hace una exposición clara para el cálculo del potencial dentro y fuera de una distribución volumétrica de carga.

Como un ejemplo de la aplicación de estos resultados se calcula el potencial que produce la nube electrónica de un electrón en el estado excitado ($n=2$, $l=1$, $m=0$) cuya densidad volumétrica de carga está dada por [5]

$$\rho(\mathbf{x})=\frac{q}{32\pi a_o^5}r^2e^{-r/a_o}\cos^2\theta;$$

aquí q es la carga del electrón y a_o es el radio de Bohr. En este caso la función angular $H(\theta,\phi)=\cos^2\theta$ no corresponde directamente a un desarrollo en armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ para un mismo valor de l, sin embargo, puede descomponerse en dos partes y cada una escribirse en términos de los armónicos esféricos, esto es,

$$H(\theta,\phi)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(3\cos^2\theta-1),$$

por lo que

$$H(\theta,\phi)=H_{k_1}(\theta,\phi)+H_{k_2}(\theta,\phi).$$

La función $H_{k_1}(\theta,\phi)$ puede escribirse en términos de $Y_{0,0}(\theta,\phi)$ por lo que $k_1=0$; en tanto que la función $H_{k_2}(\theta,\phi)$ puede escribirse en términos de $Y_{2,0}(\theta,\phi)$ por lo que $k_2=2$, así que el potencial será

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{1}{3}g_0(r)+\frac{1}{3}(3\cos^2\theta-1)g_2(r),$$

donde $g_0(r)$ y $g_2(r)$ vienen dados por la Ec. (5). Como puede verse de este ejemplo, ni siquiera es necesario conocer explícitamente los coeficientes del desarrollo de la función angular $H(\theta,\phi)$, sólo hay que conocer cuáles son los valores k_i, para poder obtener el potencial que produce la distribución de carga.

3. Potencial producido por una esfera

Otro problema clásico en electrostática es encontrar el potencial que produce una esfera de radio a, cuyo potencial en la superficie $V_s(\theta,\phi)$ se especifica. Para este caso la solución general a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas puede escribirse como

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m}\left(\frac{ar_<^l}{r_>^{l+1}}\right)A_{lm}Y_{l,m}(\theta,\phi), \tag{10}$$

donde $r_<(r_>)$ se refiere al menor valor (mayor) entre r y a. Los coeficientes A_{lm} son constantes que se determinan con el conocimiento del potencial en la superficie de la esfera. También en este caso existe un conjunto de funciones $V_s(\theta,\phi)$ que especifican el potencial en la superficie de la esfera que hacen que la Ec. (10) tenga una forma simple y analítica. El resultado también puede enunciarse de manera análoga a la del potencial para una distribución volumétrica de carga de la sección anterior.

Si el potencial en la superficie de una esfera de radio a puede escribirse como una combinación lineal de armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ para un solo valor de l $(l=k)$,

$$V_s(\theta,\phi)=\sum_{m'=-k}^{k}\lambda_{m'}Y_{k,m'}(\theta,\phi), \tag{11}$$

entonces el potencial en cualquier punto del espacio está dado por

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\left(\frac{ar_<^k}{r_>^{k+1}}\right)V_s(\theta,\phi). \tag{12}$$

De igual manera este resultado expresa que el potencial en cualquier punto del espacio tiene la misma dependencia angular que en la superficie de la esfera, y que la dependencia en r depende del valor de $l=k$ que se use para hacer el desarrollo de $V_s(\theta,\phi)$. La prueba es directa. Se evalúa el potencial de la Ec. (10) en la superficie ($r=a$), se multiplica por $Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)$, se integra sobre todo el ángulo sólido $d\Omega=\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ y se obtiene

$$\int V_s(\theta,\phi)Y^*_{l',m'}(\theta,\phi)\,d\Omega=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m}A_{lm}\delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

o bien

$$A_{lm}=\int V_s(\theta,\phi)Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\,d\Omega.$$

Sustituyendo en esta ecuación el desarrollo en armónicos esféricos del potencial en la superficie Ec. (11) y se encuentra que

$$A_{lm}=\sum_{m'=-k}^{k}\lambda_{m'}\delta_{lk}\delta_{mm'}$$

o bien

$$A_{lm}=\lambda_m\delta_{lq}.$$

Se sustituye este resultado en la Ec. (9) y se obtiene

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\left(\frac{ar_<^k}{r_>^{k+1}}\right)\sum_{m=-k}^{k}\lambda_m Y_{k,m}(\theta,\phi).$$

Nuevamente la sumatoria en el potencial corresponde a la parte angular del potencial en la superficie de la esfera, con lo que se recupera $V_s(\theta,\phi)$ y de esta manera queda demostrada la expresión para el potencial dado en la Ec. (12).

Este resultado también puede extenderse al caso en que el potencial en la superficie pueda escribirse como una suma finita de combinaciones de armónicos esféricos, esto es,

$$V_s(\theta,\phi)=\sum_{i=1}^{N}V_{k_i}(\theta,\phi), \tag{13}$$

con

$$V_{s_{k_i}}(\theta,\phi)=\sum_{m=-k_i}^{k_i}\lambda_m^{(k_i)}Y_{k_i,m}(\theta,\phi).$$

En este caso el potencial viene dado por

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{ar_<^{k_i}}{r_>^{k_i+1}}\right)V_{s_{k_i}}(\theta,\phi) \tag{14}$$

La demostración puede realizarse de manera análoga.

Un ejemplo de este resultado es determinar el potencial producido por una esfera de radio a, cuyo potencial en su superficie está dado por $V_s=V_o\operatorname{sen}\theta\cos\phi$. Este potencial puede escribirse en términos de $Y_{1,1}(\theta,\phi)$ y $Y_{1,-1}(\theta,\phi)$, por lo tanto $k=1$, así que el potencial en cualquier punto del espacio lo obtenemos aplicando la Ec. (12):

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\left(\frac{ar_<}{r_>^2}\right)V_o\operatorname{sen}\theta\cos\phi.$$

El resultado en este caso es inmediato.

4. Conclusiones

Se encontraron dos resultados que pueden usarse para el cálculo del potencial electrostático de una manera directa: para una distribución volumétrica de carga y para el caso en que el potencial en la superficie de una esfera esté especificado. Los resultados sólo son aplicables al caso en que la parte angular de la distribución volumétrica de carga o del potencial en la superficie puedan ser escritos en términos de los armónicos esféricos para un solo valor de l ($l = k$). Como una consecuencia de este tipo de funciones angulares, se encontró que si la función angular no se descompone en funciones parciales, entonces el potencial tiene la misma dependencia angular. Aunque en este trabajo sólo se presentó el método al cálculo del potencial electrostático, en general el formalismo puede usarse también para la evaluación de integrales del tipo

$$\int \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Esto siempre y cuando $\mathbf{Q}(\mathbf{x}')$ pueda descomponerse en una parte radial y una angular y esta última pueda escribirse como una combinación lineal de armónicos esféricos para un solo valor de l ($l = k$). Este tipo de integrales aparecen constantemente en problemas de electromagnetismo.

1. J.D. Jackson, *Clasical Electrodynamics*, Second Edition (John Wiley & Sons, New York, 1975).
2. W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, Second Edition (McGraw-Hill, New York, 1968).
3. L. Eyges, *The Classical Electromagnetic Field*, (Dover Publications, New York, 1972).
4. E. Ley-Koo y A. Góngora, *Rev. Mex. Fís.* **34** (1988) 645.
5. L. Pauling and E. Bright Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics*, Second Edition (McGraw-Hill International, Singapore, 1935).