

## Superficies esféricas aplicadas a la óptica

Alma A. Camacho P. y Cristina Solano  
 Centro de Investigaciones en óptica, A.C.  
 Apartado postal 1-948, 37000 León, Gto. Mexico

Recibido el 16 de octubre de 1998; aceptado el 21 de enero de 1999

En este trabajo presentamos una discusión sobre las superficies esféricas, desde un punto de vista cuantitativo y cualitativo. Indicamos algunas consideraciones para su diseño y se detallan algunos métodos de fabricación y algunos campos de aplicación.

*Descriptores:* Diseño óptico; fabricación óptica

An analysis on aspherical surfaces is presented. Several considerations for their use and fabrication methods as well as the applications are discussed.

*Keywords:* Optical design; optical fabrication

PACS: 42.87; 42.79; 42.15

### 1. Introducción

Se conocen como superficies esféricas aquellas que no son esféricas ni planas. Estas superficies son importantes en sistemas ópticos y han sido estudiadas y descritas por varios autores [1-8]. Las superficies esféricas se han utilizado desde sistemas buscadores de alta calidad hasta espejos primarios y secundarios en sistemas multimillonarios de reconocimiento [2]. La importancia de este tipo de superficies es debido a que mediante su uso es posible evitar los defectos presentes en las imágenes (aberraciones) tales como: coma, astigmatismo y distorsión tipo barril, que son consecuencias inevitables de las superficies esféricas [3]. La capacidad de las superficies esféricas para producir imágenes eficientes bien corregidas (o sin aberraciones) permite que los sistemas ópticos incrementen su campo de vista reduciendo el número de elementos ópticos [2]. Consecuentemente, los sistemas con elementos esféricos tienen ventajas como: reducción de peso y tamaño, además, como es posible reducir el número de superficies ópticas, se reducen también las pérdidas causadas por reflexiones en cada una de las superficies. Hoy en día es común el diseño de lentes esféricas de plástico debido a que proporcionan beneficios a los sistemas ópticos, tales como compensar las aberraciones de imagen y además pueden fabricarse fácilmente.

Las superficies esféricas han ganado una amplia aceptación en la micro-óptica, como ejemplo se puede citar los tres elementos en los sistemas de digitalización en los reproductores de discos compactos, los cuales han sido reemplazados por una lente esférica. Una lente objetivo esférica se utiliza en sistemas computacionales que tienen los discos magneto-ópticos de almacenamiento de datos. Las superficies esféricas se utilizan también para reducir las pérdidas de acoplamiento de láseres semiconductores a fibras ópticas [2, 4-6].

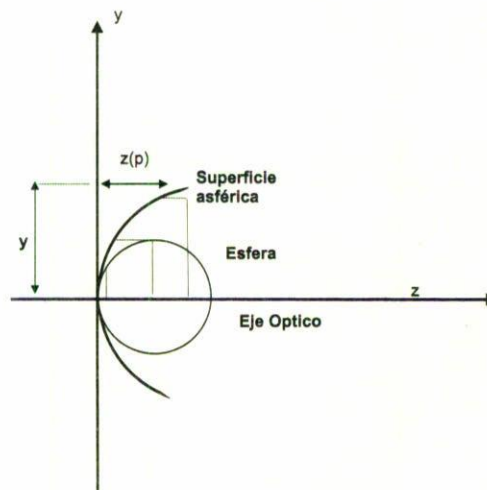


FIGURA 1. Descripción de una superficie de revolución. La distancia desde el eje a un punto de la superficie es  $p$ , y la sagita  $z(p)$  es la distancia desde el plano tangente a la superficie.

### 2. Fundamentos teóricos

La palabra esférica (no esfera) se utiliza para designar superficies ópticas en las que la forma de su perfil no pertenece a un círculo. Una superficie esférica se define por la distancia paralela al eje  $z$ , (Fig. 1), entre un punto de ésta y una esfera de referencia tangente al origen. Esta distancia se define como la sagita [7].

En el caso de las superficies esféricas es posible definir un parámetro de forma, el radio de curvatura  $R$  ( $R$  tiende a infinito, es plano). Sin embargo para las esféricas existen en principio un gran número de parámetros de forma. Por ejemplo es posible representar matemáticamente una esférica por la rotación de una curva simétrica en eje [8]. Una superficie

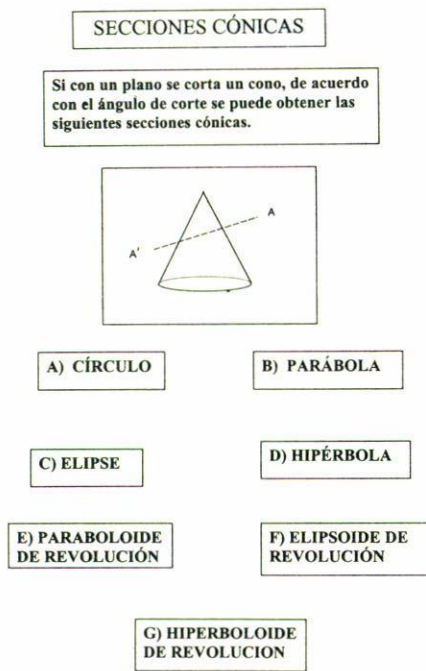


FIGURA 2. Superficies cónicas [9].

asférica de revolución se genera al rotar una curva representada por una ecuación general de segundo grado alrededor de su eje generatriz.

**2.1. Diferentes tipos de superficies esféricas y su representación matemática**

Las superficies esféricas se dividen en dos grandes grupos: i) superficies de revolución con un eje de simetría; ii) superficies de revolución con dos planos de simetría.

Las superficies esféricas más utilizadas en óptica, pertenecen al primer grupo y entre ellas se encuentran parábolas, elipses e hipérbolas. Éstas son las esféricas más simples y son generadas por la revolución de una sección cónica [7] (Fig. 2).

Para resolver un problema óptico que no tiene simetría rotacional se utilizan las superficies de revolución con dos planos de simetría, catalogadas en el segundo grupo de clasificación de las superficies esféricas (Fig. 3). No obstante en este caso las superficies por sí mismas deberían tener un eje de rotación, pero éste no es siempre el eje óptico o un eje a través del centro de la superficie. Un ejemplo de estas superficies son las lentes oftálmicas con una trayectoria continua de la potencia reactiva de la distancia del ojo al área de lectura. En este caso la simetría rotacional de la superficie facilita su fabricación.

**2.1.1. Superficies de revolución alrededor del eje óptico**

La condición para obtener una superficie esférica es que la distancia del eje óptico a cualquier punto de ella se represen-

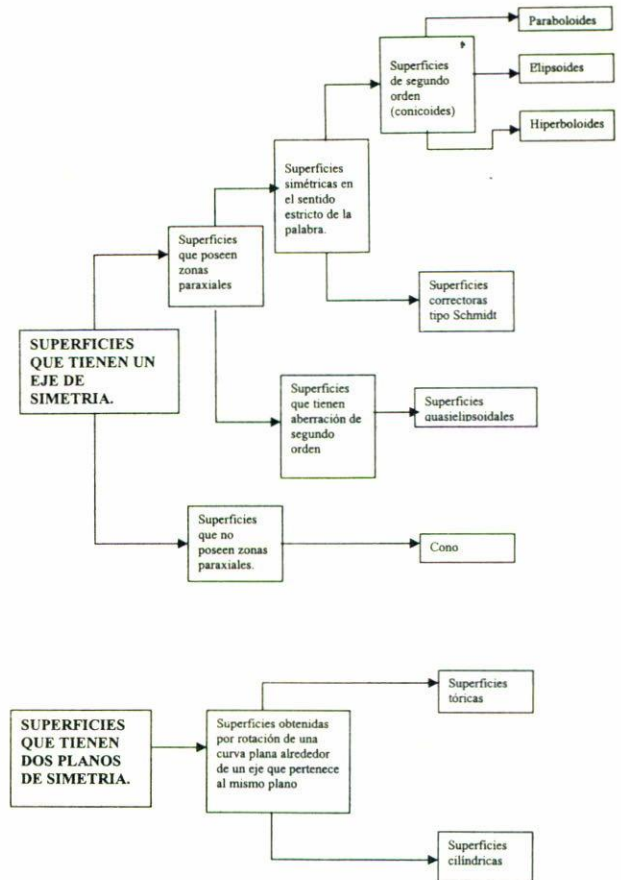


FIGURA 3. Clasificación de superficies esféricas [10].

ta por la siguiente ecuación (Fig. 4):

$$z = \frac{cp^2}{1 + \sqrt{1 - (k + 1)c^2p^2}} + dp^4 + ep^6 + fp^8 + gp^{10} + d_{13}p^{12} + d_{15}p^{14} + d_{17}p^{16} \quad (1)$$

donde:  $p^2 = x^2 + y^2$ ,  $c$  = curvatura,  $K$  = constante de conicidad y los parámetros  $d, e, f, g, d_{13}, d_{15}$ , y  $d_{17}$ ; son los coeficientes de deformación de asfericidad del cuarto, sexto, octavo, décimo, décimo segundo, décimo cuarto y décimo sexto orden respectivamente de la ecuación del perfil generador [11, 12].

Si  $d, e, f, g, d_{13}, d_{15}$  y  $d_{17}$  son cero, la superficie resultante es una sección cónica de revolución, (Tabla I), definida por la ecuación

$$z = \frac{c(p^2) + (k + 1)z^2}{2} \quad (2)$$

**2.1.2. Análisis matemático de una lente esférica que compensa la aberración esférica**

En la siguiente sección se desarrolla un diseño particular de una lente que tiene una superficie que transforma una onda plana en una onda cilíndrica, ambas centradas en el eje óptico. Si se traza un rayo desde infinito y por lo tanto paralelo al eje  $z$  [4, 13], e igualando el camino óptico entre el vér-



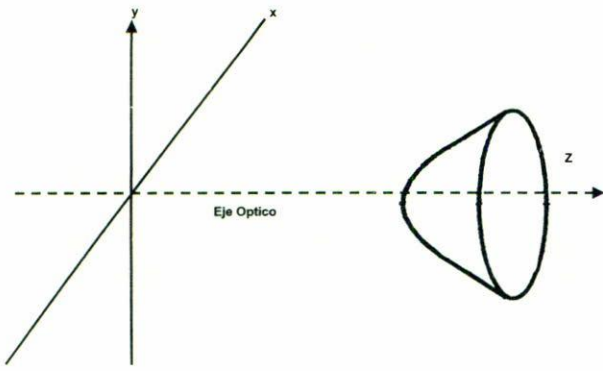


FIGURA 4. Asférica de revolución [7].

TABLA I. Valores de  $k$  con respecto a la forma del perfil generado de la superficie

Intervalo o valor de $k$	Forma de la superficie
$k < -1$	Hiperboloide
$k = 1$	Paraboloide
$-1 < k < 0$	Elipsoide de revolución cerca del eje mayor
$k = 0$	Esfera
$k > 0$	Elipsoide de revolución cerca del eje menor

El camino óptico de la interfaz dieléctrica al foco y de algún otro camino óptico al foco, como se muestra en la Fig. 5, se obtiene

$$n_2 f = n_1 z + n_2 \sqrt{(f - z)^2 + y^2}, \quad (3)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción del medio a la izquierda y derecha de la interfaz, respectivamente y  $f$  es la distancia focal. En esta ecuación el lado derecho representa el camino óptico a una altura del rayo ( $y$ ) refractado por la interfaz a una distancia  $z$  denominada la sagita. La ecuación puede reescribirse en la forma convencional para una elipse con el vértice en el origen:

$$\frac{(z - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

donde

$$a^2 = \left( \frac{f n_2}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad (5)$$

y

$$b^2 = f^2 \left( \frac{\pm \Delta n}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (6)$$

Los parámetros  $a$  y  $b$  representan los cuadrados de los semiejes mayor y menor, respectivamente, y

$$\Delta = n_2 - n_1. \quad (7)$$

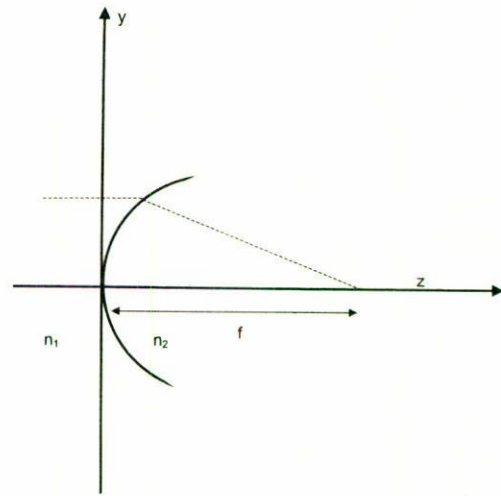


FIGURA 5. Interfaz dieléctrica que desvía un haz de rayos colimados al punto  $f$ . El camino óptico para el rayo principal a lo largo del eje es igual al camino óptico para un rayo paralelo con altura " $y$ " (línea punteada).

La excentricidad de la sección cónica está dada por

$$e = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (8)$$

donde el signo inferior en las Ecs. (6) y (8) corresponden al caso cuando  $n_1 > n_2$ .

Existen dos categorías de superficies libres de aberración esférica: superficie elíptica e hiperbólica en los dos puntos aplanáticos. Los puntos aplanáticos son posiciones para la imagen y el objeto, en la configuración descubierta por Abbe donde las aberraciones esférica y coma están completamente compensadas [12]. Estas superficies son importantes ya que como se indicó en este tipo de lentes se utiliza la región en el eje.

### 2.1.2.1. Superficies elíptica e hiperbólica

Si se considera que el medio a la derecha de la superficie tiene un índice de refracción mayor ( $n_1 < n_2$ ), el factor  $1/b^2$  en la Ec. (4) es positivo y la curva de la superficie representa a una elipse como se muestra en la Fig. 6a. Como el punto focal está situado dentro del medio de índice de refracción mayor, esta forma tiene las propiedades de una lente de inmersión [4].

Una lente de inmersión es una componente de un sistema óptico que incrementa la apertura numérica por un factor proporcional al índice de refracción  $N'$ , el cual actúa sin modificar las características del sistema. Este índice de refracción es el resultado de tratar de igualar los índices de refracción del medio a los dos lados de la superficie de la lente  $n_1$  y  $n_2$  respectivamente. Para lograr una diferencia mínima entre este índice de refracción al índice de refracción de la lente se aplica aceite o alguna otra sustancia al medio menor  $n_1$  (Fig. 6a). En la Fig. 6b se considera los parámetros que intervienen en la lente de inmersión, los cuales son:  $N'$  índice de refracción

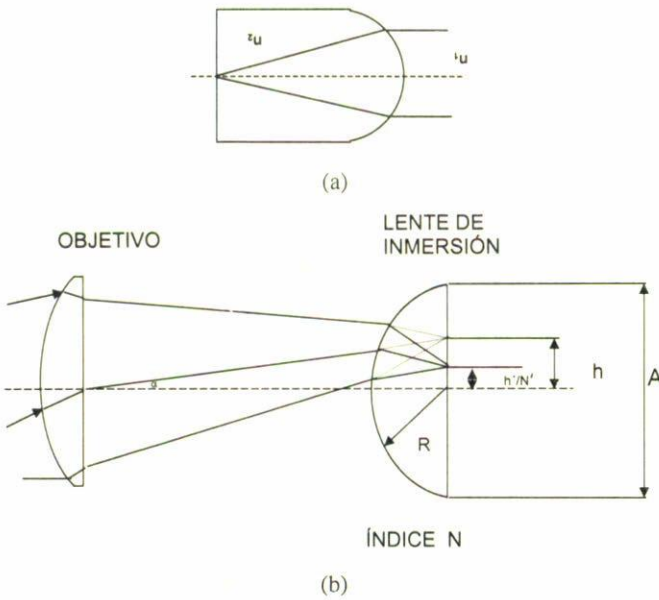


FIGURA 6. a) Lente libre de aberración esférica compuesta por una primera superficie elíptica si  $n_1 < n_2$ . La luz incidente colimada (líneas punteadas) se enfoca en la lente dentro de la segunda superficie. b) Lente de inmersión hemisférica donde el foco de esta lente se encuentra en el foco del sistema óptico, reduciendo el tamaño lineal de la imagen por un factor proporcional a su índice de refracción [14].

de la lente de inmersión,  $h'$  altura de la imagen,  $R$  radio de la lente de inmersión,  $\alpha$  semiángulo del campo de vista del sistema,  $D$  diámetro del detector y  $A$  diámetro de la lente.

Otra forma de considerar la lente de inmersión es suponer que es un amplificador que agranda el tamaño aparente del detector; este concepto se utiliza en sistemas radiométricos o detectores ópticos. La siguiente ecuación es válida para diseñar toda clase de sistemas ópticos, incluyendo objetivos refractores y reflectores con o sin lentes de campo, lentes de inmersión, etc. [14]:

$$\left| \frac{A\alpha}{N'D} \right| \leq 1. \tag{9}$$

En general se considera un valor menor que la unidad Ec. (9), de hecho algunas veces se dificulta exceder un valor de 0.5 cuando se requiere de obtener una buena imagen.

Continuando con la exposición inicial, si el medio de mayor índice de refracción es el izquierdo, el factor  $1/b^2$  del término  $y^2$ , Ec. (4) es negativo y la curva representa a una hipérbola como se muestra en la Fig. 7.

2.1.2.2. Cálculo de los parámetros ópticos distancia focal y apertura numérica para las superficies elíptica e hiperbólica

Para ambas curvas que pueden describir las superficies de la lente, el punto focal de la lente coincide con un foco de la sección cónica, de aquí y de las Ecs. (5) y (8), la distancia

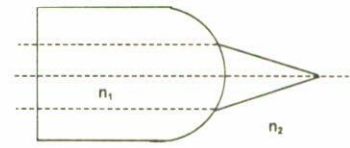


FIGURA 7. Lente libre de aberración esférica tiene una segunda superficie hiperbólica si  $n_1 > n_2$ . La luz colimada incidente (líneas punteadas) no se modifica por el plano de la primera superficie y es enfocada fuera de la lente por la segunda superficie hiperbólica.

focal es

$$f = a \left( \frac{n_2 + n_1}{n_2} \right) = a + ea. \tag{10}$$

La cantidad  $a$  es la distancia a lo largo del eje  $z$  desde el vértice de la sección cónica a su centro, y  $ea$  es la distancia desde el centro al foco.

La apertura numérica de una lente se define como

$$A = n \sin \theta, \tag{11}$$

donde  $\theta$  es la semi-apertura angular de las lentes y  $n$  el índice de refracción del medio en el cual se enfoca la luz. Para lentes de inmersión elíptica con ancho  $2b$ , la apertura numérica es [4]

$$A_{ell} = n_2 \left( \frac{b}{a} \right) = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}. \tag{12}$$

Como es usual si las lentes elípticas están en aire, la apertura numérica es

$$A_{ell} = \sqrt{n_2^2 - 1}; \tag{13}$$

esta ecuación aproxima  $n_2$  al índice de refracción mayor.

La semiapertura angular de las lentes hiperbólicas en el límite del ancho de las lentes puede encontrarse fácilmente igualando el ángulo de la asíntota de la hipérbola al eje  $z$  (Fig. 7):

$$\theta_{hyp} = \arcsen \frac{b}{ea}. \tag{14}$$

De aquí la apertura numérica es

$$A_{hyp} = n_2 \left( \frac{b}{ea} \right) = n_2 \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}. \tag{15}$$

Para el caso usual de lentes en el aire, la apertura numérica es

$$A_{hyp} = \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1}, \tag{16}$$

la cual se aproxima  $n_1$  al índice de refracción mayor [4].

2.1.3. Superficies de revolución con dos planos de simetría

Estas superficies pueden tener formas muy complicadas. Una de las formas más simples de este tipo de superficies son las superficies tóricas, las cuales son generadas por la rotación de un círculo o un arco circular aproximadamente en el eje que ocupa en el plano del círculo, pero no a través de su centro.



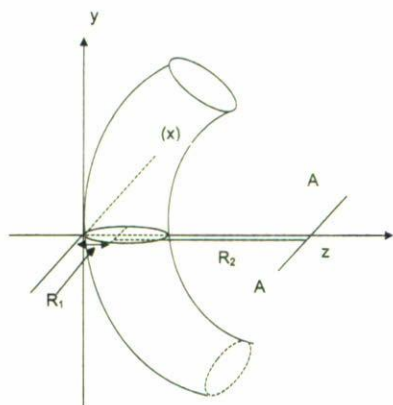


FIGURA 8. Superficie tórica generada por la rotación de un círculo (radio  $R_1$ ) alrededor del eje  $A-A$ , colocado en el mismo plano del círculo.  $R_1$  y  $R_2$  son los parámetros de forma de la superficie tórica. En el caso mostrado de  $R_1 < R_2$  por lo que se obtiene, este tipo particular de toroide [8].

Una superficie tórica tiene dos parámetros de forma. En óptica generalmente se utiliza una pequeña parte de la superficie (en el caso de una superficie de una lente, por ejemplo, la vecindad del origen coordenado  $O$ , Fig. 8). El caso límite más simple de una superficie tórica es un cilindro. Los espejos tóricos son utilizados particularmente cuando el haz luminoso incide casi paralelo a la superficie lo que se conoce como incidencia rasante.

Una superficie tórica en la vecindad del punto (en la Fig. 8) es un caso especial de una superficie de la forma más general

$$z = \sum_{ij} a_{ij} x^{2i} y^{2j} \quad (17)$$

Generalmente una superficie descrita por la Ec. (17) tiene un eje de rotación pero si dos planos de simetría ( $x, y$ ) y ( $y, z$ ). La forma de la Ec. (17) se utiliza para comparar el diseño con respecto a la curva teórica generada en los programas de optimización.

Los parámetros de forma  $a_{ij}$  de una superficie esférica son de carácter global,

$$z = a_2 p^2 + a_4 p^4 + a_6 p^6 + \dots \quad (18)$$

Los parámetros locales no se usan para superficies no simétricas sino para superficies con simetría rotacional. En particular, las superficies ópticas se pueden describir matemáticamente utilizando las técnicas de ajuste por SPLINE [8], es decir el ajuste de polinomios o curvas al diseño.

Las superficies tóricas se han aplicado en lentes oftálmicas para la corrección de astigmatismo. Para cada caso particular la representación matemática apropiada depende del problema óptico a resolver [8].

### 3. Diseño de esféricas

En óptica se utilizan las superficies esféricas cuando se desea mejorar las propiedades de la imagen o en el caso que se de-

sea guiar y conservar adecuadamente la forma de los haces luminosos o flujos de potencia.

En el primer caso es necesario minimizar las aberraciones en los casos que se desea corregir la aberración esférica en los sistemas de iluminación. Para diseñar lentes esféricas con el propósito de guiar y conservar la forma del haz existen problemas similares a los anteriores aún cuando no es de interés que corresponda un punto  $P$  al plano imagen. En este caso el principal interés es mantener la uniformidad de la densidad de energía, como por ejemplo en un condensador óptico. Debido al enfocamiento y forma de los haces de un láser han surgido un número de nuevas aplicaciones. Para tales propósitos las superficies esféricas han sido útiles e indispensables, y su diseño se ha desarrollado a partir de métodos especiales [8].

### 4. Métodos de fabricación y pruebas

Una superficie esférica tiene una misma curvatura  $1/R$  en todas direcciones, por lo que es posible trabajar todos sus puntos de la misma manera. La herramienta utilizada tiene la misma curvatura que la superficie a generar. La pieza de trabajo y la superficie están en contacto continuo girando entre ellas alrededor del centro de curvatura común. Estos movimientos cubren todas las partes de la superficie estadísticamente en la misma manera. La fabricación de superficies esféricas es un proceso más complicado que el de las superficies esféricas debido a la falta de simetría [7].

Existen varias clases de métodos de fabricación, entre éstos los que utilizan deformaciones elásticas: pieza fundida, fundición, moldeo y técnicas relacionadas usando una pieza patrón negativa.

Entre los métodos de fabricación más importantes se describen los siguientes [7, 8]:

- Generado de superficies por presión y moldeo de plásticos. Las lentes esféricas fabricadas con este proceso no tienen una buena calidad óptica pero están presentes en sistemas ópticos comerciales.

- Generado de superficies por presión y calor en vidrio. Este proceso se utiliza en la fabricación de lentes condensadoras esféricas para sistemas de iluminación (spots, lentes para señales y alerta) y proyección (como en los proyectores de transparencias), presentan las características de gran durabilidad y aún cuando no son elementos de gran calidad óptica.

- Evaporación al vacío o recubrimiento plástico. La mayor dificultad en este proceso consiste en la preparación y fabricación precisa de la matriz contraria de la pieza a copiar. Es decir si se desea una superficie esférica convexa se necesita una matriz cóncava que es necesaria fabricarla por otros métodos.

- Remoción de capas por medio de flujo de iones (*ion beam machining*). Este método asegura una gran precisión, sin embargo requiere de una gran infraestructura lo que incrementa el costo de las piezas.



– Generado por remoción del material superficial por torneado, pulido o esmerilado. Estos métodos son los de mayor interés en la producción de componentes ópticas. De acuerdo con la naturaleza del contacto entre la herramienta de corte y la superficie a maquinar éstos se clasifican dentro de tres técnicas generales: Método de contacto a lo largo de la superficie, método del punto de contacto y método de contacto lineal.

En el caso del método de contacto a lo largo de la superficie la herramienta, ésta cubre una gran parte de la superficie a pulir. Este proceso se emplea fundamentalmente para el esmerilado y el pulido de esferas y planos. Su aplicación a superficies esféricas se limita a ciertos casos especiales en los cuales las superficies esféricas son maquinadas con una herramienta que tiene una configuración definida mediante un cálculo previo de desgastes. Este proceso se le conoce como “*local figuring*” (figurado local) y se utiliza para la asferización de superficies que originalmente fueron planas o esféricas como son los espejos parabólicos en algunos telescopios. Para el proceso de esmerilar y pulir esféricas, este método de maquinado emplea una herramienta flexible las cuales efectúan su movimiento a lo largo de la superficie de trabajo permaneciendo siempre en contacto con ella. Se les denominan herramientas flexibles debido que tienen la propiedad de alterar su forma original para adaptarse a la forma de la pieza. Este método se utiliza principalmente en el pulido de superficies esféricas convexas.

Con el método del “punto de contacto” es posible obtener superficies de cualquier forma requerida. La desventaja de esta técnica es que no posee la propiedad de la corrección mutua entre la herramienta y la superficie a maquinar y esto hace posible que la precisión de las superficies resultantes no sea la adecuada.

Finalmente el método de contacto lineal, es el método por el que la herramienta y la pieza de trabajo están en contacto sobre una línea o banda estrecha, el ancho de la herramienta será insignificante en comparación con su largo. Este método de contacto asegura una precisión considerable comparado con el método del “punto de contacto”, ya que permite el maquinado satisfactorio de distintas formas de esféricas como: paraboloides, toroides, conicoides y superficies hiperboloides de una hoja. Este método permite además la corrección simultánea de la herramienta y la superficie a maquinar.

Con respecto a las pruebas que se realizan a las lentes esféricas, las más utilizadas son las pruebas interferométricas. Éstas pueden emplear hologramas generados por computadora [15]. Además, es posible revisar las pruebas no interferométricas en superficies esféricas [16, 8], por ejemplo las pruebas con pantalla. El concepto básico de las pruebas con pantalla es que el frente de onda puede ser muestreado en un número de puntos de la superficie a través de una modalidad predeterminada, y que el frente de onda puede reconstruirse cuando los puntos analizados se relacionan con los otros. Estos métodos se basan en aproximaciones de óptica geométrica [16].

Los métodos de prueba para esféricas puede encontrarse en referencias de pruebas ópticas [17–19]. Entre los métodos interferométricos para probar superficies esféricas está el interferómetro de desplazamiento y el de placa dispersora (*scatter-plate*) [20].

## 5. Campos de aplicación

Con frecuencia, para algunos sistemas ópticos de proyección en los que la calidad del haz de iluminación es muy importante, se emplean varias lentes comunes (esféricas) para conseguir la calidad del haz de iluminación óptima, sin embargo lo más común es emplear una sola lente esférica de buena calidad.

El empleo de lentes esféricas es útil no sólo por sus características correctoras de aberraciones y distorsiones, sino que además significa un ahorro en peso y espacio al hacer innecesario el empleo de otras muchas componentes ópticas y mecánicas en la gran mayoría de los sistemas ópticos de proyección.

El intervalo de aplicación de las asferas en óptica es muy amplio y algunas de sus aplicaciones más comunes son:

- a) Corrección de aberración esférica en los sistemas condensadores de iluminación para proyectores, microscopios, etc.
- b) Corrección del astigmatismo en oculares y lentes de aumento.
- c) Corrección de aberraciones esféricas de la pupila en ciertos sistemas visuales.

Este tipo de lentes son muy utilizadas en el diseño de lentes zoom y telefotos debido a que le permiten al diseñador óptico obtener ventajas adicionales como:

- Ampliación del ángulo de campo en objetivos con la completa eliminación de distorsiones.
- Ampliación del ángulo de campo en oculares de campo plano.
- Reducción del número de componentes, con mejoramiento de calidad de imagen y perfeccionamiento del funcionamiento del sistema óptico.

## 6. Conclusiones

El conocimiento de superficies esféricas proporciona herramientas para fabricar superficies ópticas de mayor calidad que con los métodos tradicionales de fabricación.

Las ventajas al utilizar superficies esféricas en los sistemas ópticos es la reducción de las pérdidas de luz y posibles reflexiones de las superficies ópticas, disminución de peso y ahorro de espacio en los sistemas ópticos así como mayor funcionalidad.

La fabricación de superficies esféricas es mucho más complicada que las superficies esféricas, debido a que las



técnicas que se utilizan actualmente se encuentran en su estado inicial de desarrollo, lo que incrementa el costo de éstas.

Existen ciertos problemas que no pueden ser resueltos sin superficies esféricas, por ejemplo la obtención de una imagen real aplanática para telescopios, la forma de las lentes oftálmicas con una transición continua de la distancia de la lente al área de lectura, sistemas de imagen en onda corta para espejos de incidencia rasante y problemas de concentración y distribución uniforme de la radiación luminosa emitida por un láser.

Es necesario señalar, sin embargo, que en general las superficies esféricas se utilizan para compensar aberraciones de imagen, pero depende de la aplicación del sistema óptico para el cual ha sido diseñado.

### Agradecimientos

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONACyT proyecto 4196P-A.

1. G. Schulz, in *Progress in Optics*, Edited by E. Wolf, (Elsevier Science Publisher, New York, 1988) Vol. 2, p. 351.
2. D. Golini, *OPN Optics and Photonics News* **8** (1997) 41.
3. V. Fisher *et al.*, *Laser Focus World* **31** (5) (1995) 167.
4. J.J. Snyder, P. Reichert, and M. Thomas Baer, *Applied Optics* **30** (1991) 2743.
5. L. Zenteno A., *Applied Optics* **33** (1994)
6. A. Nicia, *Appl. Opt.* **20** (1981) 3136.
7. V.B. Rodriguez, Tesis de Licenciatura en Diseño Industrial, Universidad del Bajío, León, Gto., México, 1997.
8. E. Wolf, *Progress in Optics* **XXV** (1988) 351.
9. D. Malacara y J.M. Malacara, *Telescopios y Estrellas* (1992) 69.
10. K.J. Kumain, *Generation of Optical Surfaces* (The Focal Library, Moscú, 1968) p. 246.
11. Bass Michael, editor in chief, *Handbook of Optics*, 2nd Edition, (Sponsored by the Optical Society of America, 1995) Vol. I, p. 1.37.
12. D. Malacara and Z. Malacara, in "Optical Surfaces, Ray Tracing and Wavefront Shape calculation", *Handbook of Lens Design*, (Marcel Dekker Inc, USA, 1994) p. 45.
13. R. Kingslake, *Lens Design Fundamentals*, (Academic, New York, 1978) p. 112.
14. J.W. Smith, *Modern Optical Engineering, The Design of Optical Systems*, (Mc.Graw Hill, USA, 1966).
15. G. Schulz and J. Schwider, "Interferometric Testing of Smooth surfaces", in: *Progress in Optics*, Vol. XIII, edited by E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1976) Ch. IV.
16. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, second edition (A Wiley-Interscience Publication, USA, 1992) p. 743.
17. D. Malacara, A. Cornejo, and M.V.R.K. Murty, *Appl. Opt.* **14** (1975) 1065.
18. H.J. Caulfield, and W. Friday, *MM& T; Bibliography on Optical Testing*, Technical Report RH-CR-81-5 (US Army Missile Command, Redstone Arsenal (1980).
19. A.C. Rodriguez, H.J. Caulfield, and W. Friday, *Bibliography on the Testing of Optical Surfaces*, Technical Report RH-CR-82-5 (US Army Missile Command, Redstone Arsenal) (1982).
20. M.V.R.K. Murty, and R.P. Shukla, *Ind J. Pure & Appl. Phys.* **21** (1983) 39.