

La ley de Stefan-Boltzmann: Una propuesta para su verificación experimental en el laboratorio docente de física

E. Marín* y J.G. Garayoa

Facultad de Física, Universidad de La Habana
San Lázaro y L Vedado 10400, Ciudad de La Habana, Cuba

Recibido el 8 de mayo de 1998; aceptado el 26 de mayo de 1999

Se describe un experimento de física que permite la verificación de la ley de Stefan-Boltzmann de la radiación. El mismo puede ser fácilmente implementado en laboratorios a nivel universitario o preuniversitario. El método de medición propuesto utiliza equipamiento de bajo costo para la medición de la constante de Stefan-Boltzmann. Creemos que dicho experimento es ideal para introducir a los estudiantes en los conceptos formulados en la física a inicios del presente siglo que condujeron al desarrollo de la mecánica cuántica.

Descriptores: Ley de Stefan-Boltzmann; radiación;

A physics experiment is described, which allows the experimental verification of the Stefan-Boltzmann law of radiation. The experiment can be easily implemented in high school or college laboratories. A measurement method on which the experiment is based has been improved to measure the Stefan-Boltzmann constant with low cost apparatus and we have found it as a ideal tool to introduce students to the concepts formulated in physics in the early 1900's that led to the development of quantum mechanics.

Keywords: Stefan-Boltzmann law; radiation

PACS: 44.40; 42.72; 01.50.Pa

1. Introducción

Las investigaciones científicas en torno a la radiación emitida por los cuerpos a elevadas temperaturas fueron cruciales para el desarrollo de la teoría cuántica de la radiación a inicios del presente siglo. Aparte de su importancia histórica, las características de esta radiación, denominada “radiación de cuerpo negro”, son de gran utilidad práctica en la ciencia moderna. Por ejemplo, en la astrofísica y la cosmología, la radiación proveniente de las estrellas y la de fondo cósmico se caracterizan en términos de espectros de cuerpo negro [1, 2].

La potencia de la radiación térmica emitida por un cuerpo, por unidad de área de su superficie en un intervalo de longitudes de onda $d\lambda$, $I_{CN}(\lambda, T) d\lambda$, está descrita por la ley de Planck

$$I_{CN}(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}, \quad (1)$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación, h la constante de Planck, k la constante de Boltzmann y c la velocidad de la luz en el vacío. Este resultado, obtenido y presentado por Max Planck en un reporte a la Sociedad Alemana de Física en 1900 y publicado al año siguiente en los *Annalen der Physik* [3], fue uno de los puntos culminantes de una serie de trabajos experimentales y teóricos para explicar el origen de la radiación térmica y puede ser considerado el inicio de un conjunto de trabajos que hicieron posible el surgimiento de la mecánica cuántica. Para una perspectiva histórica sobre este tema el lector puede remitirse a los libros de Kuhn [4], Segré [5] y Shemos [6].

A partir de la Ec. (1) se puede deducir una de las propiedades más importantes de la radiación térmica: la potencia total emitida por dicho cuerpo por unidad de área A de su superficie Φ_{CN} es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Dicha ley, conocida como ley de Stefan-Boltzmann, se expresa matemáticamente como

$$\Phi_{CN} = \sigma T^4, \quad (2)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. La ecuación anterior fue propuesta inicialmente por Josef Stefan en 1879 a partir del análisis de mediciones realizadas por John Tyndall. Años más tarde Ludwig Boltzmann fue capaz de derivar dicha ley aplicando razonamientos termodinámicos a la teoría de Maxwell [4–7].

Numerosos experimentos han sido diseñados en los laboratorios docentes para el estudio de la radiación térmica y sus leyes. Algunos de ellos permiten la familiarización de los estudiantes con técnicas de mediciones ópticas de actualidad, al hacer uso de la espectroscopía infrarroja [8] y métodos de modulación en espectroscopía [9] para la determinación de la constante de Planck. Las mismas pueden hacer también posible la comprobación de la ley (2), pero, dados los problemas inherentes a la espectroscopía óptica, sobre todo a la infrarroja, su implementación puede resultar costosa [10].

En el presente trabajo describimos un experimento sencillo y relativamente fácil de implementar en cualquier laboratorio destinado a la enseñanza de la física, para estudiar y comprobar la ley de Stefan-Boltzmann. El mismo constituye una modificación del propuesto por Edmonds [11], que aunque no es el más exacto para la determinación experimental

de σ , si el de más fácil diseño y bajo costo para ser utilizado en un curso de laboratorio de física a nivel universitario o preuniversitario, e ideal para introducir a los estudiantes en los conceptos formulados en la física de finales del siglo pasado e inicios del presente que condujeron al desarrollo de la mecánica cuántica.

2. Experimento

Las expresiones (1) y (2) no contienen parámetros relacionados con el material del cual está construido el cuerpo negro. Esto lo hace apropiado para ser utilizado como modelo estándar de trabajo y para la determinación de la constante σ . Sin embargo, su utilización práctica presenta algunos inconvenientes. El tipo utilizado comúnmente es una esfera metálica hueca calentada en un horno apropiado. Para minimizar gradientes de temperatura no convenientes el horno debe ser relativamente grande. Su calentamiento requiere de un equipamiento adecuado para obtener elevadas temperaturas con un buen nivel de estabilidad y precisión. Por todo ello este equipamiento puede resultar costoso. Así mismo, en gran parte del espectro electromagnético, principalmente en la región ultravioleta, es difícil obtener una cantidad suficiente de radiación, debido a las elevadas temperaturas requeridas, las cuales pueden evaporar u oxidar el material [12].

Para la determinación experimental de la ley de Stefan-Boltzmann escogimos entonces como modelo de cuerpo negro el filamento de tungsteno de un diodo comercial de vacío. En comparación con un cuerpo negro este filamento presenta ciertas ventajas. Su calentamiento mediante una corriente eléctrica, como veremos más adelante, es mucho más simple y hace posible un ajuste bien reproducible y una elevada constancia de la temperatura y la intensidad de la radiación emitida. Como el filamento es montado en vacío y en una atmósfera inerte, se pueden obtener elevadas temperaturas. Sin embargo, las leyes (1) y (2) no son aplicables en este caso. Para un cuerpo no negro arbitrario, a la temperatura T , la potencia de la radiación térmica emitida por unidad de área de su superficie en un intervalo de longitudes de onda $d\lambda$, viene expresada por

$$I(\lambda, T)d\lambda = \varepsilon(\lambda, T)I_{CN}(\lambda, T) d\lambda, \quad (3)$$

donde $I_{CN}(\lambda, T)$ está dada por la Ec. (1) y $\varepsilon(\lambda, T)$ es la emisividad espectral del material del cual está hecho el cuerpo.

Por otra parte, la ley de Stefan-Boltzmann [Ec. (2)], puede ser generalizada para el caso de un cuerpo arbitrario utilizando la ley de Kirchoff, que plantea que la potencia emitida por unidad de área de su superficie (o emitancia) por cualquier cuerpo a cualquier temperatura es igual a una fracción de la emitancia de un cuerpo negro a la misma temperatura [7]. De esta manera se obtiene para la potencia P emitida por dicho cuerpo el resultado

$$P = A\varepsilon_T\sigma T^4, \quad (4)$$

donde A es el área de la superficie emisora y ε_T la emisividad total del material. Con la consideración de este último

parámetro (que puede en teoría tomar valores entre 0 y 1) cualquier error de aproximación al modelo de cuerpo negro es corregido.

Consideremos ahora que el filamento tiene longitud l y sección transversal circular de radio R . A través de él puede hacerse circular una corriente eléctrica de intensidad i que provoca su calentamiento a la temperatura T . Si para cada valor de i se mide la resistencia eléctrica R_T del filamento, la potencia eléctrica suministrada al mismo será

$$P_{el} = i^2 R_T \quad (5)$$

Esta potencia será en cada instante de tiempo igual a la suma de las potencias disipadas en el filamento por mecanismos de conducción de calor a través de los elementos del circuito, convección y radiación térmica, es decir,

$$P_{el} = \frac{k_t A}{l}(T - T_0) + \alpha(T - T_0) + \varepsilon_T \sigma A(T^4 - T_0^4). \quad (6)$$

Si T_0 es la temperatura ambiente y k_t la conductividad térmica del tungsteno, el primer término de la derecha expresa la potencia disipada por el primero de los mecanismos mencionados. El segundo término es la potencia disipada por el mecanismo de convección de calor, donde α es una constante del orden de $10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ para la mayoría de los materiales [13]. El último término representa las pérdidas por radiación térmica determinados por la ley (4).

A temperaturas suficientemente altas, como las alcanzadas por un filamento incandescente de tungsteno como veremos en nuestros resultados, T_0 puede despreciarse en cada uno de los términos de la parte derecha de la Ec. (6). Como el filamento se encuentra en un tubo de vacío, las pérdidas de energía por convección, y por tanto el término correspondiente, pueden ser despreciados también. Por último, como el primer término de la derecha de (6) es mucho menor que el tercero, podemos plantear:

$$i^2 R_T = \varepsilon_T \sigma A T^4, \quad (7)$$

En el experimento descrito por Edmonds [7] se mide T para diferentes valores de la potencia (5) y se comprueba la validez de la ley (7). La variante que proponemos, además, permite el estimado del valor de la constante σ , si ε_T y A son conocidos. Para la medición de T utilizamos la conocida dependencia de la resistividad eléctrica ρ , del tungsteno de la temperatura [14, 15]. Si se conoce $\rho_T/\rho_0 = R_T/R_0$ en función de T , donde $\rho_0(R_0)$ es la resistividad eléctrica (resistencia) a temperatura ambiente, T puede determinarse a partir de valores medidos de R_T . Para esta medición se hizo uso de un puente de Wheatstone como se muestra en la Fig. 1. Utilizamos un diodo de vacío con filamento de calentamiento directo tipo UY-31 [16].

El filamento, que constituye el cátodo de este diodo, se conecta a una de las ramas del puente. Las resistencias R_1 y R_2 tienen valores de 5Ω y 104Ω , respectivamente, con un rango de tolerancia entre 0.2 y 0.1% en el primer caso y una

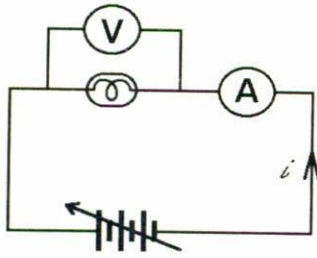


FIGURA 1. Esquema general de medición.

tolerancia de 0.01% en el segundo. La otra rama del puente está formada por cuatro resistores variables que forman una resistencia R_3 ajustable gradualmente entre 0 y $111.1 \times 10^3 \Omega$ con una tolerancia de 0,05%. La corriente i es suministrada por una fuente estabilizada de corriente directa con una salida ajustable entre 0 y 0.3 A. Como indicador de balance del puente utilizamos un galvanómetro magnetoeléctrico G . Utilizando este sistema se pueden determinar valores de R_T para diferentes valores de i según la fórmula

$$R_T = (R_1/R_2)R_3. \quad (8)$$

La resistencia R_0 se obtiene extrapolando a $i = 0$ la curva R_T vs. i . Una vez determinado R_0 se calcula para cada valor de i el cociente R_T/R_0 y para cada valor del mismo se busca en la tabla o curva de calibración ρ_T/ρ_0 vs. T el correspondiente valor de T .

Si se construye un gráfico de $i^2 R_T$ vs. T^4 se puede comprobar la dependencia lineal entre estas magnitudes expresada por la relación (7). A partir de la pendiente de la recta obtenida puede calcularse el valor de σ si los valores de A y ε_T son conocidos. La emisividad total del tungsteno es considerada generalmente en el orden de 0.3 (es importante señalar aquí que el error que se cometería en el presente experimento de utilizar un valor incierto de ε_T sería menor que el debido al método propuesto en sí, como se discutirá en la próxima sección) en el rango de temperaturas importante en el experimento que describimos [17]. Este valor ha sido obtenido por varios autores a partir de mediciones hechas mediante métodos directos o indirectos, según la clasificación realizada por DeVos [12]. En el primer caso la emisividad es determinada de acuerdo a su definición [Ec. (3)], es decir, calculando el cociente entre la intensidad de la radiación emitida por la superficie de un cuerpo y la emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura. En el caso de los métodos indirectos la emisividad es determinada utilizando la ley de Kirchoff a partir de los valores medidos de absorbancia y reflectancia a una temperatura T . Según dicha ley, como para un cuerpo negro la emisividad es igual a la absorbancia (a_T) y para uno opaco la suma de absorbancia y reflectancia (r_T) es igual a la unidad, entonces $\varepsilon_T = 1 - r_T$. Esta relación es válida para cualquier longitud de onda (éste podría constituir un ejercicio de laboratorio interesante en un curso precedente de óptica). Ambos métodos de medición son descritos ampliamente por De Vos [12], quien discute las ventajas y desventajas de cada uno haciendo referencia a los trabajos de varios autores.

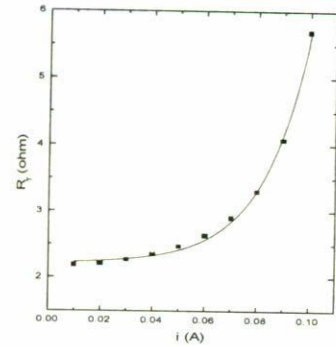


FIGURA 2. Resistencia del filamento en función de la intensidad de la corriente.

Otras técnicas para la medición de este parámetro han sido desarrolladas por otros autores. Por ejemplo, recientemente, J. Shen y colaboradores [18] propusieron una manera de medir ε_T utilizando una novedosa técnica fototérmica que utiliza como detector de ondas térmicas [19] un detector piroeléctrico acoplado a la denominada cavidad resonante de ondas térmicas. Este tipo de medición es relativamente simple y podría servir de complemento al experimento descrito en este trabajo [20]. El valor de A puede ser calculado si se conocen los valores de l y R . Estas magnitudes pueden medirse utilizando el método de proyección propuesto por Crandall y Delord [21]. En nuestro caso, dado el pequeño valor de la segunda de estas magnitudes, dicho método podría conducir a errores apreciables en la misma, luego optamos por la siguiente variante para su estimación.

Si la resistividad del tungsteno a temperatura ambiente es ρ_0 , el área A_t de la sección transversal del filamento puede calcularse como

$$A_t = \frac{\rho_0 l}{R_0}, \quad (9)$$

y si la sección transversal del mismo es circular su radio será

$$R = \sqrt{\frac{A_t}{\pi}} = \sqrt{\frac{\rho l}{\pi R_0}}. \quad (10)$$

3. Resultados y discusión

En la Fig. 2 se muestran los resultados obtenidos de una medición típica de R_T vs. i . La extrapolación de la curva a $i = 0$ conduce a un valor $R_0 = 2.182 \Omega$ de la resistencia del filamento a temperatura ambiente.

En la Fig. 3 se representan los valores medidos de $i^2 R_T$ en función de T^4 . La pendiente de la recta obtenida es $m = (9.84 \pm 0.05) \times 10^{-14} \text{ W/K}^4$, valor obtenido mediante ajuste utilizando el método de mínimos cuadrados. La longitud del filamento del diodo se estimó en aproximadamente $(0.04 \pm 0.01) \text{ m}$. Como para el tungsteno [15] $\rho_0 = 5.65 \times 10^{-8} \text{ cm}$, con el valor de R_0 y con ayuda de la relación (10) se obtuvo para el radio del filamento el valor $R = (0.18 \pm 0.02) \times 10^{-4} \text{ m}$. El área de la superficie emisora

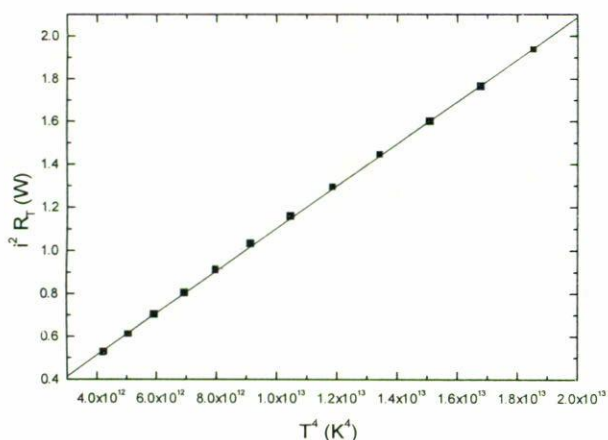


FIGURA 3. Potencia eléctrica suministrada al filamento en función de T^4 . La línea continua representa el ajuste por mínimos cuadrados a una línea recta.

será entonces $A = 2\pi Rl = (0.046 \pm 0.017) \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Con este valor y utilizando $\epsilon_T = 0.3$ se obtiene para la constante de Stefan-Boltzmann el valor $\sigma = m/A\epsilon_T = (7.1 \pm 2.7) \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, que es del mismo orden de magnitud pero mayor que el reportado para esta constante ($\sigma_{\text{rep}} = 5.67051 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ [22]).

Teniendo en cuenta, sin embargo, que generalmente los filamentos de los diodos de vacío y de dispositivos semejantes son protegidos con una capa de óxido [16] los valores reales de $\rho_T(T)$ pueden diferir de los utilizados en nuestras estimaciones de R y T . Análogamente puede ocurrir en el caso de ϵ_T . El valor de todos estos parámetros depende en gran medida de las características del filamento utilizado para su medición, que pueden diferir de las correspondientes al empleado en esta experiencia. Teniendo en cuenta las consideraciones expresadas anteriormente y las aproximaciones hechas en la sección anterior referentes a la Ec. (7), el valor obtenido de σ puede considerarse adecuado para los fines del experimento.

Otra variante que podría adoptarse con el mismo montaje experimental es la descrita por Edmonds [11], la cual puede resultar un ejercicio interesante relacionado al uso de gráficos logarítmicos. En ella la potencia eléctrica suministrada al filamento es representada en un gráfico log-log en función de la temperatura y se comprueba la proporcionalidad de la primera magnitud a la cuarta potencia de la temperatura. De acuerdo a la expresión (4), la pendiente de la recta resultante debe ser igual a 4. Con nuestros valores experimentales nosotros determinamos una pendiente de 3.74 ± 0.01 , en concordancia apreciable con lo esperado para una superficie que emita radiación predominantemente en el intervalo de longitudes de onda mayores que la correspondiente al máximo de la distribución dada por la Ec. (3) [23]. De la intersección de la recta con el eje de las temperaturas puede determinarse el valor de ϵ_T si la constante σ se considera conocida.

El esquema experimental descrito puede ser utilizado además para estudiar el fenómeno de la emisión termoiónica

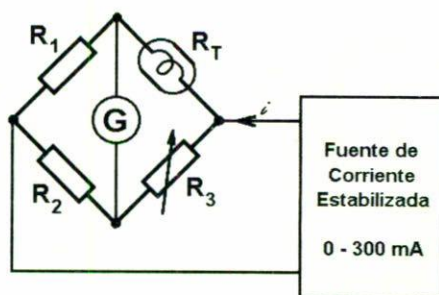


FIGURA 4. Esquema alternativo de medición.

en los metales y para la medición del trabajo de extracción ϕ del tungsteno. Si entre el cátodo y el ánodo del diodo de vacío se aplica una diferencia de potencial constante (en nuestro caso se utilizó una fuente de voltaje de 50 V) y para cada valor de i se mide la intensidad de la corriente i_a que circula por el circuito, a partir de la pendiente de la curva $\ln(i_a/T^2)$ vs. $1/T$ puede calcularse ϕ de la manera descrita en [17]. En nuestro caso obtuvimos un valor de 3.1 eV, que al diferir del reportado (4.4 eV [15]) es una prueba más a favor del hecho de que el material del filamento no es tungsteno puro.

Un experimento similar para la comprobación de la ley de Stefan-Boltzmann puede diseñarse utilizando una lámpara incandescente comercial de filamento de tungsteno y utilizando el esquema mostrado en la Fig. 4.

Como fuente de alimentación del circuito puede utilizarse un transformador variable que suministra el voltaje V al filamento, el cual es medido con un voltímetro conectado en paralelo al mismo. Con un amperímetro se mide la intensidad de la corriente i que circula a través de este último y para cada valor de V se determina $R_T = V/i$ con la ayuda de la ley de Ohm. El procedimiento para determinar T es similar al descrito con anterioridad, al igual que la metodología a seguir para estimar σ . Esta variante experimental puede complementar el experimento propuesto por Jaecks y Du Bois [24] para la determinación de la constante de Planck.

4. Conclusiones

Numerosos trabajos se describen en la literatura especializada para el estudio experimental de las leyes de la radiación térmica. Los métodos propuestos para dicho fin son en general sofisticados y utilizan equipamiento costoso que no es accesible para la mayoría de los laboratorios docentes especializados en la enseñanza de la física. En el presente trabajo se describe un experimento que permite la verificación de la ley de Stefan-Boltzmann de la radiación. Este experimento puede ser fácilmente implementado en laboratorios a nivel universitario o preuniversitario. El método de medición, propuesto inicialmente por Edmonds [11], ha sido modificado utilizando equipamiento de bajo costo para la medición de la constante de Stefan-Boltzmann, y puede implementarse como una práctica de laboratorio, para lo cual proponemos dos variantes prácticas, o formar parte de otros experi-

mentos incluidos generalmente en el curriculum de estudios de muchas instituciones docentes. El experimento propuesto ha sido utilizado con buenos resultados en el Laboratorio de Física Cuántica de la Facultad de Física de la Universidad de La Habana, Cuba, donde estudiantes del sexto semestre de la Licenciatura en Física desarrollan sus prácticas de laboratorio de dicha asignatura. Creemos que dicho experimento permite introducir a los estudiantes en los conceptos formulados en la física a inicios del presente siglo que condujeron al desarrollo de la mecánica cuántica y su familiarización con técnicas de medición útiles para su formación profesional.

Agradecimientos

A los estudiantes L.C. Hernández, M. Ramos, E. Heredia y B. Díaz, del tercer año de la carrera de Licenciatura en Física en La Universidad de La Habana en el curso 1997-98, por su entusiasta participación en la realización de mediciones y el procesamiento de los datos experimentales, donde la actividad cognoscitiva estuvo dirigida por J. G. G. A R.L. Soto por sus útiles comentarios y sugerencias. E.M agradece además al programa postdoctoral del Centro Latinoamericano de Física (CLAF) y al CNPq (Brasil)

-
- * Actualmente en Universidad Estadual do Norte Fluminense, Centro de Ciencia y Tecnología, Av. Alberto Lamego 2000, Campos dos Goytacazes, RJ, Brasil.
1. D.P. Woody and P.L. Richards, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1979) 925.
 2. H.P. Jakobsen, M. Kon, and I.E. Segal, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1788.
 3. M. Planck, *Annalen der Phys.* **4** (1901) 553
 4. T.S. Kuhn, *La teoría del cuerpo negro y la discontinuidad cuántica*, (Alianza Universidad, Madrid, 1980).
 5. E. Segré, *From X-rays to quarks: modern physicists and their discoveries*, (W.H. Freeman and Company, 1980).
 6. M.H. Shamos (Ed.), *Great Experiments in Physics*, (Dover Publications Inc., New York, 1987).
 7. M.W. Zemansky, *Heat and thermodynamics*, 5th Edition, (Mc Graw Hill, 1968).
 8. S. George, J.E. Fredrickson, and A. Sankaranarayanan, *Am. J. Phys.* **40** (1971) 621.
 9. J. Dusck, R.J. Kearney, and G. Baldini, *Am. J. Phys.* **48** (1980) 232.
 10. D.W. Preston and E.R. Dietz, *The Art of Experimental Physics*, (John Wiley and Son, USA, 1991).
 11. Y.R. Edmonds, *Am. J. Phys.* **36** (1968) 845.
 12. J.C. DeVos, *Physica* **20** (1954) 690.
 13. H. Claussnitzer, *Einführung in die Elektrotechnik*, (Verlag Technik, Berlín, 1965).
 14. W.E. Forsythe and A.G. Worthing, *Astrophysical Journal* **61** (1925) 146.
 15. R.C. Weast (Ed.), *Handbook of Chemistry and Physics*, (Chemical Rubber, Cleveland, Ohio, 1971).
 16. Operation Manual. *Determination of electron work function-type SPE-1A*, (Technical University of Wroclaw, Poland, 1989).
 17. A.C. Melissinos, *Experiments in Modern Physics*, (Academic Press, USA, 1966).
 18. J. Shen, A. Mandelis, and H. Tsei, *Rev. Sci. Instrum.* **69** (1998) 197.
 19. F.A. Mc. Donald, *Am. J. of Phys.* **48** (1980) 41.
 20. E. Marín *et al.* (en preparación).
 21. R.E. Crandall and J.F. Delord, *Am. J. Phys.* **51** (1983) 90.
 22. E.R. Cohen and B.N. Taylor, *Phys. Today* **42** (1989) 8.
 23. J.L. Monteith and M. Unsworth, *Principles of Environmental Physics*, 2nd Edition, (Arnold, London, 1995) p. 26.
 24. D.H. Jaecks and R. Dubois, *Am. J. Phys.* **40** (1972) 1179.