

Sobre la dinámica del universo preinflacionario anisótropo

A.I. Nesterov¹ y P. Torres Tonche²

Departamento de Física, Universidad de Guadalajara

Guadalajara Jalisco, México

*e-mail:*¹*nesterov@udg.serv.cencar.udg.mx;* ²*ptorres@ccip.udg.mx*

Recibido el 1 de junio de 1998; aceptado el 29 de junio de 1999

La dinámica del modelo anisótropo del IX del tipo Bianchi (universo *mixmaster*) con materia y la constante cosmológica ha sido estudiada. Este modelo puede ser considerado para describir el universo preinflacionario donde la constante cosmológica es producida por la energía de vacío del campo inflacionario. Hay un punto crítico de silla en el espacio fase del sistema y un fuerte atractor de Sitter. La estructura del espacio fase junto al punto crítico es muy complicada, presentando órbitas ilimitadas que escapan de las orbitas periódicas inestables. Aun con una pequeña anisotropía, el universo oscila por un tiempo grande en la vecindad del punto crítico antes de colapsarse o escaparse al universo de de Sitter, mostrando el comportamiento caótico. Nuestros resultados amplían los resultados de Olivera *et al.* [*Phys. Rev. D* **56** (1997) 730] obtenidos para el caso de dos escalas anisótropas.

Descriptores: Universo *mixmaster*; constante cosmológica

The dynamics of anisotropic Bianchi type-IX model (*Mixmaster* Universe) with matter and cosmological constant is studied. The model can be considered as describing the preinflationary universe where the cosmological constant is arised from the vacuum energy of the inflation field. There are a critical saddle-point in the phase space of the system and a strong asymptotic de Sitter attractor. The structure of the phase space near the critical point is very complicated, presenting the unbounded orbits escaping from unstable periodic orbits. Even for very small anisotropy, the universe oscillates a long time in the neighborhood of the critical point before collapsing or escaping to the de Sitter universe, exhibiting the chaotic behavior. Our results extend the results of Oliviera *et al.* [*Phys. Rev. D* **56** (1997) 730] for the case of two anisotropic scale functions.

Keywords: *Mixmaster* Universe; cosmological constant

PACS: 98.80.Hw; 95.10.Fh; 98.80.Cq

1. Introducción

Entre los modelos cosmológicos conocidos, uno de los más interesantes es el universo *mixmaster*, el cual pertenece al tipo IX por la clasificación de Bianchi y describe una cosmología vacía, homogénea y anisótropa, en donde la gravedad pura exhibe caos [1-6]. El comportamiento caótico en el acercamiento a la singularidad fue descubierto por Belinskii, Khalatnikov y Lifshitz [7, 8] y está caracterizada por una serie de las épocas de Kasner, las cuales pueden ser definidas por el movimiento libre en los términos del minisuperespacio [1, 3].

Un rasgo importante del modelo IX del tipo de Bianchi es que cuando la materia y la constante cosmológica positiva están incluidas, este modelo es el único dentro de los modelos cosmológicos expandidos de Bianchi, el cual requiere que el valor absoluto de la constante cosmológica sea bastante grande en comparación con la curvatura espacial para exhibir la evolución hacia el universo de de Sitter [9].

Recientemente el papel de la anisotropía y la constante cosmológica en el estado preinflacionario del modelo IX de Bianchi con dos escalas anisótropas fue investigado en la Ref. 10. Fue mostrado que la constante cosmológica conduce a la aparición de un punto crítico de silla y que el sistema es un sistema inestable en entorno del punto crítico, con la

estructura del espacio fásico muy complicada, la cual consiste de cilindros emanados de las órbitas periodicas inestables. Este, en la presencia aún la anisotropía suave, produce la dinámica caótica: los grados gravitacionales de libertad están oscilando por un tiempo largo cerca del punto crítico antes que se derrumbarse o escaparse a la fase de de Sitter.

En nuestro trabajo hemos aplicado los métodos analíticos y numéricos para estudiar lejos y cerca del punto crítico la dinámica del modelo IX de Bianchi, que es totalmente anisótropa (universo *mixmaster* con tres escalas de anisotropía) con la materia y la constante cosmológica. El artículo está organizado en la forma siguiente. En la Sec. 2 consideramos las características principales del universo *mixmaster* vacío. Aplicando el criterio local de inestabilidad, basado en el compartamiento del vector de desviación, mostramos que el entorno del origen da las coordenadas, el modelo es estable y lejos del dicho punto el sistema es inestable y manifiesta el comportamiento caótico. En la Sec. 3 estudiamos en entorno del punto crítico la dinámica del universo preinflacionario anisótropo con la constante cosmológica y la materia en la forma de un polvo. Encontramos, que como en el caso de dos escalas anisótropas, el sistema tiene dos puntos críticos, de los cuales uno es el punto crítico degenerado y corresponde a la singularidad donde el universo nació. Otro punto crítico pertenece al origen de las coordenadas y presenta el universo

estático de Einstein. El estudio analítico y numérico del sistema linealizado en el entorno del punto crítico muestra una estructura del espacio de fase muy complicada, la cual consiste de los cilindros homoclinicos emanados de los órbitas periódicas inestables. A diferencia del universo vacío el modelo es inestable en el entorno del origen de las coordenadas. En la Sec. 4 discutimos los resultados obtenidos.

Los resultados del análisis numérico los obtuvimos utilizando el paquete MAPLE V(R.3) y el paquete Poincaré [13]. Los parámetros q_1, q_2 y q_3 que aparecen en las gráficas están relacionados con $\alpha, \beta_+, \beta_-, p_\alpha, p_+$ y p_- (ver Sec. 1) de la siguiente manera: $q_1 = \beta_+, q_2 = \beta_-, q_3 = \alpha, p_1 = p_+, p_2 = p_-, p_3 = p_\alpha$. Todos los cálculos se hicieron en la computadora Pentium 233 con 64MB memoria de RAM.

2. Dinámica del universo Mixmaster

La métrica del universo *mixmaster* tiene la siguiente forma [1-3]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{-2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\sigma^i\sigma^j, \tag{1}$$

donde $N(t)$ es la función de lapso, $\sigma^1 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\phi, \sigma^2 = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\phi, \sigma^3 = d\psi + \cos\theta d\phi, \beta_{ij} = \text{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+)$ es una matriz diagonal con la traza igual a cero y $\alpha(t)$ está relacionada con el volumen del universo $\mathcal{V} \propto \exp(-3\alpha)$.

Con la elección de la función del lapso apropiada, la acción para este modelo es [1]

$$I = \int (p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\alpha d\alpha - \mathcal{H} dt), \tag{2}$$

en la cual

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{-p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2 + e^{-4\alpha}[V(\beta_\pm) - 1]\} \tag{3}$$

es el super-hamiltoniano con el potencial anisótropo

$$V(\beta_\pm) = 1 + \frac{1}{3}e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+} \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + \frac{2}{3}e^{4\beta_+} [\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1], \tag{4}$$

el cual tiene la forma *triangular* (Fig. 1). La curvatura escalar 3R del espacio tres-dimensional esta relacionada con el potencial V por medio de ${}^3R = (3/2)e^{2\alpha}(1 - V)$. Esta acción debe ser suplementada con la condición $\mathcal{H} = 0$, para reproducir las ecuaciones de Einstein satisfactoriamente.

Por tanto, la dinámica *mixmaster* puede ser vista como la dinámica de una partícula en un potencial dependiente del tiempo. Los movimientos simples pueden ser obtenidos de la observación siguiente. Para β fijo el término $e^{-4\alpha}(V - 1)$ es despreciable, cuando α aumenta, resulta que cada término p_i en \mathcal{H} es constante y $p_\alpha^2 = p_+^2 + p_-^2$. Ésas son las épocas de Kasner donde $(d\beta_+/d\alpha)^2 + (d\beta_-/d\alpha)^2 = 1$, puesto que las ecuaciones de Hamilton dan $d\beta_\pm/d\alpha = -p_\pm/p_\alpha$. Para conectar las notaciones de arriba con la parametrización común

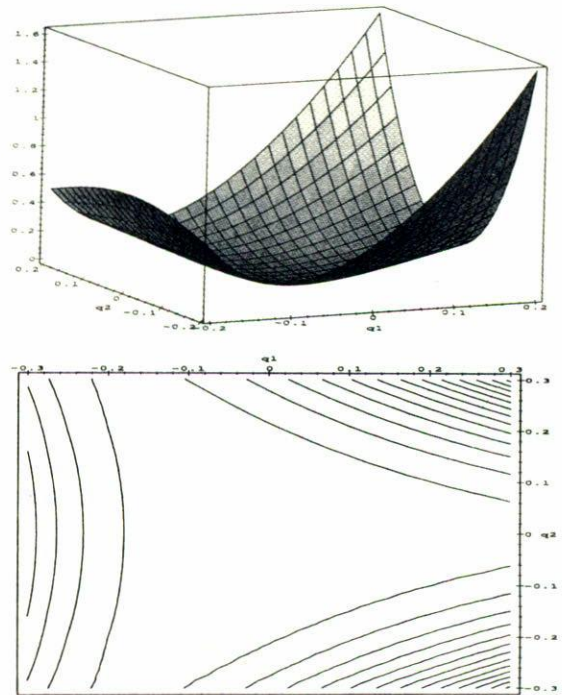


FIGURA 1. El potencial anisótropo del universo *mixmaster* y las curvas de nivel del mismo.

de las soluciones de Kasner debemos fijar:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(p_+ + \sqrt{3}p_- + p_\alpha)}{3p_\alpha} = \frac{-u}{(u^2 + u + 1)}, \\ P_2 &= \frac{(p_+ - \sqrt{3}p_- + p_\alpha)}{3p_\alpha} = \frac{(1 + u)}{(u^2 + u + 1)}, \\ P_3 &= \frac{(-2p_+ + p_\alpha)}{3p_\alpha} = \frac{u(1 + u)}{(u^2 + u + 1)}, \end{aligned} \tag{5}$$

Dentro de cada época de Kasner las trayectorias son rectas. En la Fig. 2 se muestra una serie de épocas de Kasner en las cuales se ve un movimiento libre entre una reflexión y otra. Después de una reflexión en la pared del potencial, a la trayectoria nueva se le conoce como una nueva época de Kasner.

En sistemas hamiltonianos la aparición del comportamiento caótico se caracteriza, entre otras cosas, por la pérdida de la estabilidad del movimiento en el espacio-fase. Esta inestabilidad puede verse como una divergencia exponencial entre dos trayectorias inicialmente cercanas e implica que la distancia entre ellas,

$$d_t(\mathbf{z}', \mathbf{z}) \equiv \sum_{a=1}^n \left\{ [x'_a(t) - x_a(t)]^2 + [p'_a(t) - p_a(t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

tenga la forma siguiente:

$$d_t = d_0 e^{\lambda t}, \tag{7}$$

donde $e^{\lambda t}$, es el exponente de Liapunov.

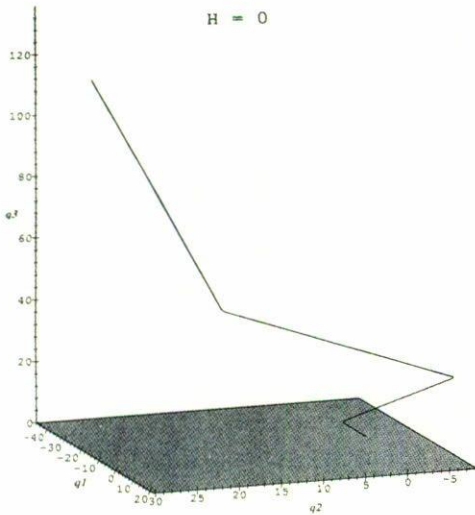


FIGURA 2. Serie de reflexiones del universo en un potencial anisótropo en expansión. Dentro de cada época de Kasner la trayectoria es una recta.

Consideremos dos trayectorias muy cercanas $\mathbf{z}(t) \equiv (x_a(t), \mathbf{p}_a(t))$ y $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{z}(t) + \varepsilon(t)$ en el espacio-fase. La ecuación de desviación (la ecuación de Jacobi) se escribe como

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{M}(t) \cdot \varepsilon, \tag{8}$$

en donde $\mathbf{M}(t) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{Hess}$ se llama la matriz hamiltoniana [11] y es la matriz resultante de multiplicar la matriz simpléctica por la matriz hesiana, correspondiente al hamiltoniano del sistema mecánico y cuyos valores propios son los que aparecen en el exponente de Liapunov [12].

La solución de la Ec. (8) podemos buscarla en la forma $\varepsilon(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \varepsilon(0)$, $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$, donde la matriz $\mathbf{U}(t)$ satisface

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{U}(t). \tag{9}$$

La solución formal de esta ecuación puede ser escrita como

$$\mathbf{U}(t) = \exp \left\{ \int_0^t \mathbf{M}(\tau) d\tau \right\} \mathbf{U}(0). \tag{10}$$

Imaginemos por el momento que la matriz hamiltoniana no depende del tiempo y sea $\{\lambda_k\}$ el conjunto de los valores propios. Usando la base de los vectores propios correspondientes, podemos ver que $\mathbf{U}(t) = \{\exp[\lambda_k(t)]\}$ es una matriz diagonal.

La divergencia exponencial de las trayectorias inicialmente cercanas depende de si la parte real de al menos uno de los valores propios $\text{Re}(\lambda_k) = \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_k^*)$, es positiva. Esto es posible verlo tomando el logaritmo de la traza del producto $\mathbf{U}^+ \mathbf{U}$,

$$\frac{1}{2t} \ln \text{Tr}[\mathbf{U}^+ \mathbf{U}(t)] = \frac{1}{2t} \ln \text{Tr}[\exp(\lambda_k + \lambda_k^*) t], \tag{11}$$

permitiendo que t vaya al infinito. En este límite sólo el valor propio con la mayor parte real positiva sobrevive y se define

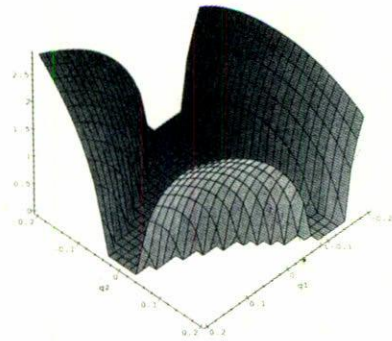


FIGURA 3. La parte real de λ_1 para el universo vacío.

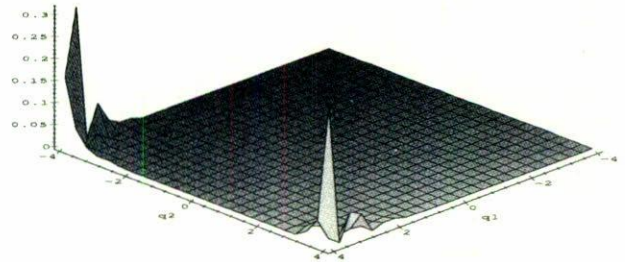


FIGURA 4. La parte real de λ_3 y λ_5 para el universo vacío.

como el exponente principal característico de Liapunov:

$$\mu_1 \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \text{Tr}[\mathbf{U}^+(t) \mathbf{U}(t)], \tag{12}$$

con el cual tenemos un criterio de inestabilidad. Si $\mu_1 > 0$, existe al menos una dirección a lo largo de la cual las trayectorias inicialmente cercanas se divergen en promedio como $\exp(\mu_1 t)$, o bien el sistema muestra un comportamiento inestable.

La definición (12), también es posible aplicarla en el caso general cuando $\mathbf{M}(t)$ dependa del tiempo, pero en esta situación $\mu_1(t, z(t))$ depende de las trayectorias iniciales $z(t)$.

Universo mixmaster. En este caso hay seis valores propios correspondientes a la matriz \mathbf{M} , para los cuales encontramos que $\Re\lambda_1 = -\Re\lambda_2$, $\Re\lambda_3 = -\Re\lambda_4$, $\Re\lambda_5 = -\Re\lambda_6$. En las Figs. 3 y 4 se presentan las gráficas de $\Re\lambda_1$, $\Re\lambda_2$ y $\Re\lambda_3$, de las cuales solo λ_1 tiene la parte real esencialmente distinta de cero cerca del origen de las coordenadas. Esto produce la inestabilidad en el sistema, cuando está lejos del origen, y por lo tanto el comportamiento caótico (Fig. 5).

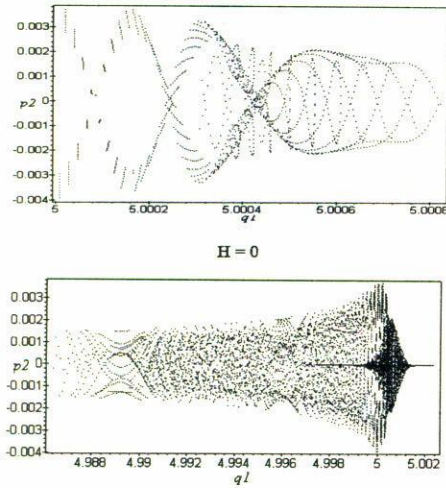


FIGURA 5. Caos en el universo *mixmaster*. Las secciones de Poincaré: $q_2 = q_3 = p_1 = p_3 = 0$. Arriba se puede ver las trayectorias regulares e irregulares. Con el tiempo las trayectorias regulares se desaparecen y el movimiento se convierte al movimiento caótico (abajo).

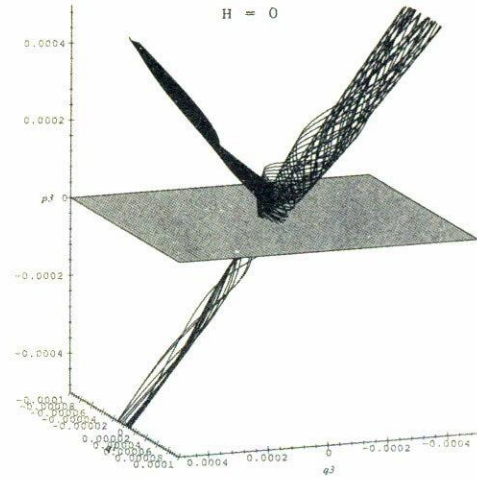


FIGURA 6. Las órbitas generales para el hamiltoniano linealizado ($\Lambda = 0.25$).

3. Universo preinflacionario anisótropo

Si la constante cosmológica y la materia sin adicionales grados de libertad están incluidas en la acción, el superhamiltoniano se modifica en la forma siguiente:

$$2\mathcal{H} = -p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2 + e^{-4\alpha} \left\{ \frac{1}{3}e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+} \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + \frac{2}{3}e^{4\beta_+} \left[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1 \right] \right\} + \frac{4}{3}e^{-6\alpha}(\Lambda + \epsilon) = 0, \quad (13)$$

donde $\epsilon = T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu$ es la densidad de la energía de la materia en el propio sistema de referencia para lo cual $\tau^\mu = N^{-1}\delta_0^\mu$, y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum de la materia.

Ahora consideremos el modelo IX del tipo de Bianchi con la constante cosmológica Λ y la materia en forma de polvo. Supongamos que el término con la constante cosmológica está originado por la energía de vacío del campo de inflación. El super-hamiltoniano (13) puede ser escrito en la siguiente forma:

$$2\mathcal{H} = -p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2 + e^{-4\alpha} \left\{ \frac{1}{3}e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+} \cosh(2\sqrt{3}\beta_-) + \frac{2}{3}e^{4\beta_+} \left[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1 \right] \right\} + \frac{4}{3}\Lambda e^{-6\alpha} + \frac{2}{3}E_0 e^{-3\alpha} = 0, \quad (14)$$

donde la constante E_0 está relacionada con la energía total del universo: $2\epsilon \exp(-3\alpha) = E_0$.

3.1. Dinámica del modelo en entorno de los puntos críticos

El sistema dinámico (14) tiene un punto crítico cuando

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln(4\Lambda), \quad \beta_+ = \beta_- = 0, \quad p_\alpha = p_+ = p_- = 0, \quad (15)$$

con la energía asociada $E_0 = E_{cr} = 1/\sqrt{4\Lambda}$. Este punto crítico representa el universo estático de Einstein. Hay otro punto crítico, $\beta_+ = \beta_- = 0, \alpha = \infty$, el cual es un punto crítico degenerado y corresponde a la singularidad cuando el universo nació.

Linealizando la Ec. (14) cerca del punto crítico, obtenemos

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + w_0^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + w_0^2 q_2^2) - \frac{1}{2}(p_3^2 - w^2 q_3^2) + \epsilon = 0, \quad (16)$$

donde

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}, \quad w = \frac{1}{4\Lambda}, \quad \epsilon = \frac{1}{3(4\Lambda)^{3/2}}(E_0 - E_{cr}).$$

Los dos primeros términos del hamiltoniano linealizado (16) producen el movimiento rotacional, y el último término da las trayectorias hiperbólicas. En la Fig. 6 presentamos las órbitas generales obtenidos para $\Lambda = 0.25$ y $E_0 = 0.99999999$.

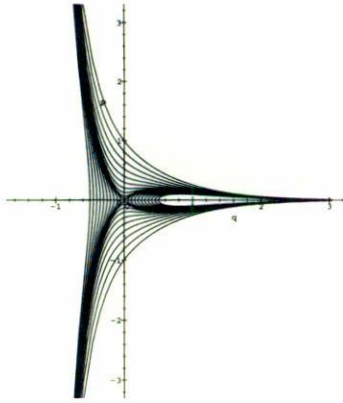


FIGURA 7. Retrato fásico del sistema ($\Lambda = 0.25$). La separatriz corresponde a la energía $E_0 = E_{cr} = 1$.

Otro rasgo importante del sistema (14) es que tiene una variedad invariante \mathcal{M} definida por

$$\beta_+ = \beta_- = p_+ = p_- = 0 \tag{17}$$

con el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}e^{-4\alpha} - \frac{2}{3}\Lambda e^{-6\alpha} - \frac{1}{3}E_0 e^{-3\alpha} = 0. \tag{18}$$

Sobre \mathcal{M} el sistema de ecuaciones dinámicas del modelo se reduce al siguiente:

$$\dot{\alpha} = p_\alpha, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{3}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}e^{-4\alpha} - 2\Lambda e^{-6\alpha}, \tag{19}$$

el cual es un sistema integrable y su solución está escrita como

$$p_\alpha = \pm \sqrt{\frac{4}{3}\Lambda e^{-6\alpha} + \frac{2}{3}E_0 e^{-3\alpha} - e^{-4\alpha}}.$$

El retrato fásico de este sistema está en la Fig. 7, donde las curvas integrales presentan los universos del tipo IX de Bianchi homogéneos e isotrópicos con polvo y la constante cosmológica con $\Lambda = 0.25$.

El punto crítico perteneciente a la separatriz, la cual corresponde a la energía crítica $E_0 = E_{cr} = 1/\sqrt{4\Lambda}$ y está definida por

$$p_\alpha^2 + e^{-4\alpha} - \frac{4}{3}\Lambda e^{-6\alpha} - \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}e^{-3\alpha} = 0. \tag{20}$$

En la aproximación lineal el sistema es un sistema separable y podemos introducir dos constantes de movimiento

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{2}(p_1^2 + w_0^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + w_0^2 q_2^2), \\ \varepsilon_h &= -\frac{1}{2}(p_3^2 - w^2 q_3^2) \end{aligned} \tag{21}$$

de las cuales ε_r se refiere como la energía rotacional y ε_h como la energía de movimiento hiperbólico. Si $\varepsilon_r + \varepsilon > 0$, el movimiento está restringido sobre las órbitas que escapan al atractor de de Sitter (Fig. 11). Si $\varepsilon_r + \varepsilon < 0$, las órbitas tiene

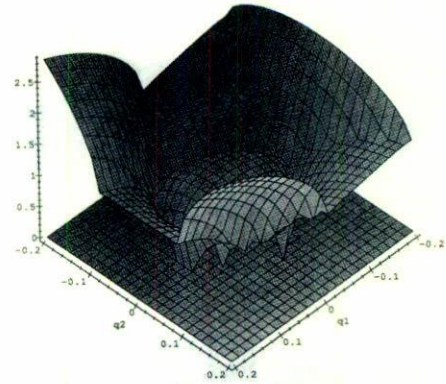


FIGURA 8. La parte real de λ_1 para el universo con materia ($\Lambda = 0.25$).

que colapsarse (Fig. 10). Tomando en cuenta que ε_r siempre es positiva, podemos ver que para $\varepsilon > 0$ las órbitas se van al atractor de de Sitter. Si $\varepsilon < 0$, existe dos opciones: escape cuando $\varepsilon_r + \varepsilon > 0$ o colapso cuando $\varepsilon_r + \varepsilon < 0$. En otras palabras, en el caso general no es posible decir con certeza que el universo va a inflacionarse o colapsarse pasando el entorno del punto crítico. El resultado depende de la distribución de la energía entre los grados de libertad rotacional e hiperbólico. La nointegrabilidad del sistema resulta que la redistribución de la energía entre dichos grados de libertad tiene un caracter caótico y produce el éxito caótico a la inflación.

3.2. Transición a inflación

Igual como en el caso del universo vacío hay seis valores propios de la matriz hamiltoniana, para los cuales encontramos que $\Re\Lambda_1 = -\Re\Lambda_2, \Re\Lambda_3 = -\Re\Lambda_4, \Re\Lambda_5 = -\Re\Lambda_6$. En las Figs. 8 y 9 se muestran las gráficas de $\Re\Lambda_1, \Re\Lambda_2$ y $\Re\Lambda_3$, de las cuales solo λ_1 tiene la parte real esencialmente distinta del cero en entorno del punto crítico. A diferencia del universo vacío $\Re\Lambda_1$ no es igual a cero en el origen de las coordenadas. Este origina la inestabilidad del sistema en entorno del punto crítico.

En el experimento numérico hecho aquí asumimos $\Lambda = 0.25$, entonces $E_{cr} = 1$. Para varias condiciones iniciales investigamos el comportamiento de las órbitas en la vecindad la separatriz. Dando varios valores a la energía E_0 , el conjunto de condiciones iniciales las elijimos de la forma siguiente: $q_2 = p_2 = 0, q_1 = 10^{-6}, q_3 = 5 \cdot 10^{-4}, p_1 \in (-10^{-4}, 10^4)$ y p_3 se encuentra del super-hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$. Haciendo algunos cálculos encontramos que dentro del intervalo $\Delta E \approx 10^{-8}$ hay dos opciones: colapso o escape al universo de de Sitter.

En las Figs. 10–13 presentamos los resultados de la investigación numérica. Para la energía $E_0 = E_1 = 0.9999999825$ estudiamos el comportamiento de 50 órbitas, las cuales están oscilando alrededor del punto crítico antes de colapsarse. Si la energía aumenta, pero no alcanza la energía crítica, las órbitas pueden escapar al universo de Sitter (Fig. 11, $E_0 = E_2 = 0.999999999$). En el caso cuando

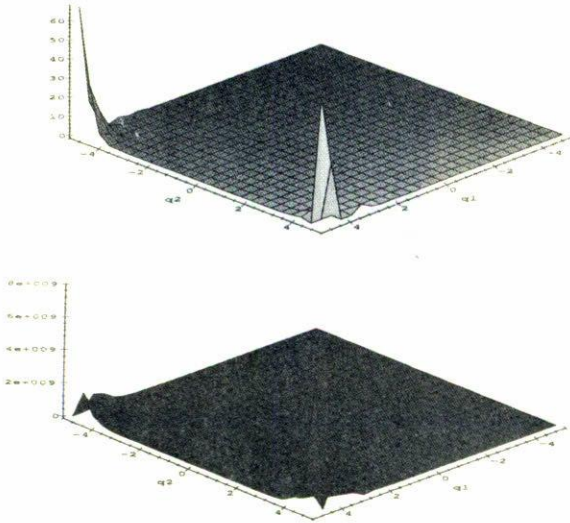


FIGURA 9. La parte real de λ_3 y λ_5 para el universo con materia ($\Lambda = 0.25$).

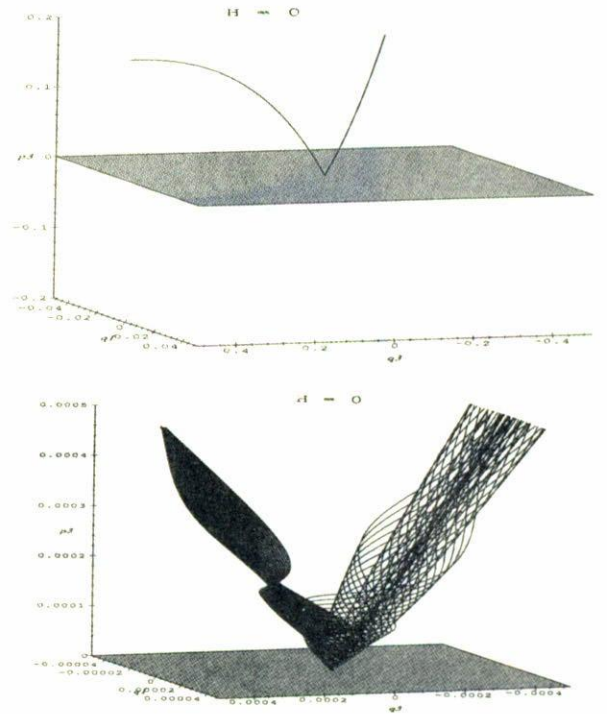


FIGURA 11. Escape de 50 órbitas al universo de de Sitter ($\Lambda = 0.25$, $E_0 = 0.999999999$). Abajo la misma gráfica que arriba con la resolución más alta y en entorno del punto crítico.

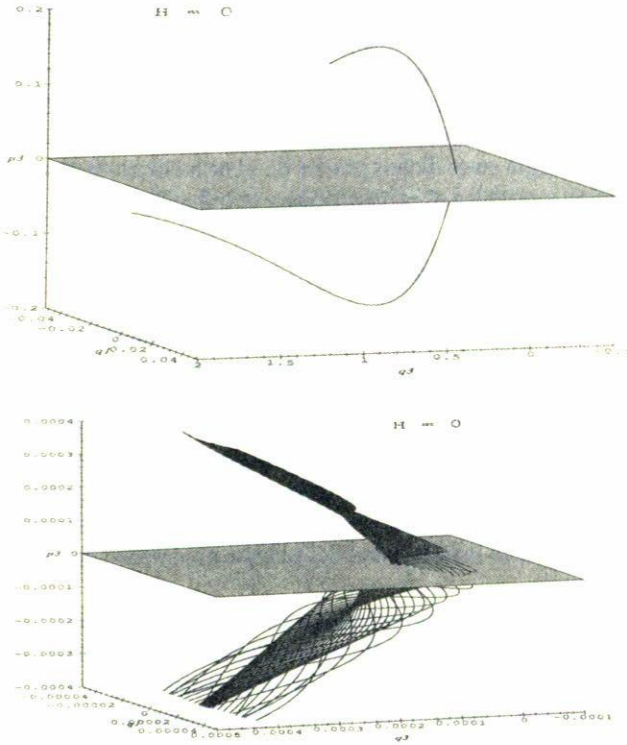


FIGURA 10. Colapso de 50 órbitas ($\Lambda = 0.25$, $E_0 = 0.9999999825$). Abajo la misma gráfica que arriba pero con la resolución más alta y en entorno del punto crítico. Notemos las oscilaciones alrededor del punto crítico así como también de la separatrix.

$E_0 \in (E_1, E_2)$ encontramos que para 100 órbitas unas de ellas escapan y las demás se colapsan (Fig. 13). Si $E_0 > E_{cr}$, siempre observamos el escape de las órbitas hacia el universo de de Sitter.

La investigación numérica muestra que existe un intervalo de la energía $(1.0 - \Delta E, 1.0 + \Delta E)$ dentro del cual unas

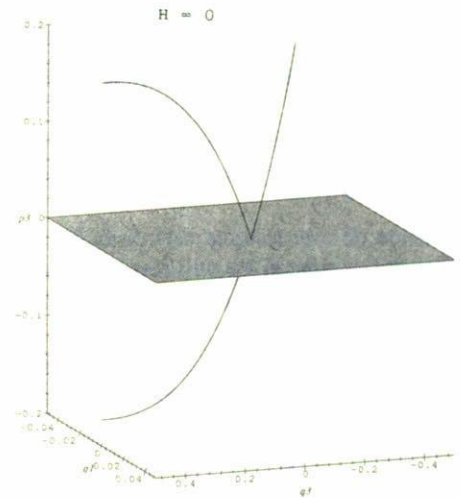


FIGURA 12. Escape [colapso] de 100 órbitas ($\Lambda = 0.25$, $E_0 = 0.9999999975$).

órbitas escapan y las demás se colapsan. El resultado depende de la redistribución de la energía entre los grados de libertad hiperbólico y rotacional, el cual es un proceso impredecible debido a la no integrabilidad del sistema. Como consecuencia cualquier pequeña fluctuación en las condiciones iniciales puede cuasar el resultado final indeterminado: colapso o escape. Esto implica la dinámica caótica en entorno del punto crítico.

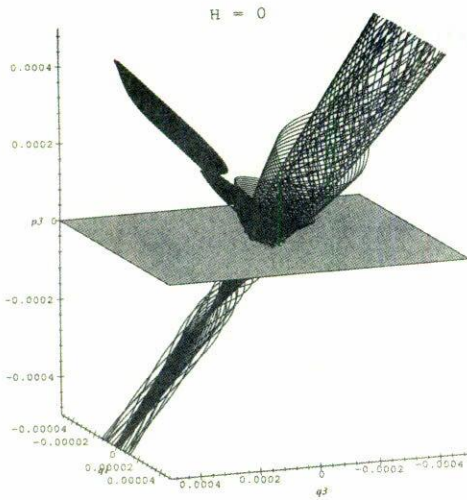


FIGURA 13. Exito caótico a la inflación: la misma gráfica que en la Fig. 12 pero con la resolución más alta ($\Lambda = 0.25$, $E_0 = 0.9999999975$).

4. Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la dinámica del modelo IX del tipo Bianchi, el cual nos puede proveer de una descrip-

ción del estado preinflacionario del universo. Los principales ingredientes de este modelo son la constante cosmológica, la materia y la anisotropía. Nuestros resultados extienden los resultados obtenidos por de Oliveira *et al.* [10] para el caso de dos escalas de anisotropía y confirma sus conclusiones principales sobre el éxito caótico a la inflación.

La extrema sensibilidad y la anisotropía llevan el sistema rápidamente al movimiento caótico. Junto a la singularidad, la dinámica *mixmaster* tiene un comportamiento regular dentro de cada época de Kasner (Fig. 2) y un comportamiento caótico cuando entra a uno de los rincones del potencial (Fig. 5). La presencia de la anisotropía, igualmente en forma de pequeñas perturbaciones junto con la constante cosmológica, produce en el espacio fase un punto de silla. Asociada al centro de silla tenemos una variedad de órbitas periódicas inestables y los cilindros emanados de las órbitas inestables (Fig. 6). Esto conduce a la dinámica caótica: los grados gravitacionales de libertad están oscilando por un tiempo largo cerca del punto crítico antes de colapsarse o escaparse a la fase de de Sitter.

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por CONACyT, proyecto No. 1626P-E.

1. C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco, 1973).
2. M.P. Ryan and L.C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, (Princeton University Press, Princeton, 1975).
3. C.W. Misner, *The Mixmaster Cosmological Metrics*, gr-qc/9405068.
4. D. Hobill, A. Burd, and A. Coley, *Deterministic Chaos in General Relativity*, (Plenum Publishing Corporation, USA, 1994).
5. F. Christiansen, H.H. Rugh, and S.E. Rugh, *Non-integrability of the mixmaster universe*, solv-int/9406002.
6. A.D. Rendall, *Global dynamics of the Mixmaster model*, gr-qc/9703036.
7. V.A. Belinskii and I.M. Khalatnikov, *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **56** (1969) 911.
8. Belinskii, V.A., I.M. Khalatnikov, and E.M. Lifshitz, *Adv. Phys.* **19** (1970) 525.
9. R. Wald, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2118.
10. H.P. de Oliveira, I. Damião Soares, and T.J. Stuchi, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 730.
11. A.M. Ozorio de Alameda, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization*, (Cambridge Univ. New York, 1992).
12. F. Scheck, *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (Springer-Verlag, New York, 1990).
13. E.S. Cheb-Terrab and H.P. de Oliveira, *Comput. Phys. Commun.* **95** (1996) 171.