Autómatas celulares lineales reversibles y permutaciones en bloque

J.C. Seck Tuoh Mora
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Computación, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
Apartado postal 14-740, 07360 México D.F., Mexico
e-mail: seck@delta.cs.cinvestav.mx

Recibido el 24 de septiembre de 1999; aceptado el 21 de octubre de 1999

En el siguiente trabajo se presenta una caracterización de los autómatas celulares lineales reversibles por medio de permutaciones en bloque con corrimientos. Se explica el funcionamiento de este proceso utilizando conceptos basados en dinámica simbólica, combinatoria y registro de corrimientos. Al final se hace una generalización de esta idea para cualquier tipo de autómata celular lineal reversible, mostrando algunos ejemplos.

Descriptores: Autómata celular lineal reversible; multiplicidad uniforme; índices de Welch; permutaciones en bloque

In this article we give a complete characterization of the reversible behavior in linear cellular automata, using block permutations and shifts. We explain this process with some concepts based in symbolic dynamics, combinatorics and shift registers. At last, we present a generalization of this procedure for all kind of reversible linear cellular automata, showing some examples.

Keywords: Reversible linear cellular automata; uniform multiplicity; Welch index; block permutations

PACS: 02.10.Eb; 04.60.Nc

1. Introducción

En el análisis y modelación de los sistemas dinámicos discretos destacan por su simplicidad, pero a la vez por la complejidad que pueden tener en su comportamiento, los autómatas celulares lineales; además de ser sistemas que pueden ser estudiados en una computadora con gran facilidad. Un tipo especial de autómatas celulares lineales son los llamados *reversibles*; éstos han servido como modelos para el análisis del comportamiento reversible microscópico implicado en la segunda ley de la termodinámica [1].

La teoría fundamental para estudiar dichos sistemas se debe a Gustav A. Hedlund [2], que analiza en gran detalle sus características locales por medio de herramientas combinatorias y de dinámica simbólica; sin embargo, no muestra de manera explícita cómo es que la información global del sistema se conserva [3]. En este aspecto destaca el trabajo de Jarkko Kari [4], el cual trata de explicar este comportamiento global como la aplicación sucesiva de permutaciones en bloque.

En este escrito se hace una extensión del trabajo de Kari [4] modificándolo para representar a todo tipo de autómata celular lineal reversible, utilizando los resultados obtenidos de Hedlund [2] y procesos e ideas desarrolladas por Harold V. McInstosh [6, 5].

En la Sec. 2 se explica el funcionamiento de un autómata celular lineal, la terminología que se utiliza y el concepto de autómata celular lineal reversible. En la Sec. 3 se muestran cuáles son las propiedades básicas que cumplen localmente los autómatas celulares lineales reversibles. En la Sec. 4 se presenta el proceso de Kari y explicamos su funcionamiento con las propiedades desarrolladas en la Ref. 2. En la Sec. 5 se toma un autómata celular reversible $(2,1)$ para ejemplificar el funcionamiento de este proceso. En la Sec. 6 se señalan las limitantes que tiene el proceso de Kari y hacemos una modificación al mismo para que pueda ser aplicable en todos los casos. En la Sec. 7 se desarrollan dos ejemplos que muestran la generalización del funcionamiento del proceso de Kari. Para concluir, la Sec. 8 expone algunas observaciones finales y tentativas para trabajos posteriores relacionados con el tema.

2. Preliminares

Sea A un conjunto de elementos cualquiera, la cardinalidad de A se indicará con $|A|$; para $n \in \mathbf{Z}^+$, la expresión A^n representará al conjunto de secuencias de longitud n formadas con elementos de A; así, A^* representará al conjunto de secuencias generadas con elementos de A de cualquier longitud, donde λ simboliza a la cadena vacía.

Un autómata celular lineal está conformado por un arreglo lineal de celdas o *células* que se denomina como el estado global o *configuración* del autómata, cada una de estas células puede tomar un valor de un conjunto finito de estados. Cada célula en la configuración evolucionará a un nuevo estado dependiendo de su valor actual y el valor de sus r vecinos a cada lado, es decir, la célula forma una *vecindad* con sus r vecinos tanto a la derecha como a la izquierda, en donde a r se le conoce como el radio de vecindad. Al mapeo de cada una de estas vecindades a un estado se le denomina la regla de evolución del autómata.

Con lo anterior podemos definir a un autómata celular lineal como el sistema formado por

$$(K, r, \phi, C), \tag{1}$$

en donde los elementos de este sistema son los siguientes:

- K es un conjunto finito de estados, con $|K| = k$
- r es el radio de vecindad
- $\phi : K^{2r+1} \to K$ es la regla de evolución que mapea vecindades a estados
- $C_i \in C$ es la i-ésima configuración del autómata en donde $C_i : \mathbf{Z} \to K$, es decir, es un mapeo del conjunto de enteros al conjunto de estados.

Para el caso en donde la configuración C_i sea finita, la primera célula de C_i se concatena con la última para que ambas tengan sus vecindades completas, formando con esto un anillo. Denotaremos con la pareja (k, r) al conjunto de autómatas celulares lineales que tengan un número k de estados y un radio de vecindad r.

Para $a \in K^n$ y $b \in K^{n-2r}$ se dirá que a es *ancestro* de b si $\phi(a) = b$, es decir, a evoluciona en b al aplicar la regla de evolución a cada una de sus vecindades, si $\phi(C_i) = C_j$ entonces C_i es ancestro de C_j.

Un autómata celular lineal determinado se denominará *reversible* si dada su regla de evolución ϕ, se puede encontrar otra regla *inversa* ϕ^{-1} con la cual poder regresar en la evolución del autómata, en otras palabras, volver a generar la configuración ancestra de la actual y poder repetir este proceso de manera indefinida [7]. La parte más interesante de este proceso es que esta generación global de configuraciones ya sea " hacia adelante " o " hacia atrás " es producida por reglas de evolución cuyo comportamiento es local.

3. Propiedades de un autómata celular lineal reversible

Al analizar el comportamiento local inducido por ϕ en un autómata celular lineal reversible se presentan dos cuestiones interesantes, ¿cuántos ancestros tiene una secuencia de estados dada? y para una secuencia de estados en particular, ¿cuál es la forma que tiene sus ancestros?; estas cuestiones darán paso a dos conceptos fundamentales desarrollados por Hedlund los cuales son *multiplicidad uniforme* e *índices de Welch*.

Sea (K, r, ϕ, C) un autómata celular lineal reversible, entonces tenemos

Teorema 1 (Hedlund-1)

Para $a \in \{K^* - \lambda\}$ se cumple que

$$|\phi^{-1}(a)| = k^{2r}.$$

Este resultado nos indica que toda posible secuencia de estados tiene el mismo número de ancestros que las demás, y que este número es igual a k^{2r}, esta característica demostrada por Hedlund se puede denominar como *multiplicidad uniforme* [2, 6].

Por supuesto, la multiplicidad uniforme no sólo se observa en autómatas celulares reversibles, sino que también aparece en autómatas cuyo mapeo entre configuraciones es sobreyectivo pero no inyectivo, sin embargo, la reversibilidad de un autómata celular lineal se puede detectar a través de sus *índices de Welch* [8, 6, 2]. Dichos índices L, M y R nos sirven para enumerar las distintas regiones que existen en todos los ancestros de una secuencia dada, en el caso de L y R, representan el máximo número de extensiones de una cadena a la izquierda y a la derecha respectivamente tal que la evolución que resulte de dichas extensiones sea la misma. El índice M es distinto pues nos representa el mínimo número de secuencias cuyas extensiones izquierdas y derechas evolucionan también en la misma cadena.

Tomando lo anterior, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2 (Hedlund-2)

En un autómata celular lineal reversible se cumple que

$$M = 1,$$
$$LR = k^{2r}.$$

Con base en los teoremas 1 y 2, podemos concluir que si en un autómata celular lineal. para $n \in \mathbf{Z}^+$, toda $a \in K^n$ cumple con la multiplicidad uniforme ($|\phi^{-1}(a)| = k^{2r}$) y cumple además que $LR = k^{2r}$, entonces los ancestros de toda a tienen a $M = 1$. En otras palabras, los ancestros son diferentes entre sí únicamente en los extremos pero compartiendo la misma parte central y por lo tanto existiendo una única forma de regresar hacia atrás en la evolución del autómata y con esto generando un comportamiento global reversible. Un punto importante a señalar es que el valor de n denota el tamaño de la vecindad en ϕ^{-1}.

Se ha aprendido a detectar el valor de los índices L y R por medio de la multiplicación de las matrices de conectividad del diagrama de de Bruijn [5, 9], sin embargo, hasta el momento no se ha alcanzado una caracterización completa de la estructura en el funcionamiento de un autómata celular reversible, es decir, conocemos las características del comportamiento local pero éstas no muestran claramente la manera en que la información de cada configuración se conserva.

4. Permutaciones en Bloque

Un trabajo fundamental sobre el comportamiento global de las configuraciones en un autómata celular reversible se debe a Jarkko Kari en [4], el cual presenta la transición entre éstas como una combinación de dos permutaciones en bloque y un corrimiento, lo que explica de manera sencilla la conservación de información del sistema.

Empecemos con la selección del radio de vecindad; si un autómata es reversible para un radio de vecindad r, éste lo se-

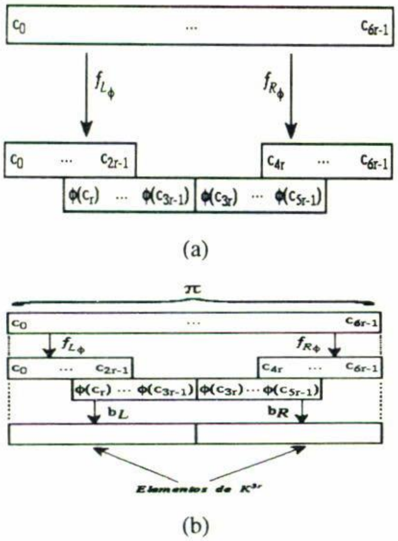

FIGURA 1. (a) Funciones f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ}. (b) Permutación π.

guirá siendo para otros radios de vecindad mayores que r. Seleccionemos el mayor r entre ϕ y ϕ^{-1}; de aquí se definen dos conjuntos L_ϕ y R_ϕ. Estos conjuntos están formados por las secuencias de tamaño $2r$ y las terminaciones izquierdas y derechas respectivamente de los posibles ancestros de cada secuencia, siendo cada una de estas terminaciones también de tamaño $2r$. Para obtener dichos conjuntos, tomemos cada $a \in K^{6r}$ y cada $\phi(a)$, con esto se forman L_ϕ y R_ϕ según indiquen f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ} en la Fig. 1a.

Si un autómata es reversible con un radio de vecindad r entonces un bloque de tamaño $2r+1$ define una única célula central en sus ancestros, por lo que un bloque de tamaño $4r$ define a su vez un único bloque central de tamaño $2r$ en sus ancestros, dejando las discrepancias de los mismos en los extremos y los conjuntos L_ϕ y R_ϕ contienen dichas diferencias, de lo anterior se produce el siguiente resultado.

Lema 1 (Kari-1)

$$|L_\phi||R_\phi| = k^{6r}.$$

Prueba: Probemos el lema 1 con los términos que Hedlund usa en la Ref. 2. Sabemos que los conjuntos L_ϕ y R_ϕ se obtuvieron del conjunto K^{4r} y sus ancestros, además $|K^{4r}|=k^{4r}$.

Como el autómata es reversible, cumple con la multiplicidad uniforme y cada secuencia en K^{4r} tiene tantos ancestros como k^{2r}, entonces, en total hay $k^{4r}k^{2r} = k^{6r}$ construcciones de este tipo. Cada secuencia en K^{4r} tienen en sus ancestros una única parte central de tamaño $2r$, dejando las diferencias en las partes izquierdas y derechas, cuantificadas por los índices L y R, respectivamente.

Por medio de f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ} obtenemos los conjuntos L_ϕ y R_ϕ formados por bloques de tamaño $2r$ y los extremos de sus ancestros también de tamaño $2r$, en estos extremos es en donde los ancestros muestran sus diferencias. Existen tantos bloques de tamaño $2r$ como k^{2r} y tantos extremos diferentes de ancestros como L en el caso de L_ϕ y R en el caso de R_ϕ, por lo que la cardinalidad de estos conjunto está dada por

$$|L_\phi| = Lk^{2r} \quad \text{y} \quad |R_\phi| = Rk^{2r}. \tag{2}$$

Multiplicando ambas cardinalidades tenemos

$$|L_\phi||R_\phi| = Lk^{2r}Rk^{2r} = LRk^{4r}. \tag{3}$$

Como el autómata es reversible $LR = k^{2r}$, por lo que

$$LRk^{4r} = k^{2r}k^{4r} = k^{6r}, \tag{4}$$

lo que concluye la prueba.

Definamos dos índices (que se puede tomar como una normalización de $|R_\phi|$ y $|L_\phi|$) h_+ y h_-, dados por

$$h_- = \frac{|L_\phi|}{k^{3r}} \quad \text{y} \quad h_+ = \frac{|R_\phi|}{k^{3r}}; \tag{5}$$

un índice es el recíproco del otro.

$$h_- * h_+ = \frac{|L_\phi|R_\phi|}{k^{3r}k^{3r}} = \frac{k^{6r}}{k^{6r}} = 1. \tag{6}$$

Estos índices serán utilizados para el siguiente resultado fundamental que explica la conservación de información del sistema.

Teorema 3 (Kari-2)

Cada autómata celular lineal reversible en el kernel de h_- es una composición de dos permutaciones en bloque.

Definamos una permutación en bloque $p = (B_t^{(n)})^{-1} \circ \hat{\pi} \circ B_t^{(n)}$, aquella que primero divide la configuración en secuencias de longitud n, empezando en la posición t y aplica la permutación π a cada secuencia.

Para la prueba del teorema 3, Kari se basa en que el valor de $h_- = 1$. Debido a esto, $|R_\phi| = |L_\phi| = k^{3r}$, por lo que podemos definir cualquier tipo de biyecciones $b_L : L_\phi \to K^{3r}$ y $b_R : R_\phi \to K^{3r}$. Las permutaciones estarán dadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\pi_1(c_0,\ldots,c_{6r-1}) = [&(b_L \circ f_{L_\phi})(c_0,\ldots,c_{6r-1}),\\
&(b_R \circ f_{R_\phi})(c_0,\ldots,c_{6r-1})],\\
\pi_2(c_0,\ldots,c_{6r-1}) = [&(b_R \circ f_{L_\phi^{-1}})(c_0,\ldots,c_{6r-1}),\\
&(b_L \circ f_{R_\phi^{-1}})(c_0,\ldots,c_{6r-1})].
\end{aligned} \tag{7}$$

Es decir, realizar cada una de ellas será una composición en donde primero se aplica a cada $a \in K^{6r}$ las funciones f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ}. Después, cada miembro de L_ϕ y R_ϕ se mapea con la biyección estipulada en b_L y b_R, respectivamente. En síntesis, la permutación π mapea una secuencia de estados de tamaño $6r$ a otra secuencia del mismo tamaño formada por dos elementos de K^{3r} y queda representada en la Fig. 1b.

Entonces, la evolución de un autómata celular lineal reversible puede ser definida por dos permutaciones en bloque como se muestra en la Fig. 2a. La primera $p_1 = [B_t^{(6r)}]^{-1} \circ \hat{\pi}_1 \circ B_t^{(6r)}$, divide la configuración antecesora en bloques de tamaño $6r$, empezando desde la posición 0 y aplicando a cada

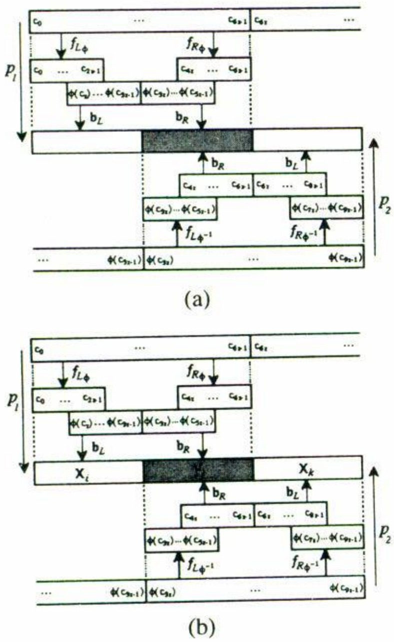

FIGURA 2. Evolución de un autómata celular lineal reversible con: (a) Permutación en bloque original y (b) Permutación en bloque corregida.

bloque la permutación π_1. La segunda permutación $p_2 = [B_{3r}^{(6r)}]^{-1} \circ \hat{\pi_2} \circ B_{3r}^{(6r)}$, divide la configuración sucesora en bloques de tamaño $6r$, empezando desde la posición $3r$ y aplicando a cada bloque la permutación π_2.

Al final tenemos que en ambos casos, las permutaciones coinciden en parte con un desfase de $3r$ posiciones (bloque gris en la Fig. 2a), aplicándolas desde el sentido original y el inverso. El mapeo global entre configuraciones inducido por la regla de evolución ϕ puede representarse como la composición de dos permutaciones en bloque $p_2^{-1} \circ p_1$.

5. Ejemplo del funcionamiento de las permutaciones en bloque

Para visualizar el proceso de Kari, tomemos al autómata reversible $(2,1)$ regla 204 que se presenta en la Tabla I. Esta regla se conoce como la regla identidad ya que copia el elemento central de cada vecindad. Los valores de los índices de Welch de este autómata son $L = 2$ y $R = 2$, cumpliendo con que $LR = k^{2r} = 2^{2*1} = 4$, además, como la regla sólo copia el elemento central, su regla inversa es la misma regla 204.

Con las secuencias de tamaño $4r = 4$ y sus ancestros, podemos obtener los conjuntos L_{204} y R_{204}. Asignemos al conjunto L_ϕ un mapeo biyectivo con el conjunto K^{3r}; dado que la regla de evolución original y la inversa es la misma, ambas tienen los mismos conjuntos L_ϕ y R_ϕ. Como el proceso indica que $L_\phi = R_\phi^{-1}$ y $R_\phi = L_\phi^{-1}$, entonces para este caso se tiene que $L_\phi = R_\phi$; de este modo, dado el mapeo b_L, el mapeo b_R queda definido al mismo tiempo como se muestra en la Tabla II.

TABLA I. Regla de evolución 204 de un autómata $(2,1)$.

Vecindades	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1
Evolución	0	0	1	1	0	0	1	1

TABLA II. Mapeo $b_{L_{204}}$ y $b_{R_{204}}$ para el autómata $(2,1)$ regla 204.

0 0 / 0 0 → 111	0 0 / 0 1 → 110	0 1 / 1 0 → 000	0 1 / 1 1 → 101
1 0 / 0 0 → 010	1 0 / 0 1 → 100	1 1 / 1 0 → 011	1 1 / 1 1 → 001
0 0 / 0 0 → 111	0 1 / 0 0 → 110	1 0 / 0 1 → 000	1 1 / 0 1 → 101
0 0 / 1 0 → 010	0 1 / 1 0 → 100	1 0 / 1 1 → 011	1 1 / 1 1 → 001

En este ejemplo se tiene que

$$|L_\phi| = 8, \quad |R_\phi| = 8, \quad |L_\phi||R_\phi| = 8 * 8 = 64,$$

justamente igual a $k^{6r} = 2^6 = 64$. Asignemos a cada posible bloque de tamaño $6r$ sus permutaciones correspondientes a π_1 y π_2, dado que en este autómata las reglas de evolución original e inversa son idénticas, las permutaciones π_1 y π_2 lo son también, por lo que basta enumerar sólo una de ellas, lo que se hace en la Tabla III.

Tomando una configuración inicial aleatoria realizemos el siguiente proceso:

1. Dividamos la configuración en bloques de tamaño 6.
2. Permutemos cada bloque como lo indica π_1.
3. A la nueva configuración resultante, dividámosla también en bloques de tamaño 6 pero empezando 3 posiciones a la derecha.
4. Permutemos cada bloque como lo indica p_2^{-1}.

Observando la Fig. 3, la configuración inicial y la configuración producida al aplicar las permutaciones en bloque $p_2^{-1} \circ p_1$ corresponden a la evolución de la configuración inicial bajo la regla 204, es decir, hemos podido representar dicha evolución por medio de corrimientos y permutaciones en bloque siguiendo el proceso descrito por Kari.

6. Generalizando el proceso

Por medio de los conceptos anteriores se ha descrito la evolución de un autómata celular lineal reversible, sin embargo,

TABLA III. Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 204.

Bloque		π_1 (π_2)	Bloque		π_1 (π_2)	Bloque		π_1 (π_2)	Bloque		π_1 (π_2)
000000	$\leftrightarrow$	111111	010000	$\leftrightarrow$	000111	100000	$\leftrightarrow$	010111	110000	$\leftrightarrow$	011111
000001	$\leftrightarrow$	111110	010001	$\leftrightarrow$	000110	100001	$\leftrightarrow$	010110	110001	$\leftrightarrow$	011110
000010	$\leftrightarrow$	111000	010010	$\leftrightarrow$	000000	100010	$\leftrightarrow$	010000	110010	$\leftrightarrow$	011000
000011	$\leftrightarrow$	111101	010011	$\leftrightarrow$	000101	100011	$\leftrightarrow$	010101	110011	$\leftrightarrow$	011101
000100	$\leftrightarrow$	111010	010100	$\leftrightarrow$	000010	100100	$\leftrightarrow$	010010	110100	$\leftrightarrow$	011010
000101	$\leftrightarrow$	111100	010101	$\leftrightarrow$	000100	100101	$\leftrightarrow$	010100	110101	$\leftrightarrow$	011100
000110	$\leftrightarrow$	111011	010110	$\leftrightarrow$	000011	100110	$\leftrightarrow$	010011	110110	$\leftrightarrow$	011011
000111	$\leftrightarrow$	111001	010111	$\leftrightarrow$	000001	100111	$\leftrightarrow$	010001	110111	$\leftrightarrow$	011001
001000	$\leftrightarrow$	110111	011000	$\leftrightarrow$	101111	101000	$\leftrightarrow$	100111	111000	$\leftrightarrow$	000111
001001	$\leftrightarrow$	110110	011001	$\leftrightarrow$	101110	101001	$\leftrightarrow$	100110	111001	$\leftrightarrow$	000110
001010	$\leftrightarrow$	110000	011010	$\leftrightarrow$	101000	101010	$\leftrightarrow$	100000	111010	$\leftrightarrow$	000000
001011	$\leftrightarrow$	110101	011011	$\leftrightarrow$	101101	101011	$\leftrightarrow$	100101	111011	$\leftrightarrow$	000101
001100	$\leftrightarrow$	110010	011100	$\leftrightarrow$	101010	101100	$\leftrightarrow$	100010	111100	$\leftrightarrow$	000010
001101	$\leftrightarrow$	110100	011101	$\leftrightarrow$	101100	101101	$\leftrightarrow$	100100	111101	$\leftrightarrow$	000100
001110	$\leftrightarrow$	110011	011110	$\leftrightarrow$	101011	101110	$\leftrightarrow$	100011	111110	$\leftrightarrow$	000011
001111	$\leftrightarrow$	110001	011111	$\leftrightarrow$	101001	101111	$\leftrightarrow$	100001	111111	$\leftrightarrow$	000001

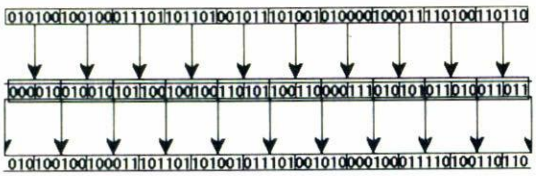

FIGURA 3. Evolución del autómata $(2,1)$ regla 204 por medio de permutaciones en bloque.

¿este proceso funciona para representar a todos los autómatas celulares lineales reversibles?, en esta sección trataremos de dar respuesta a dicha cuestión.

Una de las primeras preguntas que surgen es ¿qué sucede cuando el valor de r no es entero?. Por ejemplo, si $r = 1/2$ las biyecciones b_L y b_R harán un mapeo al conjunto $K^{3r} = K^{3/2}$, es decir, a secuencias de $(3/2)$ células de longitud lo que trae consigo el problema de partir las células. Para solventar este problema en vez de tomar el valor de r para el cual ambas reglas son reversibles, utilizemos el valor $\lceil r \rceil$, en donde $\lceil r \rceil$ es el menor entero mayor o igual a r, este paso es válido ya que con esto se tomará un valor que es mayor o igual al mínimo r para el cual el autómata es reversible y por lo tanto seguirá cumpliendo con serlo con la ventaja de que $3r$ tendrá siempre un valor entero.

Sin embargo, la cuestión más importante es ¿qué sucede si los índices de Welch son distintos entre sí?

Analizemos una vez más cómo definimos las permutaciones en bloque: cada permutación de un bloque de longitud $6r$ consiste en aplicar a los $3r$ elementos izquierdos la composición $(b_L \circ f_{L_\phi})$ y aplicar a los $3r$ elementos derechos la composición $(b_R \circ f_{R_\phi})$. En el proceso original de Kari, sabemos que tanto b_L como b_R mapean de manera biyectiva los elementos de los conjuntos L_ϕ y R_ϕ al mismo conjunto K^{3r}, es decir, ambos conjuntos L_ϕ y R_ϕ tienen la misma cardinalidad. Como $|L_\phi| = Lk^{2r}$ y $|R_\phi| = Rk^{2r}$, el razonamiento anterior indica que $L = R$, o que ambos índices de Welch son iguales.

Tomemos el caso en que esto no ocurra, tendremos que $|L_\phi| \neq |R_\phi|$, y las biyecciones b_L y b_R no podrán aplicarse tal cual pues alguno de los conjuntos L_ϕ o R_ϕ tendrá más elementos que K^{3r}.

En la demostración de su teorema, Kari toma como base que el valor del índice $h_- = 1$ para definir las biyecciones b_L y b_R. El que $h_- = 1$ indica que a la vez $h_+ = 1$ ya que $h_- * h_+ = 1$. Entonces, podemos redefinir a los índices h_- y h_+, haciendo un uso explícito de los índices de Welch L y R, quedando entonces

$$h_- = \frac{|L_\phi|}{Lk^{2r}} \quad \text{y} \quad h_+ = \frac{|R_\phi|}{Rk^{2r}}; \tag{8}$$

esta pequeña redefinición provoca que tanto $h_- = h_+ = 1$ y por lo tanto, se puedan definir las biyecciones b_L y b_R, ahora bien, dichas biyecciones ya no serán hacia el conjunto K^{3r}, sino que quedarán definidas como sigue:

$$b_L : L_\phi \rightarrow \text{conjunto de secuencias de } K \text{ con cardinalidad } Lk^{2r},$$

$$b_R : R_\phi \rightarrow \text{conjunto de secuencias de } K \text{ con cardinalidad } Rk^{2r}. \tag{9}$$

La definición de b_L y b_R parece ser muy sencilla, sin embargo tienen mucha más relevancia de lo que uno podría suponer a primera vista. El que estas biyecciones vayan al conjunto K^{3r} indica primero que la longitud de cada secuencia en este conjunto es de $3r$, y en segunda de que longitud debe ser el corrimiento a realizar entre la primera y la segunda permutación en bloque.

Hemos visto que esto funciona muy bien en el caso en donde los índices de Welch L y R son iguales, pero cuando no lo son, b_L y b_R ya no pueden mapear al conjunto K^{3r}, sino deben mapear a otros conjuntos de secuencias de K cuyas cardinalidades deben ser Lk^{2r} y Rk^{2r} respectivamente para definir una biyección con L_ϕ y R_ϕ, en principio, ¿qué longitud deben tener entonces las secuencias en ambos conjuntos?.

Tomemos primero al caso izquierdo, para conocer esto debemos poner a la expresión Lk^{2r} en forma de un exponente de k:

$$L = k^{\log_k L}, \tag{10}$$

y de aquí

$$Lk^{2r} = k^{\log_k L} k^{2r} = k^{2r+\log_k L}.$$

Siguiendo el mismo proceso para el lado derecho:

$$Rk^{2r} = k^{2r+\log_k R},$$

es decir, ahora tenemos que

$$b_L : L_\phi \to K^{2r+\log_k L}$$

y

$$b_R : R_\phi \to K^{2r+\log_k R}, \tag{11}$$

donde el corrimiento entre la primera y la segunda permutación en bloque debe tener una longitud de $2r + \log_k L$.

Sin embargo, tomemos un autómata celular lineal reversible $(6, 1)$, en el cual se cumple que $k^{2r} = 6^2 = 36$; por lo tanto, valores factibles de los índices de Welch pueden ser $L = 4$ y $R = 9$. Hemos dicho que la expresión $2r + \log_k L$ define tanto la longitud de las secuencias en que se van a mapear los elementos de L_ϕ bajo b_L así como el tamaño del corrimiento entre las permutaciones en bloque. Retomando el ejemplo, si sustituimos en la expresión los valores de r y L obtenemos que

$$2r + \log_k L = 2(1) + \log_6 4 = 2.7737056.$$

El valor obtenido es correcto, pues el conjunto L_ϕ tendrá tantos elementos como

$$Lk^{2r} = 4 * 6^{2(1)} = 144 = k^{2r+\log_k L} = 6^{2.7737056};$$

sin embargo, no podemos representar secuencias de longitud 2.7737056 ni podemos hacer un corrimiento de ese tamaño en el espacio discreto de un autómata celular, entonces, aunque analíticamente no hay error, es imposible representar todos los autómatas celulares lineales reversibles con estas redefiniciones.

El problema con las redefiniciones es que tanto la longitud de las secuencias ni el corrimiento son siempre representables, esto se debe por una parte a que las biyecciones b_L y b_R mapean L_ϕ y R_ϕ al conjunto $K^{2r+\log_k L}$ y $K^{2r+\log_k R}$, respectivamente, pero no siempre se pueden formar secuencias de longitud exactamente igual a $2r + \log_k L$ o $2r + \log_k R$ según corresponda, ni siempre se puede aplicar un corrimiento entre las permutaciones en bloque de tamaño $2r + \log_k L$, entonces, ¿por qué no tomar otros conjuntos a donde mapear L_ϕ y R_ϕ?

El punto clave de este proceso radica en que tanto L_ϕ y R_ϕ guardan las diferencias de los ancestros en un autómata reversible, es decir, contabilizan los índices de Welch, y las biyecciones b_L y b_R sólo enumeran dichos conjuntos, pero hemos visto que hasta ahora la manera de enumerarlos no siempre es factible por medio de secuencias del conjunto K, entonces por qué no buscar enumerarlos de otra forma que siempre sea posible. Definamos los siguientes conjuntos:

$$X = \{x_0, x_1, ..., x_{(Lk^{2r}-1)}\},$$
$$Y = \{y_0, y_1, ..., y_{(Rk^{2r}-1)}\}. \tag{12}$$

Se tiene con esto que, $|L_\phi| = |X|$ y $|R_\phi| = |Y|$. Tomando nuevamente las redefiniciones de h_- y h_+, volvamos al resultado de Kari y reescribamos su prueba.

Teorema 4 (Kari-2 Revisado)

Cada autómata celular lineal reversible en el kernel de h_- es una composición de dos permutaciones en bloque.

Prueba: Sea $h_-(\phi) = 1$ y sea r tan grande que representa a las vecinades de ϕ y ϕ^{-1}. Debido a que $|L_\phi| = |X|$ y $|R_\phi| = |Y|$, biyecciones $b_L{}' : L_\phi \to X$ y $b_R{}' : R_\phi \to Y$ existen, el mapeo puede ser cualquiera siempre y cuando cumpla con ser biyectivo.

Sean $f_{L_\phi} : K^{6r} \to L_\phi$ y $f_{R_\phi} : K^{6r} \to R_\phi$ como se han definido en la Fig. 1a y sean $f_{L_{\phi^{-1}}} : K^{6r} \to L_{\phi^{-1}} = R_\phi$ y $f_{R_{\phi^{-1}}} : K^{6r} \to R_{\phi^{-1}} = L_\phi$ las funciones correspondientes para la regla inversa ϕ^{-1}. Considere las permutaciones π_1 y π_2 de K^{6r} dadas por

$$\begin{aligned}\pi_1(c_0, \ldots, c_{6r-1}) &= [(b'_L \circ f_{L_\phi})(c_0, \ldots, c_{6r-1}),\\ &\quad (b'_R \circ f_{R_\phi})(c_0, \ldots, c_{6r-1})],\\ \pi_2(c_0, \ldots, c_{6r-1}) &= [(b'_R \circ f_{L_{\phi^{-1}}})(c_0, \ldots, c_{6r-1}),\\ &\quad (b'_L \circ f_{R_{\phi^{-1}}})(c_0, \ldots, c_{6r-1})].\end{aligned} \tag{13}$$

Entonces $\phi = p_2^{-1} \circ p_1$, donde p_1 es la permutación en bloque definida para una cadena de tamaño $6r$ en la primera configuración de estados, aplicándole a ésta la permutación π_1 y, p_2 es la permutación en bloque definida para una cadena de tamaño $6r$ en la segunda configuración; haciendo un corrimiento de longitud 1 en la secuencia $\{x_i y_j ... x_m y_n\}$ correspondiente a un corrimiento de longitud $3r$ en la segunda configuración, como se muestra en la Fig. 2b.

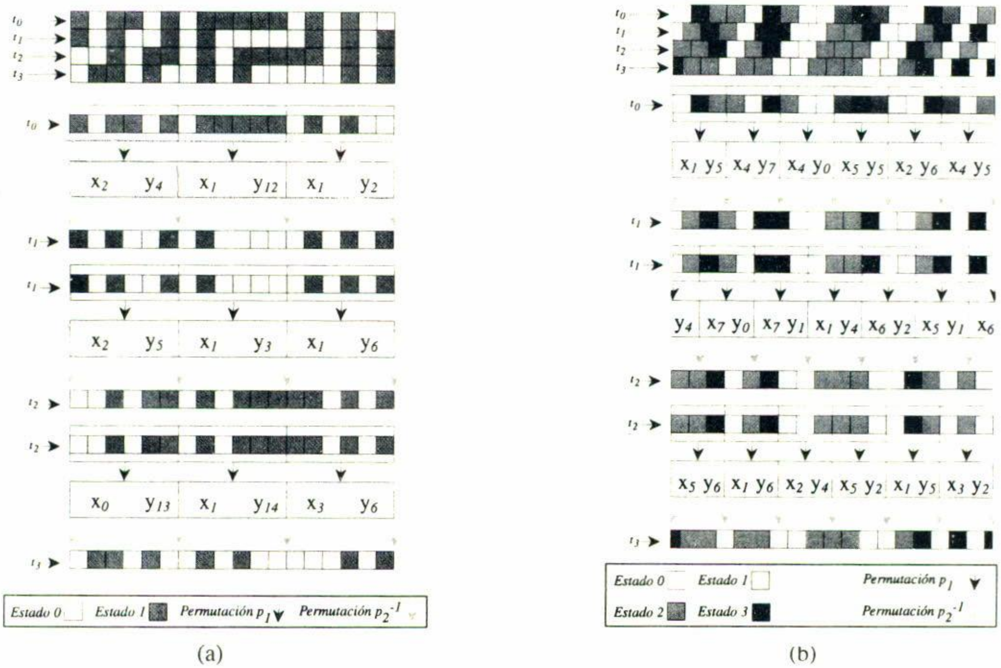

FIGURA 4. (a) Evolución del autómata $(2,1)$ regla 15 y por medio de permutaciones en bloque. (b) Evolución del autómata $(4,1/2)$ regla $F5A0F5A0$ y por medio de permutaciones en bloque.

7. Casos de estudio

A continuación presentemos algunos casos de autómatas celulares lineales reversibles y como es la permutación en bloque que representa su evolución.

7.1. Autómata $(2,1)$ regla 15

Éste es el caso de un autómata de 2 estados y un radio de vecindad $r = 1$, con la regla de evolución 15 y la regla inversa 85, los índices de Welch tiene valores $L = 1$ y $R = 4$ para la regla 15 y $L = 4$ y $R = 1$ para la regla 85. Estas reglas y las permutaciones π_1 y π_2 se presentan en la Tabla IV.

En la Fig. 4a, de una configuración aleatoria inicial, se construye primero su evolución empezando desde el instante t_0 al t_3 y después se genera el mismo resultado por medio de las permutaciones en bloque. De esta manera podemos observar que la evolución del autómata es idéntica a la construida aplicando las dos permutaciones en bloque a la configuración inicial.

7.2. Autómata $(4,1/2)$ regla $F5A0F5A0$

Tomemos ahora el caso de un auómata (4,1/2) con la regla de evolución $F5A0F5A0$ y la regla inversa $EEEE4444$, los índices de Welch tiene valores $L = 2$ y $R = 2$ para la regla $F5A0F5A0$ y $L = 2$ y $R = 2$ para la regla $EEEE4444$. Ambas reglas de evolución y las permutaciones π_1 y π_2 se muestran en la Tabla V.

En la Fig. 4b, de una configuración aleatoria inicial obtenemos 3 evoluciones de este autómata y se reproduce el mismo resultado aplicando las permutaciones en bloque, como en el ejemplo anterior, se obtuvo la misma evolución por las dos formas.

8. Observaciones finales

Hemos visto que el trabajo de Kari [4] nos permite expresar la evolución de un autómata celular reversible como la composición de dos permutaciones en bloque y un corrimiento entre éstas, en este escrito se ha hecho más general esta idea para poder aplicarla a todo autómata celular lineal reversible, sin importar su radio de vecindad ni el valor que tengan sus índices de Welch.

Se ha podido entender el funcionamiento de estas permutaciones por medio de la teoría desarrollada en [2] y haciendo uso de la misma, proponer una modificación mínima al proceso original para hacerlo totalmente general. El punto crucial para que estas permutaciones funcionen es sin duda los conjuntos L_ϕ y R_ϕ, ya que estos son los que guardan las diferencias de los ancestros de las secuencias de estados; en otras palabras, manifiestan la existencia de los índices de Welch L y R, respectivamente.

Observemos en la Fig. 4b que del instante t_{i+1} al instante t_{i+2}, la permutación p_1 se aplicó en las mismas posiciones en que lo había hecho la permutación p_2^{-1} del instante t_i a t_{i+1}. Esto se hizo para hacer más claro el diagrama pero no obedece a ninguna condición necesaria, la permutación p_1 se puede empezar a efectuar en donde se quiera y el proceso funcionará igual siempre y cuando p_2^{-1} se empiece a aplicar

Tabla IV. Autómata $(2, 1)$ regla original 15, regla inversa 85 y permutaciones π_1 y π_2.

Regla 15

Vecindades	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1
Evolución	1	1	1	1	0	0	0	0

Regla 85

Vecindades	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1
Evolución	1	0	1	0	1	0	1	0

Bloque		π_1
000000	$\leftrightarrow$	x_0y_3
000001	$\leftrightarrow$	x_0y_7
000010	$\leftrightarrow$	x_0y_{11}
000011	$\leftrightarrow$	x_0y_{15}
000100	$\leftrightarrow$	x_0y_2
000101	$\leftrightarrow$	x_0y_6
000110	$\leftrightarrow$	x_0y_{10}
000111	$\leftrightarrow$	x_0y_{14}

Bloque		π_1
001000	$\leftrightarrow$	x_0y_1
001001	$\leftrightarrow$	x_0y_5
001010	$\leftrightarrow$	x_0y_9
001011	$\leftrightarrow$	x_0y_{13}
001100	$\leftrightarrow$	x_0y_0
001101	$\leftrightarrow$	x_0y_4
001110	$\leftrightarrow$	x_0y_8
001111	$\leftrightarrow$	x_0y_{12}

Bloque		π_1
010000	$\leftrightarrow$	x_1y_3
010001	$\leftrightarrow$	x_1y_7
010010	$\leftrightarrow$	x_1y_{11}
010011	$\leftrightarrow$	x_1y_{15}
010100	$\leftrightarrow$	x_1y_2
010101	$\leftrightarrow$	x_1y_6
010110	$\leftrightarrow$	x_1y_{10}
010111	$\leftrightarrow$	x_1y_{14}

Bloque		π_1
011000	$\leftrightarrow$	x_1y_1
011001	$\leftrightarrow$	x_1y_5
011010	$\leftrightarrow$	x_1y_9
011011	$\leftrightarrow$	x_1y_{13}
011100	$\leftrightarrow$	x_1y_0
011101	$\leftrightarrow$	x_1y_4
011110	$\leftrightarrow$	x_1y_8
011111	$\leftrightarrow$	x_1y_{12}

Bloque		π_1
100000	$\leftrightarrow$	x_2y_3
100001	$\leftrightarrow$	x_2y_7
100010	$\leftrightarrow$	x_2y_{11}
100011	$\leftrightarrow$	x_2y_{15}
100100	$\leftrightarrow$	x_2y_2
100101	$\leftrightarrow$	x_2y_6
100110	$\leftrightarrow$	x_2y_{10}
100111	$\leftrightarrow$	x_2y_{14}

Bloque		π_1
101000	$\leftrightarrow$	x_2y_1
101001	$\leftrightarrow$	x_2y_5
101010	$\leftrightarrow$	x_2y_9
101011	$\leftrightarrow$	x_2y_{13}
101100	$\leftrightarrow$	x_2y_0
101101	$\leftrightarrow$	x_2y_4
101110	$\leftrightarrow$	x_2y_8
101111	$\leftrightarrow$	x_2y_{12}

Bloque		π_1
110000	$\leftrightarrow$	x_3y_3
110001	$\leftrightarrow$	x_3y_7
110010	$\leftrightarrow$	x_3y_{11}
110011	$\leftrightarrow$	x_3y_{15}
110100	$\leftrightarrow$	x_3y_2
110101	$\leftrightarrow$	x_3y_6
110110	$\leftrightarrow$	x_3y_{10}
110111	$\leftrightarrow$	x_3y_{14}

Bloque		π_1
111000	$\leftrightarrow$	x_3y_1
111001	$\leftrightarrow$	x_3y_5
111010	$\leftrightarrow$	x_3y_9
111011	$\leftrightarrow$	x_3y_{13}
111100	$\leftrightarrow$	x_3y_0
111101	$\leftrightarrow$	x_3y_4
111110	$\leftrightarrow$	x_3y_8
111111	$\leftrightarrow$	x_3y_{12}

Bloque		π_2
000000	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_3$
000001	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_2$
000010	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_1$
000011	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_0$
000100	$\leftrightarrow$	y_8x_3
000101	$\leftrightarrow$	y_8x_2
000110	$\leftrightarrow$	y_8x_1
000111	$\leftrightarrow$	y_8x_0

Bloque		π_2
001000	$\leftrightarrow$	y_4x_3
001001	$\leftrightarrow$	y_4x_2
001010	$\leftrightarrow$	y_4x_1
001011	$\leftrightarrow$	y_4x_0
001100	$\leftrightarrow$	y_0x_3
001101	$\leftrightarrow$	y_0x_2
001110	$\leftrightarrow$	y_0x_1
001111	$\leftrightarrow$	y_0x_0

Bloque		π_2
010000	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_3$
010001	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_2$
010010	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_1$
010011	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_0$
010100	$\leftrightarrow$	y_9x_3
010101	$\leftrightarrow$	y_9x_2
010110	$\leftrightarrow$	y_9x_1
010111	$\leftrightarrow$	y_9x_0

Bloque		π_2
011000	$\leftrightarrow$	y_5x_3
011001	$\leftrightarrow$	y_5x_2
011010	$\leftrightarrow$	y_5x_1
011011	$\leftrightarrow$	y_5x_0
011100	$\leftrightarrow$	y_1x_3
011101	$\leftrightarrow$	y_1x_2
011110	$\leftrightarrow$	y_1x_1
011111	$\leftrightarrow$	y_1x_0

Bloque		π_2
100000	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_3$
100001	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_2$
100010	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_1$
100011	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_0$
100100	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_3$
100101	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_2$
100110	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_1$
100111	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_0$

Bloque		π_2
101000	$\leftrightarrow$	y_6x_3
101001	$\leftrightarrow$	y_6x_2
101010	$\leftrightarrow$	y_6x_1
101011	$\leftrightarrow$	y_6x_0
101100	$\leftrightarrow$	y_2x_3
101101	$\leftrightarrow$	y_2x_2
101110	$\leftrightarrow$	y_2x_1
101111	$\leftrightarrow$	y_2x_0

Bloque		π_2
110000	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_3$
110001	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_2$
110010	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_1$
110011	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_0$
110100	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_3$
110101	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_2$
110110	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_1$
110111	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_0$

Bloque		π_2
111000	$\leftrightarrow$	y_7x_3
111001	$\leftrightarrow$	y_7x_2
111010	$\leftrightarrow$	y_7x_1
111011	$\leftrightarrow$	y_7x_0
111100	$\leftrightarrow$	y_3x_3
111101	$\leftrightarrow$	y_3x_2
111110	$\leftrightarrow$	y_3x_1
111111	$\leftrightarrow$	y_3x_0

TABLA V. Autómata $(4,1/2)$, regla original $F5A0F5A0$, regla inversa $EEEE4444$ y permutaciones π_1 y π_2.

Regla F5A0F5A0

	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	1	3	3
2	0	0	2	2
3	1	1	3	3

Regla EEEE4444

	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
2	2	3	2	3
3	2	3	2	3

Bloque		π_1
000	$\leftrightarrow$	x_0y_0
001	$\leftrightarrow$	x_0y_2
002	$\leftrightarrow$	x_0y_4
003	$\leftrightarrow$	x_0y_6
010	$\leftrightarrow$	x_0y_1
011	$\leftrightarrow$	x_0y_3
012	$\leftrightarrow$	x_0y_5
013	$\leftrightarrow$	x_0y_7

Bloque		π_1
020	$\leftrightarrow$	x_1y_0
021	$\leftrightarrow$	x_1y_2
022	$\leftrightarrow$	x_1y_4
023	$\leftrightarrow$	x_1y_6
030	$\leftrightarrow$	x_1y_1
031	$\leftrightarrow$	x_1y_3
032	$\leftrightarrow$	x_1y_5
033	$\leftrightarrow$	x_1y_7

Bloque		π_1
100	$\leftrightarrow$	x_2y_0
101	$\leftrightarrow$	x_2y_2
102	$\leftrightarrow$	x_2y_4
103	$\leftrightarrow$	x_2y_6
110	$\leftrightarrow$	x_2y_1
111	$\leftrightarrow$	x_2y_3
112	$\leftrightarrow$	x_2y_5
113	$\leftrightarrow$	x_2y_7

Bloque		π_1
120	$\leftrightarrow$	x_3y_0
121	$\leftrightarrow$	x_3y_2
122	$\leftrightarrow$	x_3y_4
123	$\leftrightarrow$	x_3y_6
130	$\leftrightarrow$	x_3y_1
131	$\leftrightarrow$	x_3y_3
132	$\leftrightarrow$	x_3y_5
133	$\leftrightarrow$	x_3y_7

Bloque		π_1
200	$\leftrightarrow$	x_4y_0
201	$\leftrightarrow$	x_4y_2
202	$\leftrightarrow$	x_4y_4
203	$\leftrightarrow$	x_4y_6
210	$\leftrightarrow$	x_4y_1
211	$\leftrightarrow$	x_4y_3
212	$\leftrightarrow$	x_4y_5
213	$\leftrightarrow$	x_4y_7

Bloque		π_1
220	$\leftrightarrow$	x_5y_0
221	$\leftrightarrow$	x_5y_2
222	$\leftrightarrow$	x_5y_4
223	$\leftrightarrow$	x_5y_6
230	$\leftrightarrow$	x_5y_1
231	$\leftrightarrow$	x_5y_3
232	$\leftrightarrow$	x_5y_5
233	$\leftrightarrow$	x_5y_7

Bloque		π_1
300	$\leftrightarrow$	x_6y_0
301	$\leftrightarrow$	x_6y_2
302	$\leftrightarrow$	x_6y_4
303	$\leftrightarrow$	x_6y_6
310	$\leftrightarrow$	x_6y_1
311	$\leftrightarrow$	x_6y_3
312	$\leftrightarrow$	x_6y_5
313	$\leftrightarrow$	x_6y_7

Bloque		π_1
320	$\leftrightarrow$	x_7y_0
321	$\leftrightarrow$	x_7y_2
322	$\leftrightarrow$	x_7y_4
323	$\leftrightarrow$	x_7y_6
330	$\leftrightarrow$	x_7y_1
331	$\leftrightarrow$	x_7y_3
332	$\leftrightarrow$	x_7y_5
333	$\leftrightarrow$	x_7y_7

Bloque		π_2
000	$\leftrightarrow$	y_0x_0
001	$\leftrightarrow$	y_0x_2
002	$\leftrightarrow$	y_0x_1
003	$\leftrightarrow$	y_0x_3
010	$\leftrightarrow$	y_2x_0
011	$\leftrightarrow$	y_2x_2
012	$\leftrightarrow$	y_2x_1
013	$\leftrightarrow$	y_2x_3

Bloque		π_2
020	$\leftrightarrow$	y_0x_4
021	$\leftrightarrow$	y_0x_6
022	$\leftrightarrow$	y_0x_5
023	$\leftrightarrow$	y_0x_7
030	$\leftrightarrow$	y_2x_4
031	$\leftrightarrow$	y_2x_6
032	$\leftrightarrow$	y_2x_5
033	$\leftrightarrow$	y_2x_7

Bloque		π_2
100	$\leftrightarrow$	y_1x_0
101	$\leftrightarrow$	y_1x_2
102	$\leftrightarrow$	y_1x_1
103	$\leftrightarrow$	y_1x_3
110	$\leftrightarrow$	y_3x_0
111	$\leftrightarrow$	y_3x_2
112	$\leftrightarrow$	y_3x_1
113	$\leftrightarrow$	y_3x_3

Bloque		π_2
120	$\leftrightarrow$	y_1x_4
121	$\leftrightarrow$	y_1x_6
122	$\leftrightarrow$	y_1x_5
123	$\leftrightarrow$	y_1x_7
130	$\leftrightarrow$	y_3x_4
131	$\leftrightarrow$	y_3x_6
132	$\leftrightarrow$	y_3x_5
133	$\leftrightarrow$	y_3x_7

Bloque		π_2
200	$\leftrightarrow$	y_4x_0
201	$\leftrightarrow$	y_4x_2
202	$\leftrightarrow$	y_4x_1
203	$\leftrightarrow$	y_4x_3
210	$\leftrightarrow$	y_6x_0
211	$\leftrightarrow$	y_6x_2
212	$\leftrightarrow$	y_6x_1
213	$\leftrightarrow$	y_6x_3

Bloque		π_2
220	$\leftrightarrow$	y_4x_4
221	$\leftrightarrow$	y_4x_6
222	$\leftrightarrow$	y_4x_5
223	$\leftrightarrow$	y_4x_7
230	$\leftrightarrow$	y_6x_4
231	$\leftrightarrow$	y_6x_6
232	$\leftrightarrow$	y_6x_5
233	$\leftrightarrow$	y_6x_7

Bloque		π_2
300	$\leftrightarrow$	y_5x_0
301	$\leftrightarrow$	y_5x_2
302	$\leftrightarrow$	y_5x_1
303	$\leftrightarrow$	y_5x_3
310	$\leftrightarrow$	y_7x_0
311	$\leftrightarrow$	y_7x_2
312	$\leftrightarrow$	y_7x_1
313	$\leftrightarrow$	y_7x_3

Bloque		π_2
320	$\leftrightarrow$	y_5x_4
321	$\leftrightarrow$	y_5x_6
322	$\leftrightarrow$	y_5x_5
323	$\leftrightarrow$	y_5x_7
330	$\leftrightarrow$	y_7x_4
331	$\leftrightarrow$	y_7x_6
332	$\leftrightarrow$	y_7x_5
333	$\leftrightarrow$	y_7x_7

con un corrimiento igual a uno con respecto a p_1, lo que es similar a un corrimiento de tamaño $3r$ entre configuraciones.

Un trabajo importante para realizar en un futuro es observar como se manifiestan las condiciones de reversibilidad que señala Hedlund en los conjuntos L_ϕ y R_ϕ, ya que con esto se podrá decir si un autómata es reversible o no en función de dichos conjuntos. Además, utilizando estas condiciones el cálculo de autómatas celulares lineales reversibles será mucho más eficiente pues en lugar de formar un gran conjunto de reglas y revisar si cumplen con las condiciones de reversibilidad, se pasará a la generación directa de las mismas con solo producir las permutaciones indicadas.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Harold V. McIntosh por la supervisión y revisión hecha en este trabajo y al Dr. Sergio V. Chapa por sus consejos y observaciones. Este escrito se realizó contando con el apoyo de CONACyT clave 119324.

1. T. Toffoli y N. Margolus, *Physica D* **45** (1990) 229.
2. Gustav A. Hedlund, *Mathematical Systems Theory* **3** (1969) 320.
3. Karel Culik II, *Complex Systems* **1** (1987) 1035.
4. Jarkko Kari, *Mathematical Systems Theory* **29** (1996) 47.
5. Harold V. McIntosh, *Reversible cellular automata, http:// www. cs. cinvestav. mx/ ~mcintosh*, (1991).
6. Harold V. McIntosh, *Linear cellular automata via de bruijn diagrams, http:// www. cs. cinvestav. mx/ ~mcintosh*, (1991).
7. S. Amoroso y Yale N. Patt, *Journal of Computer and System Sciences* **6** (1972) 448.
8. José Manuel Gómez Soto y Harold V. McIntosh, *XXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, (1996).
9. Juan Carlos Seck Tuoh Mora, Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN (1999).