

Introducción al *Background Field Method* y a la *Pinch Technique*

Luis G. Cabral-Rosetti

Departament de Física Teòrica i I.F.I.C., Centre Mixte Universitat de València-C.S.I.C.

E-46100 Burjassot, València España

e-mail: cabral@fisteo.ific.uv.es

Recibido el 1 de septiembre de 1999; aceptado el 27 de enero de 2000

Dentro del marco de la teoría cuántica de campos, presentamos una introducción pedagógica al Background Field Method (BFM) y a la Pinch Technique (PT). En la cual, revisamos y contrastamos ambos formalismos. Primeramente, construimos el BFM y hallamos las reglas de Feynman de la teoría. A continuación, construimos la PT y calculamos la autoenergía y el vértice “invariante” de norma en la teoría pura de Yang-Mills. De igual forma, calculamos la autoenergía y el vértice en el BFM, observando que únicamente para el caso especial de la norma de 't Hooft-Feynman ($\xi_Q = 1$), los resultados coinciden exactamente con los obtenidos via la PT. Finalmente, discutimos la conexión entre los términos “invariancia de norma” e “independencia del parámetro de norma”, frecuentemente confundidos.

Descriptores: Teoría cuántica de campos; background field method; pinch technique; autoenergía invariante de norma

We present a pedagogical introduction to the Background Field Method (BFM) and the Pinch Technique (PT) in the quantum field theory frame. We review and compare both formalisms. We first construct the BFM and find the Feynman rules of the theory. Secondly, we construct the PT and calculate the “gauge invariant” self-energy and vertex in the pure Yang-Mills theory. Equally, we calculate the self-energy and the vertex in the BFM and show that for the special case of the 't Hooft-Feynman gauge ($\xi_Q = 1$), the results coincide exactly with those obtained via the PT. Finally, we discuss the connection between concepts “gauge invariant” and “gauge parameter independent”, which have been frequently confused.

Keywords: Quantum field theory; background field method; pinch technique; gauge invariant self-energy

PACS: 11.15.-q; 11.55.-m; 12.38.-t; 12.38.Ex

1. Introducción general

La invariancia de norma^(a) es la guía principal para el estudio de diversos procesos físicos dentro de las teorías de las interacciones fundamentales de la naturaleza. Sin embargo, para cuantizar una teoría de norma, es necesario en primer lugar fijar la norma, haciendo con ello que se rompa explícitamente la invariancia de norma del lagrangiano original. Lo anterior ocurre cuando añadimos el llamado término que fija la norma (*gauge fixing term*), con objeto de cuantizar la teoría. La ambigüedad en el modo de fijar la norma, introduce una dependencia explícita en las diferentes funciones de Green; la cual se hace manifiesta con la aparición del llamado parámetro de norma.^(b) No obstante, la simetría de norma del lagrangiano original es reestablecida a través de la invariancia BRST, la cual nos proporciona complicadas identidades de Slavnov-Taylor para las funciones de Green.

Los observables físicos, tales como los elementos de la matriz S completa, han de ser invariantes e independientes del parámetro de norma a cada orden en teoría de perturbaciones. Sin embargo, la truncación a cierto orden es siempre inevitable, llevando a la construcción de vértices fuera de la capa de masas (*off-shell*), los cuales son parametrizados mediante los llamados factores de forma. El significado físico de tales *objetos* puede ser cuestionable, pues cualquier definición de cantidades que provengan de partes incompletas de la matriz S está necesariamente basado sobre ciertas convenciones y no totalmente sobre razones físicas.

Sobre este punto diremos que suele confundirse, e incluso superponerse, los conceptos invariancia de norma e independencia del parámetro de norma. Cuando las funciones de Green de operadores invariantes de norma son independientes del criterio de fijar la norma, entonces tales funciones de Green son independientes del parámetro de norma. Sin embargo, la implicación inversa no es correcta en general; es decir, *independencia del parámetro de norma no necesariamente implica invariancia de norma*, y a lo largo de este trabajo tendremos ocasión de demostrarlo.

El hecho de que la dependencia del parámetro de norma de las funciones de vértices individuales (autoenergías, correcciones de vértice, etc.) es compensada dentro de la matriz S completa, ha motivado a diversos autores a reordenar las partes dependientes del parámetro de norma entre diferentes partes de otros vértices. Resultando con ello la aparición de “bloques” independientes del parámetro de norma. Por ejemplo, la *Pinch Technique* (PT) es un algoritmo, que de manera consistente y de forma general a uno y dos lazos, es capaz de reescribir las diferentes contribuciones de los distintos vértices, para obtener nuevas “funciones de vértice” que no dependan explícitamente del parámetro de norma.

Sin embargo, como veremos más adelante, dichos vértices son obtenidos en el *Background Field Method* (BFM) sólo en el caso particular de la norma de 't Hooft-Feynman ($\xi_Q = 1$). El hecho anterior, ha generado la incertidumbre de si realmente son invariantes de norma, los “vértices rearre-

glados” construidos mediante la PT. O que por el contrario, sólo sea un hecho fortuito el que el BFM reproduzca los mismos resultados en $\xi_Q = 1$, por algún motivo aún no del todo esclarecido.

El presente trabajo está organizado como sigue: en la Sec. 2 construimos el BFM. Para lo cual primeramente en 2.1 comentamos brevemente la historia y utilización de este método, en 2.2 hacemos una revisión del método funcional; el formalismo BFM propiamente dicho se establece dentro de la subsección 2.3 y en 2.4 hallamos la reglas de Feynman y la renormalización de esta teoría. La Sec. 3 contiene un estudio detallado de la PT. En 3.1 presentamos una introducción general a esta técnica. En 3.2 aplicamos la PT para hallar la autoenergía *invariante* de norma para la teoría pura de Yang-Mills. En 3.3, del mismo modo que en 3.2, calculamos el vértice *invariante* de norma. En la Sección 4 contrastamos ambos formalismos, el BFM y la PT. En 4.1 calculamos la autoenergía en el BFM y observamos que esta es la misma que la obtenida por la PT en 3.2, cuando en el BFM es usada la norma de 't Hooft-Feynman. De forma semejante, en 4.2 obtenemos el vértice y de nuevo hallamos que es el mismo al obtenido en 3.3 por la PT. La Sec. 5 alberga una discusión sobre la invariancia e independencia del parámetro de norma de forma general y cómo afecta a las predicciones del BFM y la PT. Finalmente, en la Sec. 6 presentamos nuestras conclusiones.

2. El Background Field Method

2.1. Introducción

El *Background Field Method* (BFM) fue introducido por primera vez por B. DeWitt [1] en el contexto de la gravedad cuántica, como un formalismo para cuantizar teorías de campos normados (*gauge fields*) reteniendo explícitamente la invariancia de norma en la teoría a un lazo (*1-loop*). La extensión de dicho formalismo a cálculos con más de un lazo fue dado por G. 't Hooft [2], B. DeWitt [3], D.G. Boulware [4], L.F. Abbott [5, 6], A. Rebhan y G. Wirthumer [7]. Usando dichas extensiones del BFM, se han llevado a cabo cálculos explícitos de la función β a dos lazos, para la teoría pura de Yang-Mills, primero realizado en la norma de 't Hooft-Feynman por S. Ichinose y M. Omote [8], y posteriormente en una norma general por D.M. Cappaer y A. MacLean [9].

La versión electrodébil del BFM fue introducida por A. Denner, G. Weiglein y S. Dittmaier [10] y posteriormente desarrollada completamente por ellos mismos [11]. En esta versión la invariancia de norma de la acción efectiva del BFM implica identidades de *Ward* simples como ocurre en QED para los vértices, que como consecuencia de ello, goza de un buen comportamiento a altas energías. La invariancia de norma del BFM no sólo admite el usual programa de renormalización sobre la capa másica (*on-shell scheme*), sino que ciertamente simplifica los cálculos desde un punto de vista técnico.^(c) Además, el formalismo provee ventajas adicionales, tales como la simplificación de las reglas de Feynman y

la posibilidad de usar dentro de los diagramas con lazos una norma diferente a la que se usa a nivel árbol, logrando con ello que se reduzca drásticamente el número de diagramas que contribuyen en un cierto proceso físico.

2.2. Revisión del método funcional

En toda teoría cuántica de campos la meta central es calcular la matriz S ; dicha matriz puede ser obtenida a partir de las funciones de Green de la teoría mediante la reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) [13]. En el formalismo funcional de *integral de caminos* (*path integral*), las funciones de Green son obtenidas por derivadas funcionales del funcional generador $Z[J]$ con respecto a las fuentes clásicas J_μ^a . Aplicaremos dicho método funcional a la teoría pura de *Yang-Mills*, es decir, sin acoplamientos de materia. Allí se define el funcional generador como

$$Z[J] = \int [DQ] \det \left[\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(Q) - \frac{\xi}{2} (G^a)^2 + J_\mu^a Q_\mu^a \right] \right\}, \quad (1)$$

en donde Q_μ^a denota el campo de norma cuántica que es la variable de integración funcional,

$$\mathcal{L}(Q) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2)$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu Q_\nu^a - \partial_\nu Q_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b Q_\nu^c, \quad (3)$$

el llamado *tensor del campo*; donde G^a es el término que fija la norma.^(d) Por ejemplo, la típica elección es $G^a(Q) = \partial^\mu Q_\mu^a$, conocida como la norma de Lorentz, siendo ξ el *parámetro de norma*. Este último parametriza una amplia familia de normas. El término $\delta G^a / \delta \omega^b$ es la derivada funcional del término que fija la norma bajo una transformación infinitesimal

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b Q_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a, \quad (4)$$

con ω^b como parámetro infinitesimal.

Las derivadas funcionales de $Z[J]$ con respecto a la fuente clásica J_μ^a cuando $J_\mu^a = 0$, proporcionan las funciones de Green *disconexas* de la teoría

$$\langle 0|T\{Q_\mu^a Q_\nu^b \dots Q_\tau^n\}|0\rangle_{\text{dis}} := \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_\mu^a \delta J_\nu^b \dots \delta J_\tau^n} \Bigg|_{J=0} = \int [DQ] (Q_\mu^a Q_\nu^b \dots Q_\tau^n) \det \left[\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(Q) - \frac{\xi}{2} (G^a)^2 \right] \right\}. \quad (5)$$

La relación que guardan las funciones de Green conexas y disconexas viene ilustrada esquemáticamente en la Fig. 1.



FIGURA 5. Representación esquemática de la relación existente entre funciones de Green conexas (C) y IPI de dos puntos.

Si realizamos la segunda derivada funcional de la acción efectiva (11) con respecto al valor de espectación \bar{Q}_ν^b obtenemos

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_a^\mu \delta \bar{Q}_b^\nu} = -\frac{\delta J_\mu^a}{\delta \bar{Q}_b^\nu}, \quad (13)$$

y usando el resultado (7) llegamos a

$$\begin{aligned} -\frac{\delta J_\mu^a}{\delta \bar{Q}_b^\nu} &= \left[-\frac{\delta \bar{Q}_\nu^b}{\delta J_\mu^a} \right]^{-1} = \left[-\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_\mu^a \delta J_b^\nu} \Big|_{J=0} \right]^{-1} \\ &= i \Delta^{-1 \ ab}_{\mu\nu}(k), \end{aligned} \quad (14)$$

en donde, $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k)$ es el *propagador completo de dos puntos*. De esta manera hemos llegado a que la segunda derivada de la acción efectiva es el inverso del propagador, es decir,

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_a^\mu \delta \bar{Q}_b^\nu} \Big|_{\bar{Q}=0} = \Delta^{-1 \ ab}_{\mu\nu}(k), \quad (15)$$

o equivalentemente

$$-\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_\mu^a \delta J_b^\nu} \Big|_{J=0} = \Delta_{\mu\nu}^{ab}(k). \quad (16)$$

Por lo tanto, como mostramos en la Fig. 5, el propagador completo de dos puntos es obtenido a partir de las funciones de Green IPI, “vistiendo” las dos patas externas con propagadores

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) \left(\frac{1}{i} \right) \left[\frac{\delta^2 \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_c^\rho \delta \bar{Q}_d^\tau} \Big|_{\bar{Q}=0} \right] \Delta_{\rho\tau}^{cd}(k) = \Delta_{\mu\nu}^{ab}(k). \quad (17)$$

Lo anterior es cierto gracias al uso de la identidad

$$\frac{\delta}{\delta \bar{Q}_a^\mu} = \left(\frac{\delta J_\nu^b}{\delta \bar{Q}_a^\mu} \Big|_{\bar{Q}=0} \right) \frac{\delta}{\delta J_b^\nu} = \left(\frac{1}{i} \right) \Delta^{-1 \ \mu\nu}_{ab}(k) \frac{\delta}{\delta J_b^\nu}. \quad (18)$$

La Ec. (18) es realmente la razón de por qué la acción efectiva $\Gamma[\bar{Q}]$ genera los gráficos IPI, pues cuando actuamos sobre $W[J]$, el operador $\delta/\delta J$ añade una pata externa a la función de Green. Pero a la vez, por la misma Ec (18), el operador $\delta/\delta \bar{Q}$ cuando actúa sobre la acción efectiva $\Gamma[\bar{Q}]$, añade una línea externa y elimina el propagador de esta línea. Esta continua amputación de los propagadores externos es la que genera los diagramas IPI.

Dicho lo anterior, de (13) y (14) calculamos la tercera derivada de $\Gamma[\bar{Q}]$

$$\frac{\delta^3 \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_a^\mu \delta \bar{Q}_b^\nu \delta \bar{Q}_c^\rho} \Big|_{\bar{Q}=0} = \left(\frac{1}{i} \right) \Delta^{-1 \ aa'}_{\mu\mu'}(k) \frac{\delta}{\delta J_a^{\mu'}} \left[-\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_b^\nu \delta J_c^\rho} \Big|_{J=0} \right]^{-1}$$

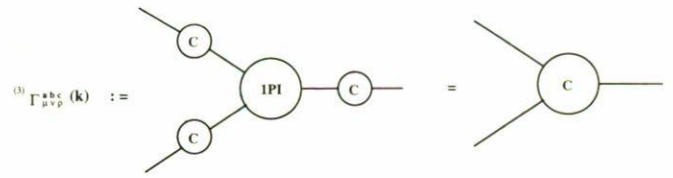


FIGURA 6. Representación esquemática de la relación existente entre funciones de Green conexas (C) y IPI de tres puntos.

llegando a

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k) &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J_a^{\mu'} \delta J_b^{\nu'} \delta J_c^{\rho'}} \Big|_{J=0} \\ &= i \Delta_{\mu\mu'}^{aa'}(k) \Delta_{\nu\nu'}^{bb'}(k) \Delta_{\rho\rho'}^{cc'}(k) \frac{\delta^3 \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_a^\mu \delta \bar{Q}_b^\nu \delta \bar{Q}_c^\rho} \Big|_{\bar{Q}=0}, \end{aligned} \quad (19)$$

que hemos representado en la Fig. 6. En general, la *n-ésima* derivada funcional de la acción efectiva $\Gamma[\bar{Q}]$ nos proporcionará el *vértice propio de n puntos* o también conocido como el *vértice irreducible de n puntos* (nPIV),

$${}^{(n)}\Gamma_{\mu\nu\dots}^{ab\dots}(k) = \frac{\delta^n \Gamma[\bar{Q}]}{\delta \bar{Q}_a^\mu \delta \bar{Q}_b^\nu \dots \delta \bar{Q}_n^\lambda} \Big|_{\bar{Q}=0}. \quad (20)$$

La demostración de la anterior aseveración se prueba por inducción matemática.

2.3. El formalismo BFM

Como hemos visto en la sección anterior, la cantidad importante a ser calculada en una teoría cuántica de campos es la acción efectiva $\Gamma[\bar{Q}]$. Conociendo ésta, la matriz S podrá ser construida encadenando las diferentes partes de las funciones IPI que generan las funciones de Green conexas completas. Amputando los propagadores externos, y poniendo todos los momentos sobre la capa de masas (*on-shell-mass*) y añadiendo los correspondientes factores apropiados a las funciones de onda.

Ahora bien, de lo anterior definiremos cantidades análogas a $Z[J]$, $W[J]$, y $\Gamma[\bar{Q}]$ en el Background Field Method (BFM), las cuales denotaremos por $\tilde{Z}[J, A]$, $\tilde{W}[J, A]$ y $\tilde{\Gamma}[\bar{Q}, A]$. Para ello, haremos un cambio (*shift*) en el campo Q_μ^a del lagrangiano clásico (2) mediante la transformación $Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a + A_\mu^a$, donde A_μ^a es el campo de fondo (background) y Q_μ^a ahora jugará el papel de fluctuación cuántica. Como advierte G. 't Hooft [2], no se debe confundir el campo de fondo A_μ^a con la fuente clásica J_μ^a , la cual aparece en el funcional generador. Definiendo

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[J, A] &= \int [DQ] \det \left[\frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} \right] \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(Q + A) - \frac{\xi}{2} (\tilde{G}^a)^2 + J_\mu^a Q_\mu^a \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$\tilde{G}^a = \tilde{G}^a(Q, A) = \partial^\mu Q_\mu^a + g f^{abc} A_b^\mu Q_\mu^c := (D_\mu^A Q^\mu)^a, \quad (22)$$

es la llamada *norma de fondo* (background gauge)^(f), donde

$$(D_\mu^A)^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c, \quad (23)$$

es la *derivada covariante* con respecto a la transformación de norma en el campo de fondo, y $\delta \tilde{G}^a / \delta \omega^b$ es la derivada funcional del término que fija la norma bajo una transformación infinitesimal

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b (A_\mu^c + Q_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (24)$$

Por completa analogía con el formalismo convencional definimos

$$\tilde{W}[J, A] = -i \ln \tilde{Z}[J, A], \quad (25)$$

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A] = \tilde{W}[J, A] - \int d^4x J_a^\mu \tilde{Q}_\mu^a, \quad (26)$$

en donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \tilde{W}[J, A]}{\delta J_a^\mu} \right|_{J=0} &= \left[\frac{-i}{\tilde{Z}[J, A]} \frac{\delta \tilde{Z}[J, A]}{\delta J_a^\mu} \right] \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\langle 0 | Q_\mu^a | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} := \tilde{Q}_\mu^a. \end{aligned} \quad (27)$$

Con la norma de fondo $\tilde{G}^a(Q, A)$, tanto $\tilde{Z}[J, A]$ como $\tilde{W}[J, A]$ son invariantes bajo las transformaciones infinitesimales

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc} \omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a \quad (28)$$

y

$$\delta J_\mu^a = -f^{abc} \omega^b J_\mu^c. \quad (29)$$

Para demostrar lo anterior, hagamos el cambio de variables

$$Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a - f^{abc} \omega^b Q_\mu^c, \quad (30)$$

las Ecs. (29) y (30), representan rotaciones en el espacio adjunto, de tal manera que el término $J_\mu^a Q_\mu^a$ en el funcional generador $\tilde{Z}[J, A]$ es *invariante*. Sumando las Ecs. (28) y (30), obtenemos la transformación de norma (24), de tal manera que el Lagrangiano $\mathcal{L}(Q + A)$ (21), permanece invariante.

La variación de la norma de fondo \tilde{G}^a es

$$\delta \tilde{G}^a = g f^{abc} \omega^c (\partial^\mu Q_\mu^c) - g^2 f^{adc} f^{ecd} A_c^\mu \omega^b Q_\mu^e,$$

entonces

$$\delta \tilde{G}^a = g f^{abc} \omega^b \tilde{G}^c, \quad (31)$$

y por lo tanto

$$\delta[(\tilde{G}^a)^2] = 0. \quad (32)$$

Las Ecs. (31) y (32) son transformaciones “ortogonales” en el espacio adjunto del índice “a” [17, 18], y es por esto que

$$\det \left| \frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} \right| = 1. \quad (33)$$

Además, ya que \tilde{Q}_μ^a es el conjugado de J_μ^a , entonces $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ también será invariante bajo las transformaciones (28) y

$$\delta \tilde{Q}_\mu^a = -f^{abc} \omega^b \tilde{Q}_\mu^c. \quad (34)$$

En conclusión, $\tilde{Z}[J, A]$, $\tilde{W}[J, A]$ y $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ son invariantes bajo las transformaciones de norma (28) y (29).

Ahora bien, de todo lo anterior nos hacemos la siguiente pregunta, ¿qué relación existe entre $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ y $\Gamma[\tilde{Q}]$? Tal parecería que ninguna, pues hemos construido dos acciones efectivas que generan funciones de Green en principio diferentes. Sin embargo, hay que recordar, que sean cuales fueren dichas funciones de Green, ellas deberán de formar la misma matriz S para que ambas descripciones tengan sentido físico [5–7].

Hagamos el cambio de variable $Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a - A_\mu^a$ en el funcional generador $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$,

$$\tilde{Z}[J, A] = Z[J] \exp \left\{ -i \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a \right\}, \quad (35)$$

y tomando el logaritmo

$$\tilde{W}[J, A] = W[J, A] - \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a. \quad (36)$$

Todo esto ocurre ahora en el nuevo término que fija la norma

$$\tilde{G}^a(Q - A, A) = \partial^\mu Q_\mu^a - \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} A_b^\mu Q_\mu^c. \quad (37)$$

De todo lo anterior, llegamos a la siguiente conclusión:

Tanto $Z[J]$ como $W[J]$ dependen del campo de fondo A_μ^a , a través de la norma no trivial $\tilde{G}^a(Q - A, A)$.

Al derivar $\tilde{W}[J, A]$ con respecto a la fuente clásica J_μ^a , hallamos la importante relación

$$\tilde{Q}_\mu^a = \bar{Q}_\mu^a - A_\mu^a. \quad (38)$$

La acción efectiva $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ quedará como

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A] = \tilde{W}[J, A] - \int d^4x J_a^\mu \tilde{Q}_\mu^a, \quad (39)$$

y por (36)

$$= W[J] - \int d^4x J_a^\mu A_\mu^a - \int d^4x J_a^\mu \tilde{Q}_\mu^a,$$

y usando la Ec. (38)

$$= W[J] - \int d^4x J_a^\mu \bar{Q}_\mu^a = \Gamma[\bar{Q}]$$

con lo cual concluimos que

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A] = \Gamma[\tilde{Q}], \tag{40}$$

pero como $\tilde{Q}_\mu^a = \tilde{Q}_\mu^a + A_\mu^a$, por la relación (38), llegamos al resultado principal

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A] = \Gamma[\tilde{Q}]|_{\tilde{Q}=\tilde{Q}+A}. \tag{41}$$

La acción efectiva del campo de fondo $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ es justo la acción efectiva convencional calculada en presencia del campo de fondo A_μ^a . Ella por tanto, comprende de todas las gráficas IPI que contribuyen a las funciones de Green. En este punto recordemos que las funciones de Green IPI se generan al tomar las derivadas sucesivas de la acción efectiva. En este caso, las derivadas $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$ con respecto a \tilde{Q} generarán las funciones de Green IPI en presencia del campo de fondo A_μ^a .

Como un caso especial de la relación anterior, tomaremos $\tilde{Q} = 0$, lo cual quiere decir que únicamente hay campos cuánticos Q_μ^a como líneas internas (fantasmas, etc.) y campos de fondo A_μ^a como líneas externas. De lo cual tendremos que

$$\tilde{\Gamma}[0, A] = \Gamma[\tilde{Q}]|_{\tilde{Q}=A}, \tag{42}$$

ya que hemos hecho $\tilde{Q} = 0$, entonces $\tilde{\Gamma}[0, A]$ ya no depende de \tilde{Q} y por tanto generará gráficas sin *patas externas*. Es decir, $\tilde{\Gamma}[0, A]$ es la suma de todas las funciones de Green IPI sin patas externas en presencia del campo A_μ^a . Esta es una de las ventajas del BFM; el cual nos permite calcular la acción efectiva sumando únicamente gráficas sin líneas externas. La Ec. (42) nos asegura que podemos hallar la acción efectiva correcta con este método.

2.4. Reglas de Feynman y renormalización en el BFM

La acción efectiva invariante de norma del campo de fondo $\tilde{\Gamma}[0, A]$, es calculada sumando todos los diagramas IPI con campos de fondo A_μ^a en las patas externas y campos cuánticos Q_μ^a dentro de los lazos^(g). No apareceran propagadores de los campos cuánticos en líneas externas (ya que $\tilde{Q}_\mu^a = 0$), de igual manera, no apareceran los propagadores de los campos de fondo dentro de los lazos (ya que la integral funcional se realiza únicamente sobre Q_μ^a). Para deducir las reglas de Feynman debemos escribir el determinante que aparece en la integral funcional (21) en términos de campos escalares anti-conmutantes (los campos de fantasmas). Del término que fija la norma en el campo de fondo (22) y usando la transformación de norma (24), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} = & -\square^2 \delta^{ab} - g \overleftarrow{\partial}^\mu f^{abc} (A_\mu^c + Q_\mu^c) \\ & + g f^{abc} A_\mu^c \overrightarrow{\partial}^\mu + g^2 f^{acx} f^{xdb} A_c^\mu (A_\mu^d + Q_\mu^d). \end{aligned} \tag{43}$$

De lo cual el Lagrangiano de fantasmas (ghost) estará dado por

$$\mathcal{L}_{\text{fantasmas}} = \theta_a^\dagger \frac{\delta \tilde{G}^a}{\delta \omega^b} \theta_b. \tag{44}$$

La reglas de Feynman que surgen en el Background Field Method están dadas en la Fig. 7 (aquí ponemos únicamente las reglas que usamos en nuestros cálculos, las reglas de Feynman completas pueden ser consultadas en la Ref. 5). Las líneas onduladas representan propagadores cuánticos, mientras que las líneas que terminan en el campo A_μ^a , denotan el campo de fondo externo. El propagador de fantasmas está representado por líneas de trazos. Ya que la acción efectiva relaciona únicamente diagramas IPI, los vértices con una única línea cuántica nunca contribuyen y por ello no están incluidos en las reglas de Feynman.

Ya que los campos cuánticos y de fantasmas aparecen únicamente dentro de los lazos, no es necesario que sean renormalizados, quedando como cantidades desnudas [5].

Gracias a la invariancia de norma mantenida en el BFM, las constantes de renormalización Z_A y Z_g están relacionadas. Los infinitos que aparecen en la acción efectiva $\tilde{\Gamma}[0, A]$ deberán tener la forma invariante de norma de una divergencia multiplicada por $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$, donde $F_{\mu\nu}^a$ es el tensor de campo que nace del campo de fondo. Este requisito es análogo al que demandamos a las identidades de *Slavnov-Taylor* para las teorías renormalizables. El tensor de campo se renormalizará como

$$(F_a^{\mu\nu})_0 = Z_A^{1/2} [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g Z_g Z_A^{1/2} f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c]. \tag{45}$$

El cual tomará únicamente la forma covariante de una constante por el tensor $F_{\mu\nu}^a$ si

$$Z_g = Z_A^{-1/2}. \tag{46}$$

Esto nos da la relación que existe entre la constante de acoplamiento y el campo de fondo, renormalizados ambos en la norma de fondo (22). Es de hacer notar que la relación (46), es el análogo de la identidad bien conocida para QED; y que tiene como consecuencia que *en la norma de fondo, la renormalización de una teoría de norma no Abeliiana, es muy semejante a la de una teoría de norma Abeliiana*. En otras palabras, en el BFM surgen identidades de Ward muy simples, como en QED, en contraste con las complicadas identidades de Slavnov-Taylor del formalismo convencional, que habitualmente relacionan campos no físicos de fantasmas [19].

3. La Pinch Technique

3.1. Introducción

La *Pinch Technique* (PT) fue propuesta originalmente por J.M. Cornwall [20, 21] y posteriormente desarrollada por J. Papavassiliou [22] para el Modelo Estándar (SM). Existen tres versiones equivalentes de dicha técnica; la primera de ellas llamada PT de la matriz S , la segunda llamada PT intrínseca [21], y la tercera basada en el álgebra de corrientes, la cual fue desarrollada por G. Degrassi y A. Sirlin [23]. Las dos primeras versiones han sido construidas originalmente en una estructura de norma lineal. Sin embargo, es posible extender dicha técnica a una estructura de norma no lineal.

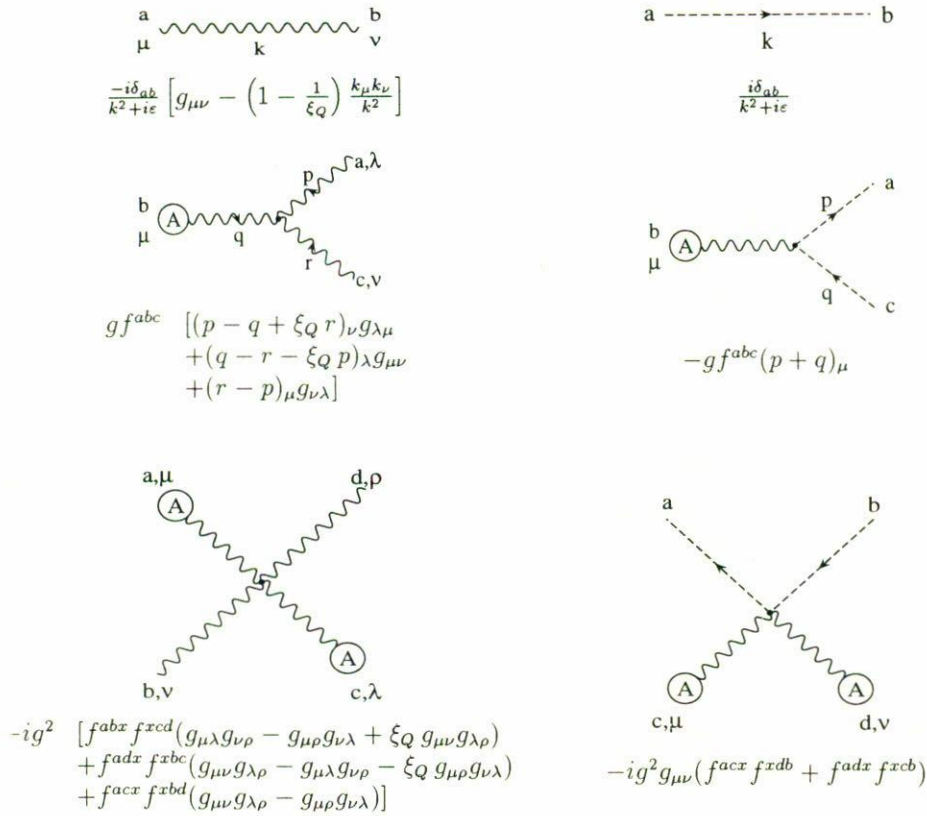


FIGURA 7. Reglas de Feynman del Background Field Method (BFM) para la teoría pura de Yang-Mills, es decir, sin acoplamientos con materia; aquí solo mostramos las reglas que usamos en este trabajo. Tomado y adaptado de la Ref. 24.

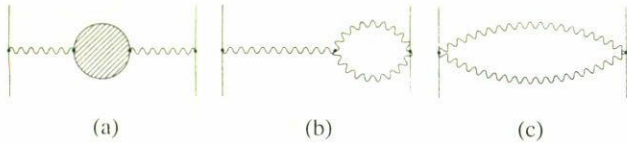


FIGURA 8. La Pinch Technique aplicada a la matriz S para la dispersión elástica de dos fermiones. Los diagramas (b) y (c) son las partes "pellizcadas", que cuando se añaden al propagador ordinario (a), se obtiene el propagador efectivo del gluón "invariante de norma". Tomado y adaptado de la Ref. 24.

Usando la PT de la matriz S , es posible hallar el propagador efectivo del gluón "invariante de norma", añadiendo las gráficas pellizcadas^(h) (Figs. 8b y 8c) al propagador ordinario de la Fig. 8a. La dependencia con el parámetro de norma de las gráficas a nivel árbol son canceladas por las contribuciones de las gráficas pellizcadas.

Puesto que a las figuras pellizcadas siempre les falta uno o más propagadores que corresponden a patas externas, las partes dependientes del parámetro de norma de las gráficas ordinarias también perderán uno o más propagadores de sus patas externas. De esta manera si extraemos sistemáticamente de las gráficas propias las partes que están ausentes de los propagadores de patas externas y simplemente las elimina-

mos, obtendremos el resultado *invariante de norma*, esto es lo que se conoce como la PT intrínseca. En adelante usaremos la PT intrínseca, pues a nuestro juicio es la formulación más transparente de esta técnica.

3.2. Autoenergía invariante de norma en la PT

A continuación derivamos la autoenergía de los gluones para el grupo de norma $SU(N)$ usando para ello el método de la PT intrínseca. Gracias a que dicho método en principio es satisfactorio para obtener cantidades *invariantes de norma*, por simplicidad usamos aquí la norma de 't Hooft-Feynman⁽ⁱ⁾. La autoenergía $\Pi_{\mu\nu}^0$ que corresponde a las dos contribuciones (gluones y fantasmas) que aparecen en la Fig. 9, es^(j).

$$\Pi_{\mu\nu}^0 = \frac{iNg^2}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+q)^2} \times \left[\Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k-q) \Gamma_{\lambda\nu\alpha}(k+q, -q, -k) - k_\mu(k+q)_\nu - k_\nu(k+q)_\mu \right], \quad (47)$$

donde hemos simetrizado el lazo de fantasmas de la Fig. 9b, hemos omitido un factor global δ^{ab} y asumimos de ahora en adelante la regularización dimensional de las integrales.

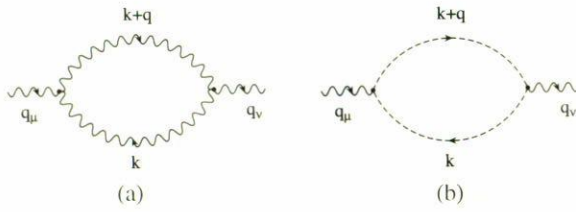


FIGURA 9. Gráficas para calcular la autoenergía $\Pi_{\mu\nu}^0$. (a) Lazo de gluones. (b) Lazo de fantasmas. Los momentos e índices de Lorentz están indicados. Tomado y adaptado de la Ref. 24.

El vértice de tres gluones $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q)$ es^(k)

$$\Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q) = (k - q)_\lambda g_{\alpha\mu} + (k + 2q)_\alpha g_{\mu\lambda} - (2k + q)_\mu g_{\lambda\alpha}. \quad (48)$$

De aquí en adelante, haremos la convención de que el momento externo que aparece en el vértice de tres gluones, aparecerá en medio del argumento de la expresión, como q_μ en la Ec. (48). A continuación descomponemos el vértice en dos piezas^(l): una pieza que llamaremos Γ^F (por la norma de 't Hooft-Feynman), la cual tiene términos que relacionan únicamente el momento externo q . Y otra pieza, que llamaremos Γ^P (P por *pinch*), la cual lleva únicamente momentos internos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q) &= \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F + \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P, \\ \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F &= -(2k + q)_\mu g_{\lambda\alpha} + 2q_\alpha g_{\mu\lambda} - 2q_\lambda g_{\alpha\mu}; \\ \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P &= k_\alpha g_{\mu\lambda} + (k + q)_\lambda g_{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (49)$$

El vértice completo $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q)$ satisface las identidades de Ward

$$\begin{aligned} k^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q) &= P_{\mu\lambda}(q) d^{-1}(q) \\ &\quad - P_{\mu\lambda}(k + q) d^{-1}(k + q), \\ (k + q)^\lambda \Gamma_{\alpha\mu\lambda}(k, q, -k - q) &= P_{\alpha\mu}(q) d^{-1}(q) \\ &\quad - P_{\alpha\mu}(k) d^{-1}(k), \end{aligned} \quad (50)$$

en donde hemos definido

$$P_{\mu\nu}(q) = -g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu q^{-2}, \quad d^{-1}(q) = q^2, \quad (51)$$

las cuales son cantidades independientes del momento de integración.

Las reglas de la PT intrínseca permiten que la parte *pellizcada* del vértice Γ^P actúe sobre el vértice completo, *sustrayendo* el término $d^{-1}(q)$, el cual es generado por la acción de la primera identidad de Ward en la Ec. (50). Con este fin, escribimos el producto de los dos vértices completos $\Gamma_{\alpha\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\alpha}$ como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\alpha} &= \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F + \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P \Gamma_{\lambda\nu\alpha} \\ &\quad + \Gamma_{\alpha\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P - \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\widehat{\Pi}_{\mu\nu} = \frac{iNg^2}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+q)^2} \left[\Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F(k, q, -k - q) \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F(k + q, -q, -k) - 2(2k + q)_\mu (2k + q)_\nu \right]. \quad (59)$$

donde el vértice $\Gamma_{\lambda\nu\alpha}(k + q, -q, -k)$ es:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\nu\alpha}(k + q, -q, -k) &= (k - q)_\lambda g_{\alpha\nu} \\ &\quad + (k + 2q)_\alpha g_{\nu\lambda} - (2k + q)_\nu g_{\lambda\alpha}. \end{aligned} \quad (53)$$

y que se descompone como antes en

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\nu\alpha}(k + q, -q, -k) &= \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F + \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P, \\ \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F &= -(2k + q)_\nu g_{\lambda\alpha} + 2q_\alpha g_{\nu\lambda} - 2q_\lambda g_{\alpha\nu}; \\ \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P &= k_\alpha g_{\nu\lambda} + (k + q)_\lambda g_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (54)$$

De los cuatro términos en (52), el primero de ellos simplemente lo dejamos intacto, pues no genera partes *pellizcadas*^(m). Los dos términos restantes, contienen términos $d^{-1}(q)$, los cuales debemos suprimir; y el cuarto término, jugará el papel de cancelar el lazo de fantasmas. Usando las identidades de Ward (50), obtenemos que la suma del segundo y tercer término de la Ec. (52) genera el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P \Gamma_{\lambda\nu\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P &= 4P_{\mu\nu}(q) d^{-1}(q) \\ &\quad - 2P_{\mu\nu}(k) d^{-1}(k) - 2P_{\mu\nu}(k + q) d^{-1}(k + q). \end{aligned} \quad (55)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior (55), puede ser descartado siguiendo las leyes de la PT intrínseca. Usando ahora las reglas de la regularización dimensional sabemos que

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} = 0, \quad (56)$$

y con ello descartamos todos aquellos términos que se anulan después de la integración; de tal manera, el segundo y tercer término de la Ec. (55) podrán ser escritos como

$$\begin{aligned} -2P_{\mu\nu}(k) d^{-1}(k) - 2P_{\mu\nu}(k + q) d^{-1}(k + q) &= \\ -2[(2k + q)_\mu k_\nu + (k + q)_\mu q_\nu]. \end{aligned} \quad (57)$$

Por otro lado, aplicando también la regla (56) de la regularización dimensional al cuarto término de la Ec. (52), obtendremos que

$$-\Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^P = -[k_\mu (k + q)_\nu + k_\nu (k + q)_\mu]. \quad (58)$$

Finalmente, combinando el primer término del lado derecho de la Ec. (52) con las Ecs. (57) y (58), y poniendo todo esto en la Ec. (47), J. M. Cornwall y J. Papavassiliou fueron capaces de obtener una expresión para la "autoenergía invariante de norma" [ver la Ec. (3.9) de la Ref. 21]

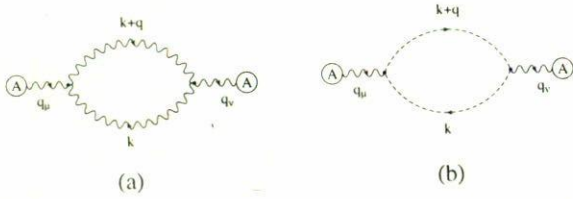


FIGURA 11. Diagramas necesarios para calcular la autoenergía “invariante de norma” $\hat{\Pi}_{\mu\nu}$ en el BFM. a) Lazo de gluones. b) Lazo de fantasmas. Momentos e índices de Lorentz están indicados. Tomado y adaptado de la Ref. 24.

gramas que contribuyen a dicha autoenergía están dados en la Fig. 11. Para el diagrama 11a tenemos que los vértices son (omitiendo los factores gf^{acd} y gf^{bdc} , respectivamente):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\lambda} \Big|_{\xi_Q=1} &= \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F(k, q, -k - q) \\ &= [-2q_\lambda g_{\alpha\mu} + 2q_\alpha g_{\mu\lambda} - (2k + q)_\mu g_{\lambda\alpha}] \end{aligned} \quad (75)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu\alpha} \Big|_{\xi_Q=1} &= \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F(k + q, -q, -k) \\ &= [2q_\alpha g_{\lambda\nu} - 2q_\lambda g_{\nu\alpha} - (2k + q)_\nu g_{\alpha\lambda}] \end{aligned} \quad (76)$$

De las Ecs. (75) y (76) y sabiendo que $f^{acd}f^{bdc} = (f^{acd})(-f^{bcd}) = -N\delta^{ab}$, llegamos a:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\mu\nu}^{(a)} &= \frac{iNg^2}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+q)^2} \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F(k, q, -k - q) \\ &\quad \times \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F(k + q, -q, -k). \end{aligned} \quad (77)$$

Por otro lado, del acoplamiento de los fantasmas con el campo de fondo A_μ^a tenemos los vértices elementales

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{acd} &= -gf^{acd}(2k + q)_\mu; \\ \tilde{\Gamma}^{bdc} &= -gf^{bdc}(2k + q)_\nu, \end{aligned} \quad (78)$$

con lo cual encontramos que la contribución de los fantasmas a la autoenergía Fig. 11b es

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\mu\nu}^{(b)} &= \frac{iNg^2}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+q)^2} \\ &\quad \times [-2(2k + q)_\mu(2k + q)_\nu]. \end{aligned} \quad (79)$$

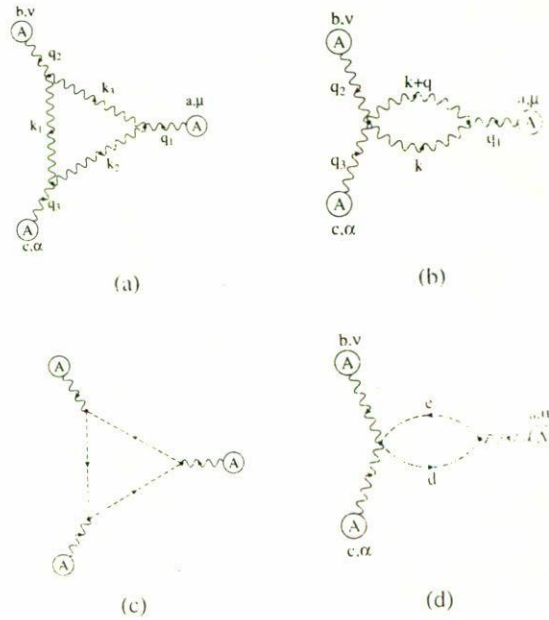


FIGURA 12. Diagramas necesarios para calcular el vértice “invariante de norma” $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}$ en el BFM. (a) y (c) Lazos de gluones, (b) y (d) Lazos de fantasmas. Para los casos de los diagramas (c) y (d), debemos añadir en los cálculos 2 permutaciones por cada diagrama en sus patas externas. Momentos e índices de Lorentz están indicados. Tomado y adaptado de la Ref. 24.

Notemos que las contribuciones $\hat{\Pi}_{\mu\nu}^{(a)}$ y $\hat{\Pi}_{\mu\nu}^{(b)}$ corresponden al primero y segundo término respectivamente de la Ec. (59), y que la suma de ambas contribuciones coincide exactamente con la expresión de la autoenergía $\hat{\Pi}_{\mu\nu}$ “invariante de norma”, que ha sido derivada en la Sección anterior por el método de la PT intrínseca. Este resultado fue hallado casi al mismo tiempo y de manera independiente por A. Denner, G. Weiglein y S. Dittmaier [10], y por H. Hashimoto, J. Koidara, Y. Yasui y K. Sasaki [24].

4.2. El vértice del BFM en $\xi_Q = 1$

Ahora vamos a calcular el vértice de tres gluones a un lazo. Para ello, debemos tener en cuenta que el vértice elemental AQQ en la norma de 't Hooft-Feynman ($\xi_Q = 1$), es equivalente a la parte Γ^F de la Ec. (49). La contribución de la Fig. 12a es

$${}^{(a)}\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = -\frac{iNg^3 f^{abc}}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} [\Gamma_{\sigma\mu\lambda}^F(k_2, q_1, k_3) \Gamma_{\lambda\nu\rho}^F(k_3, q_2, k_1) \Gamma_{\rho\alpha\sigma}^F(k_1, q_3, k_2)]. \quad (80)$$

De forma completamente análoga, hallamos la contribución del lazo de fantasmas Fig. 12b

$${}^{(b)}\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = -\frac{iNg^3 f^{abc}}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} [2(k_2 + k_3)_\mu (k_3 + k_1)_\nu (k_1 + k_2)_\alpha]. \quad (81)$$

Ahora debemos pasar a calcular el vértice de gluones con lazo de gluones Fig. 12c. En este caso debemos usar el vértice de 4 gluones con 2 campos de fondo, y el vértice de 2 gluones con 1 campo de fondo (este último ya lo hemos usado antes). De

las Reglas de Feynman dadas en la Fig. 7, llegamos a que dichos vértices serán:

$$-ig^2 \Gamma_{\lambda\nu\alpha\sigma}^{bedc} \Big|_{\xi_Q=1} = -ig^2 \left[f^{bdx} f^{xce} (g_{\nu\alpha} g_{\sigma\lambda} - g_{\nu\lambda} g_{\sigma\alpha} + g_{\nu\sigma} g_{\alpha\lambda}) + f^{bex} f^{xdc} (g_{\nu\sigma} g_{\alpha\lambda} - g_{\nu\alpha} g_{\sigma\lambda} - g_{\nu\lambda} g_{\sigma\alpha}) + f^{bcx} f^{xde} (g_{\nu\sigma} g_{\alpha\lambda} - g_{\nu\lambda} g_{\sigma\alpha}) \right], \quad (82)$$

$$gf^{ade} \bar{\Gamma}_{\sigma\mu\lambda} \Big|_{\xi_Q=1} = gf^{ade} \Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F(k + q_1, -q_1, -k) = gf^{ade} \left[2q_{1\lambda} g_{\sigma\mu} - 2q_{1\sigma} g_{\lambda\mu} - (2k + q_1)_\mu g_{\sigma\lambda} \right]. \quad (83)$$

Tomando las Ecs. (82) y (83), e introduciendo como antes el factor de simetría 1/2 y contrayendo todos los índices, llegamos a que

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = \frac{iNg^3 f^{abc}}{2} \delta(q_{1\alpha} g_{\mu\nu} - q_{1\nu} g_{\mu\alpha}) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k + q_1)^2}, \quad (84)$$

haciendo el mismo procedimiento para las otras 2 permutaciones (una por cada pata externa de la Fig. 12c) llegaremos a:

$${}^{(c)}\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = \frac{iNg^3 f^{abc}}{2} \left[8(q_{1\alpha} g_{\mu\nu} - q_{1\nu} g_{\mu\alpha}) \tilde{A}(q_1) + 8(q_{2\mu} g_{\alpha\nu} - q_{2\alpha} g_{\mu\nu}) \tilde{A}(q_2) + 8(q_{3\nu} g_{\mu\alpha} - q_{3\mu} g_{\nu\alpha}) \tilde{A}(q_3) \right], \quad (85)$$

en donde $\tilde{A}(q_i)$ está definida por la Ec. (72).

Finalmente la contribución de la Fig. 12d (y los otros dos similares que nacen de las permutaciones de las patas externas) tiene una contribución “nula” por la aplicación directa de la identidad

$$f^{ead}(f^{dbx} f^{xce} + f^{dcx} f^{xbe}) = 0. \quad (86)$$

Sumando las contribuciones de las Figs. 12a–12c y omitiendo como antes un factor global constante gf^{abc} , obtenemos el resultado que coincide plenamente con el obtenido en la Ec. (71) usando la PT intrínseca. De nuevo cada una de las contribuciones de los diagramas (12a–12c) corresponden a cada uno de los sumandos de la Ec. (71) de la Sección anterior. Este resultado también fue obtenido independientemente en [10, 24]. Por último, mencionaremos que el vértice $\hat{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}(q_1, q_2, q_3)$ está relacionado con la autoenergía “invariante de norma” $\hat{\Pi}_{\mu\nu}$ de la Ec. (59) mediante la identidad de Ward

$$q_1^\mu \hat{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}(q_1, q_2, q_3) = \hat{\Pi}_{\nu\alpha}(q_3) - \hat{\Pi}_{\nu\alpha}(q_2), \quad (87)$$

esta última identidad fue hallada en la Ec. (20) de la Ref. 21.

El cálculo del “vértice de cuatro gluones invariante de norma” fue analizado en la Ref. 27. Partiendo del BFM, y fijando la norma cuántica en $\xi_Q = 1$, S. Kashimoto, J. Kodaira, Y. Yasui y K. Sasaki en la Ref. 24, hallaron el mismo vértice. Demostrando además, que satisface las mismas identidades de Ward de la Ref. 27.

Para finalizar esta sección, resumimos a continuación la relación existente entre los vértices de n puntos de la PT y los del BFM [36, 38]:

- Tanto para teorías no rotas, como para aquellas espontáneamente rotas, el BFM en la norma de 't Hooft-Feynman, reproduce los objetos rearrreglados de la PT. De tal manera, que obtenemos los resultados principales de la PT, directamente cuando hacemos $\xi_Q = 1$ en el BFM.

- Para $\xi_Q \neq 1$, el algoritmo PT puede ser implementado en el formalismo BFM, y de esta manera obtener en principio, funciones de vértice invariantes de norma. Tanto para teorías no rotas como para las espontáneamente rotas.
- Parece ser que, en $\xi_Q \neq 1$, las partes imaginarias de los vértices de n puntos del BFM, exhiben umbrales no físicos. Lo que en principio no sucede con los vértices rearrreglados de la PT.
- La correspondencia entre las funciones de vértice de n puntos de la PT y las del BFM en $\xi_Q = 1$, persiste a dos lazos. Es de esperarse, que dicha relación continúe siendo válida a ordenes más altos en teoría de perturbaciones.

5. La Invariancia de norma y la independencia del parámetro de norma

Como ya hemos puntualizado antes, pasaremos a discutir la conexión entre *invariancia de norma e independencia del parámetro de norma* de los distintos vértices [28, 29]. Diversos autores, motivados por la independencia del parámetro de norma de los diferentes elementos de la matriz S completa, han llevado a cabo rearrreglos de las diferentes partes dependientes de la norma entre los diversos vértices. Dando como resultado “bloques” separadamente independientes del parámetro de norma [20–23, 30]. En particular, la PT [20–23], proporciona un algoritmo general para rearrreglar los vértices a uno y dos lazos [37], con la ventaja de obtener “vértices” libres del parámetro de norma.

Por otro lado, hemos mostrado que los “vértices” de la PT coinciden con los correspondientes vértices del BFM únicamente para el caso especial de la norma de 't Hooft-Feynman ($\xi_Q = 1$). Las propiedades teóricas de estos *bloques* son una consecuencia de las identidades de Ward clásicas

cas [10, 24]. En el BFM, estas identidades son una consecuencia directa de la invariancia de norma manifiesta, la cual es mantenida a todos los ordenes en teoría de perturbaciones. Pero, ¿cuál es el origen de estas identidades de Ward dentro de la PT? Los autores A. Denner, S. Dittmaier y G. Weiglein [32] aseguran que, el hecho crucial en el algoritmo de la PT, es que los elementos de la matriz S están compuestos de estos “vértices” libres del parámetro de norma y están conectados con propagadores a nivel árbol dependientes de dicho parámetro. Este hecho junto con las consideraciones adicionales de indentificar estructuras tipo propagador, tipo vértice y tipo caja; con lleva a que los “vértices” de la PT satisfagan las identidades de Ward clásicas. Aseguran además, que estas identidades de Ward no fijan de forma única estos “vértices”, dado que uno siempre puede mover “adecuadamente” diferentes partes entre dichos “vértices” que por si mismas cumplen las identidades de Ward.

De esta manera, la validez de las relaciones de simetría (no triviales) no estan basadas en la independencia real del parámetro de norma de los nuevos “vértices”, sino más bien, en la independencia de los parámetros de norma de los propagadores a nivel árbol con respecto de la norma dentro de los lazos. A. Denner, S. Dittmaier y G. Weiglein [32], afirman que la prescripción dada en la PT, es sólo un caso especial del desacoplamiento del término que fija la norma en los lazos de los propagadores a nivel árbol, como ocurre en el BFM. De estas consideraciones aseguran que, la utilización de métodos tales como la PT dentro del BFM no es útil, ya que el término que fijan la norma en las líneas a nivel árbol están ya desacopladas [6, 7], y la eliminación de ξ_Q no puede ser distinguida de poner en ξ_Q cualquier valor específico. En este contexto es interesante de notar que un algoritmo para generalizar la PT fue propuesto en la Ref. 33 que reproduce los vértices del BFM en QCD para valores arbitrarios del parámetro de norma cuántica ξ_Q a un lazo.

Como se dijo antes, una vez involucradas las resummaciones, las predicciones físicas a un cierto orden en teoría de perturbaciones dependen de la norma y de la prescripción usada para definir los vértices. Estas son las raíces de la pregunta si una de estas prescripciones es distinguida por razones físicas. Los autores de la Ref. 32 aseguran que, las favorables propiedades teóricas de los vértices de n puntos del BFM (o de la PT), son igualmente buenas, para cualquier elección del parámetro de norma ξ_Q , pero que sin embargo, las identidades de Ward no son suficientes como para proporcionarnos una distinción. Por otro lado, los autores de la Ref. 34 argumentan que la PT (o equivalentemente el BFM con $\xi_Q = 1$) son distinguibles. El argumento para descartar el BFM en $\xi_Q \neq 1$ es la aparición de umbrales no físicos en el correspondiente vértice. Para $\xi_Q = 1$ los umbrales no físicos tienen lugar y aparecen en la misma localización de los umbrales físicos y no pueden ser distinguidos en las funciones de Green. El punto significativo de la PT son sus elementos de la matriz S que evidentemente no relaciona umbrales no físicos. Sin embargo, los “vértices” de la PT son el resultado de la reordenación de los distintos elementos de la matriz

S en contribuciones tipo propagador, tipo vértice y tipo caja. No es obvio que estas reordenaciones no introduzcan umbrales no físicos en las contribuciones individuales, que aparecen en la misma localización que los umbrales físicos. De tal manera (se asegura en la Ref. 32), no hay distinción física entre la definición del vértice que puede ser establecida mediante la existencia de varias prescripciones. Lo cual significa la inherente ambigüedad para definir factores de forma, resummaciones, etc. sobre la base de los vértices fuera de la capa másica (*off-shell-mass*). Finalmente hacemos notar que en un contexto diferente, los autores de la Ref. 35 también llegan a la conclusión de que las cantidades fuera de la capa masica son ambigüas incluso si la invariancia de norma es impuesta.

6. Conclusiones

Hemos revisado las bases teóricas tanto del *Background Field Method* (BFM) como de la *Pinch Technique* (PT) para la teoría pura de Yang-Mills, es decir, sin acoplamientos de materia. Y hemos mostrado que en el BFM se reproducen los resultados más importantes *invariantes de norma* de la PT, sólo cuando elegimos en el BFM la norma de 't Hooft-Feynman ($\xi_Q = 1$) [10, 24].

La invariancia de norma de la acción efectiva en el BFM, implica simples identidades de Ward como ocurre en QED para los vértices. Como consecuencia de ello, posee buenas propiedades teóricas, tal como un buen comportamiento a altas energías. Además, el formalismo provee ventajas adicionales, tales como la simplificación de las Reglas de Feynman y la posibilidad de usar diferentes normas en la construcción de los diagramas de Feynman. Es decir, en los propagadores a nivel árbol y en los lazos. Haciendo con esto que el número de diagramas por considerar en un cierto proceso físico, se reduzca.

El desacoplamiento de los diferentes términos que fijan la norma, tanto a nivel árbol como dentro de los lazos, no determina únicamente los vértices del BFM como hemos señalado antes, por su dependencia con el parámetro de norma cuántica ξ_Q . Esta clase de ambigüedad es también inherente en todos aquellos métodos que eliminan la dependencia del parámetro de norma de los vértices, restituyendo las diferentes partes dependientes de la norma. Este es en particular, el caso del algoritmo de la PT que reproduce la elección $\xi_Q = 1$ del BFM. De hecho, el comportamiento del BFM o de los “vértices” PT puede ser rastreado por la identidades de Ward, las cuales se mantienen en el BFM para ξ_Q arbitrario. Estas identidades de Ward resultan en el BFM directamente de la invariancia de norma.

De todo lo anterior es inmediato hacernos las siguientes preguntas: ¿por qué únicamente la norma de 't Hooft-Feynman en el BFM, reproduce los resultados rearrreglados de la PT?, ¿es sólo un hecho fortuito [38]?, ¿es $\xi_Q = 1$ una norma privilegiada?, y en tal caso ¿esta norma especial tiene consecuencias físicas medibles?. Las respuestas desde luego no son triviales y siguen siendo preguntas abiertas. Únicamente un estudio detallado y profundo, del término que

fija la norma en las estructuras lineales y no lineales, podrá darnos la respuesta correcta de por que es posible obtener los resultados *reordenados* de la PT, mediante el uso del BFM.

Agradecimientos

Deseo agradecer a Stefan Dittmaier, Georg Weiglein y Joannis Papavassiliou sus valiosos comentarios acerca del BFM y

la PT; a Ken Sasaki y Yoshiaki Yasui su autorización expresa para reproducir aquí, algunas de las figuras de su trabajo (ver la Ref. 24); a José Bernabeu, Miguel Angel Sanchis-Lozano y Arnulfo Zepeda la lectura crítica de este trabajo; así como a la Dirección General de Asuntos de Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (D.G.A.P.A.-U.N.A.M.), por la beca concedida.

- (a) En la bibliografía especializada en lengua española, el vocablo inglés “gauge” se traduce de diversas maneras: norma, escala, contraste, aforo, etc.
- (b) En realidad hay tantos parámetros de norma, como campos de norma existan. Habitualmente, solo hablamos de un parámetro de norma sin pérdida de generalidad.
- (c) Simultáneamente y de forma independiente a Ansgar Denner, Georg Weiglein y Stefan Dittmaier [10, 11]; Xiaoyuan Li y Yi Liao [12], introdujeron la renormalización *on-shell* en el BFM electrodébil.
- (d) El factor constante $\xi/2$ que acompaña a G^a , lo hemos expresado tal y como originalmente lo hicieron K. Fujikawa, B.W. Lee y A.I. Sanda en 1972 al inventar el R_ξ^L gauge lineal [14] y no como aparece corrientemente en los libros especializados. Esto lo hacemos con la única intención de unificar criterios a la hora de obtener la norma Unitaria ($\xi \rightarrow 0$) y la norma de Landau ($\xi \rightarrow \infty$) y poder así reproducir los resultados obtenidos por otros autores. El R_ξ^{NL} gauge no lineal fue inventado por K. Fujikawa un año después [15], y como veremos más adelante, este tipo de normas están relacionadas con el BFM.
- (e) La transformada de Legendre es una herramienta matemática muy útil, pues transforma funciones de un espacio vectorial a funciones en el espacio dual. En física es frecuente hallarla por ejemplo, en la definición de cantidades termodinámicas. Es decir, experimentalmente es más fácil controlar las variables intensivas que las extensivas, o en otras palabras, no hay ningún aparato capaz de medir y controlar la Entropía siendo sin embargo, relativamente fácil medir y controlar su variable conjugada, la Temperatura [16].
- (f) El segundo término del llamado término que fija la norma (gauge fixing term) (22) es el típico término no lineal que aparece en los R_ξ^{NL} gauges no lineales [15]. De ahora en adelante, llamaremos indistintamente a los R_ξ^L (R_ξ^{NL}) gauges lineales (no lineales) como “estructuras de normas lineales (no lineales)” respectivamente.
- (g) Es por este motivo que el parámetro de norma que aparece en las Reglas de Feynman de la Fig. 7 se refiere al parámetro de norma de los campos cuánticos [6], el cual denotaremos de ahora en adelante como ξ_Q para recordarlo.
- (h) Usaremos la palabra pellizcar como la traducción de pinch.
- (i) La única dependencia con el parámetro de norma proviene del propagador que “desaparece” cuando en un proceso físico ponemos las patas externas sobre la capa masica, ver la Ref. 21.
- (j) Usamos las reglas de Feynman de la Ref. 25.
- (k) La definición del vértice de tres gluones $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}$, y por tanto de $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F$ y $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}^P$ en este trabajo, es diferente del correspondiente a la Ref. 21 por un factor global -1 . Esto se hace así, para poder contar con una “regla pneumotécnica” general para construir los vértices pellizcados Γ^P .
- (l) El primero en sugerir este tipo de descomposición fue G. 't Hooft en la Ref. 26.
- (m) La forma explícita de este producto es $\Gamma_{\alpha\mu\lambda}^F \Gamma_{\lambda\nu\alpha}^F = -8q^2 P_{\mu\nu}(q) + 4(2k+q)_\mu(2k+q)_\nu$, ver la Ec. (3.10) de la Ref. 21.
1. B.S. DeWitt, *Phys. Rev.* **162** (1967) 1195; B.S. DeWitt *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, New York, 1963).
 2. G. 't Hooft, en “Acta Universitatis Wratislavenensis” No. 38, *Proceedings of the 12th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz; Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory* (1975) Vol. I, edited by Bernard Jancewicz (Wroclaw University, Wroclaw, 1976).
 3. B.S. DeWitt, en *Quantum Gravity 2*, edited by C.J. Isham, R. Penrose, and D.W. Sciama, (Oxford University Press, New York, 1981).
 4. D.G. Boulware, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 389.
 5. L.F. Abbott, *Nucl. Phys. B* **185** (1981) 189; L.F. Abbott, *Acta Phys. Pol. B* **13** (1982) 33.
 6. L.F. Abbott, M.T. Grisaru, and R.K. Schaefer, *Nucl. Phys. B* **229** (1983) 372; C. Becchi and R. Collina, hep-th/9907092.
 7. A. Rebhan and G. Wirthumer, *Z. Phys. C* **28** (1985) 269.
 8. S. Ichinose and M. Omote, *Nucl. Phys. B* **203** (1982) 221.
 9. D.M. Capper and A. MacLean, *Nucl. Phys. B* **203** (1982) 413.
 10. A. Denner, G. Weiglein, and S. Dittmaier, *Phys. Lett. B* **33** (1994) 420; A. Denner, G. Weiglein, and S. Dittmaier, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **37 B** (1994) 87.
 11. A. Denner, G. Weiglein, and S. Dittmaier, *Nucl. Phys. B* **440** (1995) 95.
 12. Xiaoyuan Li and Yi Liao, *Phys. Lett. B* **356** (1995) 68.
 13. C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, International Edition Physics Series, Singapore, 1985).
 14. K. Fujikawa, B.W. Lee, and A.I. Sanda, *Phys. Rev. D* **6** (1972) 2923.
 15. K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 393.
 16. Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Edition, (Cambridge University Press, 1996) p. 260.

17. P. Pascual and R. Tarrach, QCD: *Renormalization for the Practitioner*, Lecture Notes in Physics, (Springer-Verlag, Germany, 1984) Appendix D, p. 252.
18. Kei-Ichi Kondo, hep-th/9904045.
19. P.A. Grassi, hep-th/9505101.
20. J.M. Cornwall, in *Proceeding of French-American Seminar on Theoretical Aspects of Quantum Chromodynamics*, Marseille, France, 1981, edited by J.W. Dash (Centre de Physique Théorique, Marseille, 1982); J.M. Cornwall, *Phys. Rev. D* **26** (1982) 1452.
21. J.M. Cornwall and J. Papavassiliou, *Phys. Rev. D* **4** (1989) 3474.
22. J. Papavassiliou, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 3179.
23. G. Degrassi and A. Sirlin, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 3104.
24. S. Hashimoto, J. Kodaira, Y. Yasui, and K. Sasaki, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 7066.
25. Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, cuarta reimpression, (Oxford University Press, 1992) Appendix B, p. 504.
26. G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **33** (1971) 173.
27. J. Papavassiliou, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 4728.
28. E. Kraus and K. Sibold, hep-th/9406115.
29. R. Häußling, E. Kraus, and K. Sibold, hep-th/9807088.
30. D.C. Kennedy and B.W. Lynn, *Nucl. Phys. B* **322** (1989) 1; D.C. Kennedy, B.W. Lynn, C.J.C. Im, and R.G. Stuart, *Nucl. Phys. B* **321** (1989) 83; B.W. Lynn, Stanford University Report No. SU-ITP-867, 1989 (unpublished); D.C. Kennedy, en *Proc. of the 1991 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*, edited by R.K. Ellis *et al.* (World Scientific, Singapore, 1992) p. 163; M. Kuroda, G. Moulataka, and D. Schildknecht, *Nucl. Phys. B* **350** (1991) 25.
31. A. Denner, S. Dittmaier, and G. Weiglein, en *XXXVI Cracow School of Theoretical Physics*, Zakopane, Poland, June 1–10, 1996 (hep-ph/9609422).
32. A. Denner, S. Dittmaier, and G. Weiglein, en *Proc. of the Rindberg Workshop "Perspectives for electroweak interactions in e^+e^- collisions*, ed. B.A. Kniehl (World Scientific, Singapore, 1995) p. 281, hep-ph/9505271.
33. A. Pilaftsis, hep-ph/9607451.
34. J. Papavassiliou and A. Pilaftsis, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 2128 y hep-ph/9605385.
35. F. Jegerlehner and J. Fleischer, *Phys. Lett.* **151B** (1985) 65; F. Jegerlehner and J. Fleischer, *Acta. Phys. Pol. B* **17** (1986) 709.
36. J. Papavassiliou, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 86.
37. J. Papavassiliou, hep-ph/9912336, hep-ph/9912338.
38. N.J. Watson, hep-ph/9912303.