

Desplazamientos de imágenes con hologramas generados por computadora

M.A. Araiza Esquivel, S. Guel Sandoval, L. Lastras* y J. Nieto

*Instituto de Investigación en Comunicación Óptica (IICO), Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP)
A. Obregón 64, 78000 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico*

**Electrical Engineering Department, Cornell University, Ithaca NY, 14850, USA.*

Recibido el 27 de octubre de 1999; aceptado el 3 de febrero de 2000

En el presente trabajo se examinan algunas de las características de los hologramas generados por computadora (HGC's) tipo *detour*. Concretamente, se observan los desplazamientos que sufren las imágenes dadas por hologramas de este tipo, cuando la transformada de Fourier (TF) de un objeto se ve afectada por un factor de fase. Este fenómeno se presenta aquí como una comprobación experimental en dos dimensiones, de lo que en procesamiento de señales y en teoría de Fourier se conoce como el teorema del desplazamiento. Además este resultado es interesante tal y como aquí se propone porque no puede ser observado usando hologramas ordinarios. Puesto que se propone una alternativa original para visualizar un hecho conocido, este trabajo es más bien de carácter didáctico.

Descriptores: Holograma generado por computadora; *detour*; transformada de Fourier; teorema del desplazamiento

In this work some characteristics of *detour* computer generated holograms (CGH's) are examined. Concretely, the displacements of reconstructed images given for such a type of holograms when the Fourier transform (FT) of the object is affected by a phase factor are observed. This phenomenon is here presented as an experimental testing in two dimensions, of what in signal processing and Fourier theory is known as the shift theorem. Besides this result is interesting as here is proposed, because it can not be observed using ordinary holograms. Since it is proposed an original alternative to visualize a known fact, this work is rather for didactic use.

Keywords: Computer generated hologram; *detour*; Fourier transform; shift theorem

PACS: 42.30.Kq; 42.30.Va; 42.40.Jv

1. Introducción

Un holograma es un dispositivo óptico que puede grabar en su totalidad la información contenida en cada uno de los puntos de un frente onda cualquiera (esto es, amplitud y fase). A mediados de los 40's Gabor [1] introdujo este concepto en óptica, demostrando que la fase de un frente de onda, que normalmente se pierde en el momento de su detección, podía ser recuperada cuando dicho frente se hacía interferir con un haz de referencia de la misma frecuencia y coherente con aquél. Además, demostró que dicho frente podía ser fácilmente reconstruido.

Leith y Upatnieks [2] propusieron que si el haz de referencia estaba inclinado respecto al plano de interferencia, en la reconstrucción se podía recuperar la información casi sin ruido. Esta nueva aportación fue experimentalmente posible gracias a la relativamente nueva tecnología del láser; mejorando en tal forma el proceso, que la holografía llegó a ser por casi dos décadas una de las áreas más importante de la óptica debido a sus múltiples aplicaciones.

A mitad de la década de los sesentas y con el advenimiento y desarrollo de las computadoras y los sistemas de *software*, una nueva fase de esta disciplina apareció en la óptica: la holografía digital u hologramas generados por computadora (HGC's); técnica que sin embargo no se consolidó definitivamente sino hasta principio de los ochentas, con la aparición de los sistemas de cómputo más rápidos, avanzados y con gran capacidad de memoria.

Los HGC's, fueron primeramente propuestos por Brown y Lohmann [3], y por Lohmann y Paris [4], quienes definie-

ron un holograma llamado *detour* [5] que contenía solamente partes transparentes y negras, esto es con transmitancia binaria [6, 7]. Una de las principales características de este método es su capacidad para registrar por separado la amplitud y la fase de un frente de onda dado. Otra, también importante, es que el objeto cuyo holograma se requiere, puede ser puramente matemático sin existencia física [8]. Cabe mencionar que desde su aparición, esta nueva técnica llamó la atención de un gran número de investigadores hacia múltiples e interesantes aplicaciones [9].

Los hologramas tipo *detour*, que son la base de este trabajo, utilizan el concepto de transformada de Fourier discreta (TFD) de un frente de onda bidimensional. Primeramente una imagen se digitaliza y luego mediante un algoritmo se le asigna a cada punto una función de fase y amplitud (o sea su TFD). Se define una celda en la cual la amplitud se representa por el tamaño de un rectángulo y la fase por su posición, dentro de la misma celda. Usando una impresora, se gráfica el patrón así definido, el cual posteriormente se reduce fotográficamente hasta el tamaño de una transparencia de 35 mm, de tal forma que pueda difractar luz de una manera apropiada. Cuando dicha transparencia se ilumina con un frente de onda plano coherente, se puede reconstruir la imagen del objeto original con ayuda de una lente.

El propósito del presente trabajo es observar los desplazamientos que experimentan imágenes obtenidas con HGC's tipo *detour*, cuando previamente las funciones representativas de sus transformadas de Fourier respectivas [10] se han multiplicado por un factor de fase lineal. En la Sec. 2 se describe el método utilizado para fabricar un HGC de este tipo,

luego en la Sec. 3 se definen los términos de fase responsables para lograr el efecto mencionado y posteriormente en la Sec. 4 se muestran algunas fotografías con los resultados obtenidos. Por último se mencionan las conclusiones.

2. HGC's tipo *detour*

De acuerdo con el método de Brown y Lohmann para obtener un HGC tipo *detour*, primeramente se define un objeto con amplitud y fase [11].

$$u(x, y) = |u(x, y)| \exp[j\phi(x, y)], \quad (1)$$

del cual se calcula su transmitancia compleja $H(K, L)$ por medio de la TFD:

$$H(K, L) = \sum_m \sum_n u(m, n) \exp \left[\frac{-2\pi j(mK + nL)}{N} \right] \quad (2)$$

$$-\frac{N}{2} \leq K \leq \frac{N}{2}; \quad -\frac{N}{2} \leq L \leq \frac{N}{2},$$

en donde $H(K, L)$ es la transformada de Fourier discreta de $u(m, n)$, siendo (m, n) sus coordenadas espaciales y (K, L) sus coordenadas en el dominio de la frecuencia (Ver Fig. 1a).

La función compleja $H(K, L)$, puede ser expresada en términos de su amplitud y fase:

$$H(K, L) = |H(K, L)| \exp[j\varphi(K, L)] \quad (3)$$

cuya amplitud normalizada al máximo $H(K, L)$ viene dada por

$$A(K, L) = \frac{|H(K, L)|}{H_{MAX}} \text{ y } |H(K, L)| \leq H_{MAX} \quad (4)$$

esto es: $0 \leq A(K, L) \leq 1$. Se genera un patrón, el cual consiste de $N \times N$ celdas centradas en $x = K\delta x$ y $y = L\delta y$, (donde $\delta x = \delta y$), y posteriormente se imprime. El ancho de la barra $W(K, L)\delta x$ dentro de cada celda se relaciona con la amplitud de la transformada de Fourier (TF) del objeto, mientras que la posición $P(K, L)\delta x$, se relaciona con su fase como se muestra en la Fig. 1b. Las expresiones que relacionan ambas cantidades son:

$$W(K, L) = \frac{\sin^{-1}[A(K, L)]}{\pi}, \quad (5)$$

$$P(K, L) = \frac{\varphi(K, L)}{2\pi}. \quad (6)$$

La Fig. 1c muestra como podría verse el holograma.

3. Teorema del desplazamiento y términos multiplicativos de fase

El teorema del desplazamiento [12] utilizado en teoría de Fourier se enuncia como sigue:

$$F\{u(x - a, y - b)\} = H(f_x, f_y) \exp[-j2\pi(f_x a + f_y b)], \quad (7)$$

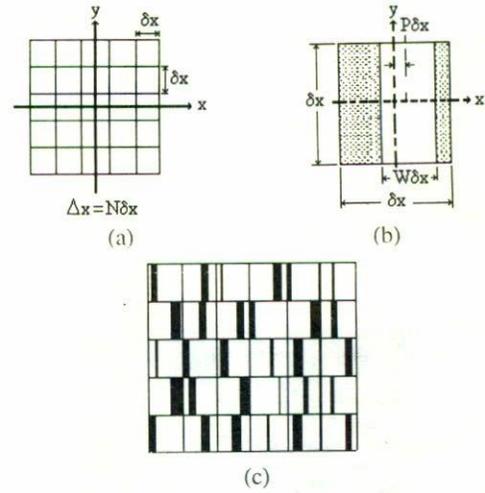


FIGURA 1. a) Objeto dividido en $N \times N$ celdas, b) Esquema del rectángulo de una celda y c) Ejemplo de como se vería un holograma.

esto es, que un desplazamiento en las coordenadas espaciales (x, y) , da como resultado un cambio de fase lineal en el dominio de la frecuencia (f_x, f_y) y viceversa.

Este teorema expresado en forma discreta sería

$$F\{u(m - p, n - q)\} = H(K, L) \exp[-j2\pi(K + L)], \quad (8)$$

entonces, cuando la TF de $H(K, L)$ [Ec. (2)] se multiplica por los siguientes términos de fase:

$$\exp(-j\pi pK), \quad (9)$$

$$\exp(-j\pi qL), \quad (10)$$

$$\exp[-j\pi(pK + qL)], \quad (11)$$

donde p y q varían entre $0 \leq p \leq 2$ y $0 \leq q \leq 2$, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones, para los valores particulares de $p = 1$ y $q = 1$:

$$H1(K, L) = \sum_m \sum_n u(m, n) \times \exp \left[\frac{-2\pi j(mK + nL)}{N} \right] \exp(-j\pi K) \quad (12)$$

$$H2(K, L) = \sum_m \sum_n u(m, n) \times \exp \left[\frac{-2\pi j(mK + nL)}{N} \right] \exp(-j\pi L) \quad (13)$$

$$H3(K, L) = \sum_m \sum_n u(m, n) \times \exp \left[\frac{-2\pi j(mK + nL)}{N} \right] \exp[-j\pi(K + L)] \quad (14)$$

En la siguiente sección se muestran los resultados experimentales al efectuar estas operaciones con ayuda de un HGC.

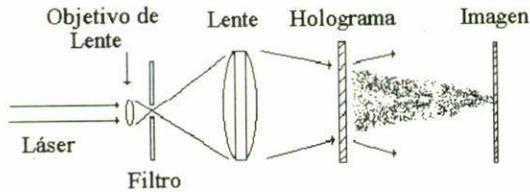


FIGURA 2. Diagrama del sistema óptico usado para la reconstrucción de la imagen.



FIGURA 3. Objeto de tamaño 230×230 píxeles.

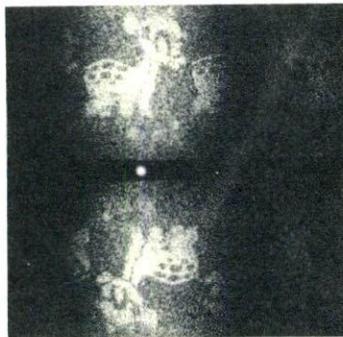


FIGURA 4. Fotografía de la imagen reconstruida. Se usó una franja negra en el centro para evitar sobre exposición debido a la alta intensidad del orden cero. Este mismo procedimiento fue usado cuando se tomaron las fotografías de las Figs. 5 a 7.

4. Resultados

Se generó un holograma por cada ecuación, los cuales fueron graficados, foto reducidos y finalmente reconstruidos.

En la Fig. 2 se muestra un esquema del sistema óptico utilizado para la reconstrucción de los hologramas. Básicamente se utiliza el haz abierto de un láser que se enfoca con ayuda de una lente; con el cual, al iluminar la transparencia, se reconstruyen en el plano de salida, la imagen del objeto y su conjugado en los ordenes ± 1 .

Como objeto se utilizó un dibujo animado muy conocido, el cual se muestra en la Fig. 3. Se generó un holograma sin el factor de fase, cuya imagen reconstruida se muestra en la

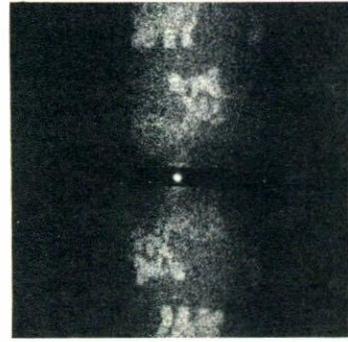


FIGURA 5. Imagen reconstruida, cuando la TF de $H(K, L)$ ha sido multiplicada por el término de fase $\exp(-j\pi K)$. Note que el centro de la imagen se desplaza, en la dirección vertical.

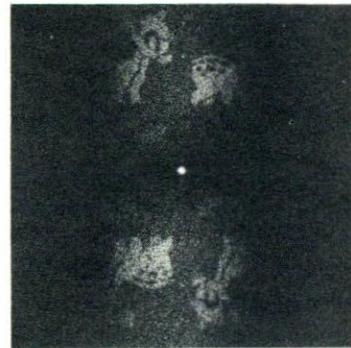


FIGURA 6. Imagen reconstruida, cuando la TF de $H(K, L)$ ha sido multiplicada por el término $\exp(-j\pi L)$. Note ahora que el centro de la imagen se desplaza en la dirección horizontal.

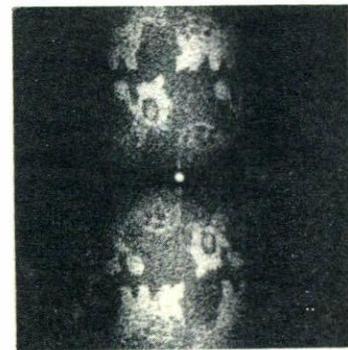


FIGURA 7. Imagen reconstruida cuando se utiliza el término de fase $\exp[-j\pi(K + L)]$. Note el desplazamiento en ambas direcciones.

Fig. 4. Las imágenes reconstruidas de los hologramas generados con las Ecs. (12) a (14), se muestran en las Figs. 5, 6 y 7, respectivamente.

El desplazamiento producido por el factor de fase se refiere al corrimiento del centro de la imagen, como se muestra en las figuras siguientes. En la Fig. 5 se puede observar que el objeto se ha desplazado en forma vertical respecto a la posición central del objeto, mientras que en Fig. 6, el desplaza-

miento es horizontal; esto sin dejar la imagen de repetirse en ambos casos. Lo anterior puede interpretarse como el resultado de afectar la TF del objeto como lo indican las Ecs. (12) y (13) respectivamente. Al juntar estos dos efectos en una misma ecuación [la Ec. (14)] se puede observar en la Fig. 7 que ocurren simultáneamente un movimiento vertical y otro horizontal de la imagen.

5. Conclusiones

En primer lugar estos resultados indican que existen desplazamientos reales, horizontales y/o verticales de las imágenes reconstruidas por un HGC, que son independientes del efecto repetitivo de la imagen misma como función periódica y que lo mismo sucede con su imagen conjugada; y que estos movimientos se deben al factor de fase por el cual se multiplica la función que representa la TF del objeto.

En segundo término, estos resultados pueden ser de interés didáctico, si se les considera como una comprobación experimental, mediante un método holográfico, del teorema del desplazamiento de uso común en la teoría de Fourier; resultados que hasta donde sabemos no pueden ser observados utilizando hologramas convencionales de transmisión.

Agradecimientos

Los autores de este trabajo agradecen al Prof. A.W. Lohmann por sus útiles sugerencias y comentarios durante la realización del mismo y por la revisión crítica del manuscrito. También a un árbitro anónimo por las mejoras sugeridas. Dos de los autores (M.A. Araiza y L. Lastras), agradecen a CONACyT por el apoyo económico para la realización de este trabajo.

-
1. D. Gabor, *Nature* **161** (1948) 777; *Proc. Roy. Soc.* **A197** (1949) 454; *The Proc. of the Phys. Soc.* **B64** (1951) 449.
 2. E.N. Leith and J. Upatnieks, *J. Opt. Soc. Amer.* **52** (1962) 1123.
 3. B.R. Brown and A.W. Lohmann, *Appl. Opt.* **5** (1966) 967.
 4. A.W. Lohmann and D.P. Paris, *Appl. Opt.* **6** (1967) 1739.
 5. B.R. Brown, A.W. Lohmann, and D.P. Paris, *Opt. Act.* **13** (1966) 377.
 6. A.W. Lohmann and D.P. Paris, *J. Opt. Soc. Am.* **56** (1966) 537A.
 7. B.R. Brown and A.W. Lohmann, *IBM J. Res. Develop.* **13** (1969) 160.
 8. R.J. Collier, C.B. Buckhardt, and L.H. Lin, *Optical Holography*, (Academic Press, San Francisco, 1971) p. 542.
 9. Wai-Hon Lee, "Computer-Generated Holograms: Techniques and Applications", *Progress in Optics XVI* (North-Holland, New York, 1978) p. 121.
 10. M.A. Araiza E., Tesis de Maestría, UASLP, 1997.
 11. A.W. Lohmann, "How to make a Computer Hologram", Notas y comunicación personal, INAOE e IICO (1996).
 12. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Second Edition (McGrw-Hill, New York, 1996) p. 4.