

Resolución angular impuesta por la turbulencia atmosférica

G. Camacho-Basilio¹ y C. Robledo-Sánchez

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Puebla

Apartado postal 1152, Puebla, Pue., Mexico

e-mail: ¹gcamacho@fcfm.buap.mx

Recibido el 24 de septiembre de 1999; aceptado el 10 de abril de 2000

Se muestra un cálculo teórico de la resolución angular de un telescopio con tamaño de abertura arbitraria considerando la presencia de la turbulencia atmosférica terrestre. Para esto se emplea el modelo de la turbulencia en el rango inercial de Kolmogorov. El resultado obtenido se compara con el límite de difracción del telescopio, de lo cual se concluyen dos cosas: una es que para aberturas mayores que dos metros, el límite de resolución angular no está determinado por la abertura misma del telescopio sino por la turbulencia; la otra es que para aberturas menores que cuarenta centímetros el límite de resolución sí está determinado por el tamaño de la abertura del telescopio y el efecto de la turbulencia no es importante.

Descriptores: Resolución angular; telescopio óptico; turbulencia atmosférica

A theoretical calculation of the angular resolution of a telescope with arbitrary aperture size in presence of the earth atmospheric turbulence is shown. We use the Kolmogorov turbulence model valid for the inertial range. Result of the calculation is compared with the telescope diffraction limit. From comparison, the conclusions are twofold. Firstly, the angular resolution limit not depends on the telescope aperture but on the turbulence, for apertures greater than two meters. Secondly, for apertures lesser than forty centimeters the resolution mainly depends on the telescope aperture size so, the turbulence is unimportant.

Keywords: Angular resolution; optical telescope; atmospheric turbulence

PACS: 42.68.Bz

1. Introducción

Actualmente es común expresar la calidad de un telescopio, entre otras de sus características, por su poder de resolución angular. Como es sabido, la turbulencia atmosférica de la Tierra es el fenómeno natural que deteriora la calidad de las imágenes astronómicas en cuanto a la pérdida de resolución. Para mejorarla, actualmente se han desarrollado diversas técnicas de pre-procesamiento y post-procesamiento tales como la óptica adaptiva [1–3] y la triple correlación [4–6], respectivamente. De estas dos, solo nos referiremos a la primera. En esta técnica, se trata de corregir en tiempo real la deformación del frente de onda que varía rápidamente con el tiempo. La deformación, obviamente, es producida por la inhomogeneidad del índice de refracción asociada a la turbulencia. A esta técnica de corrección adaptiva se le llama de *conjugación de fase*, pues consiste en aplicar, al frente de onda, una segunda deformación de la misma magnitud pero de signo opuesto (fase conjugada) mediante un espejo deformable. Debe mencionarse, sin embargo, que el frente de onda será corregido eficientemente con esta técnica no sin antes haber compensado sus aberraciones de más bajo orden con el llamado espejo de *tip-tilt*. Es decir, el proceso de recuperación de la calidad de la imagen, a este respecto, se realiza en dos etapas: primero se corrigen las aberraciones de bajo orden, con lo que se logra un incremento significativo, pero parcial, de la resolución, y posteriormente se corrigen las aberraciones de alto orden, recuperando toda la resolución perdida. Actualmente la técnica adaptiva de corrección

de imágenes astronómicas se desarrolla en varios lugares, incluyendo nuestro país [7], abocándose a la parte instrumental y a los algoritmos de control de los elementos adaptivos. Sin embargo algunos aspectos teóricos del fenómeno físico global pueden todavía ser enriquecidos, como lo muestra el presente trabajo. El fenómeno de la turbulencia atmosférica [8] se caracteriza por las fluctuaciones aleatorias de las velocidades de las partículas de los gases atmosféricos y se puede describir, en particular, por la función de correlación de esas fluctuaciones. La característica principal de este fenómeno, que es la vorticidad del campo de velocidades, se asocia en forma inmediata al concepto de *remolino*, que es útil para su representación. En efecto, la turbulencia se puede considerar como un conjunto de estos remolinos, de diferentes tamaños, distribuidos en el espacio y fragmentándose progresivamente con el tiempo, efectuándose una transferencia de energía en cascada de los grandes a los pequeños hasta la disipación. Tomando en cuenta el tamaño decreciente de estos remolinos, se han definido tres regiones en la turbulencia atmosférica, a saber: *la escala externa*, (en donde el tamaño varía aproximadamente entre los cien y unos cuantos metros) *el rango inercial* (para tamaños entre algunos metros hasta los centímetros) y la *escala interna*. (del orden de un milímetro o fracciones de él, en donde la energía se disipa) El análisis presentado aquí, como se indica en su momento, es válido para la región inercial solamente. Esto queda especificado al usar la función de correlación de las fluctuaciones de la fase, expresada en términos del espectro de frecuencias espaciales (correspondiente al espectro de tamaños de los re-

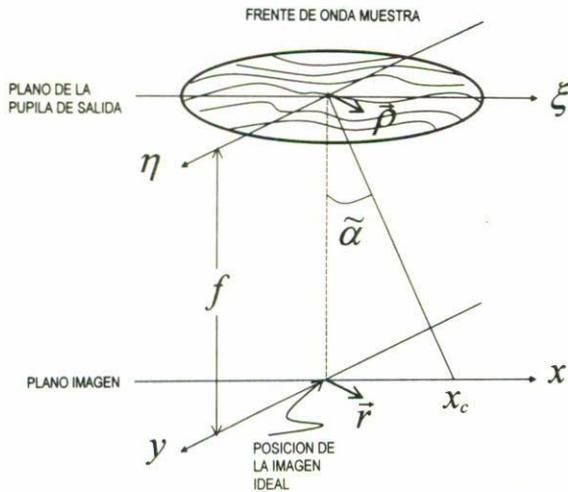


FIGURA 1. Frente de onda distorsionado por la turbulencia atmosférica en la pupila del telescopio y coordenada x_c del centroide de la sub-imagen respectiva.

molinos) presentes en la turbulencia. El modelo de distribución espectral empleado aquí es el de Kolmogorov, porque es el que describe mejor la turbulencia atmosférica en la región inercial. Además, el cálculo desarrollado de la resolución angular desprecia la influencia de la humedad y el sitio de observación puede ser cualquier observatorio terrestre con las mejores condiciones de observación (es decir un buen seeing).

2. Desviación del centroide de la imagen

Considérese un frente de onda en la abertura de un telescopio, como se muestra en la Fig. 1, que proviene de un objeto estelar en el zenit. Esta onda o campo óptico que ha atravesado la atmósfera y está siendo detectada se puede representar por la función

$$U(\vec{\rho}) = Ae^{iS(\vec{\rho})}, \tag{1}$$

definida en el plano de la abertura. La amplitud A se considera constante, con lo cual los efectos de centelleo [9] se desprecian, en tanto que su fase fluctuante, $S(\vec{\rho})$, se supone una función aleatoria cambiante con el tiempo. Esto último, pensado como una consecuencia de la naturaleza estadística de la turbulencia. El campo óptico en el plano imagen del espejo primario del telescopio, de acuerdo con la teoría escalar de la difracción [10], es proporcional a la transformada de Fourier del campo óptico en su pupila de salida, que coincide con su abertura, es decir,

$$U(\vec{r}) = F\{U(\vec{\rho})\} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho P(\vec{\rho})U(\vec{\rho})e^{-i\frac{\kappa}{f}\vec{r}\cdot\vec{\rho}}, \tag{2}$$

en donde $\kappa = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda, f es la distancia focal del telescopio y $P(\vec{\rho})$ es la función de pupila, definida por la geometría de la abertura. La irradiancia, definida por $I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2 = U(\vec{r})U^*(\vec{r})$ puede expresarse, con ayuda de la Ec. (2), por medio de la

fórmula

$$I(\vec{r}) = C \int_{G_R} d^2\rho_1 \int_{G_R} d^2\rho_2 U(\vec{\rho}_1)U^*(\vec{\rho}_2)e^{-i\frac{\kappa}{f}\vec{r}\cdot(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)}, \tag{3}$$

en donde C es una constante; el símbolo (*) denota el complejo conjugado y la región de integración G_R corresponde a la pupila circular de radio R del telescopio. En una imagen directa típica de una estrella el tiempo de exposición es relativamente grande (del orden de algunos segundos) comparado con los tiempos de fluctuación de la turbulencia (del orden de milisegundos) que son los mismos en que cambia la fase de la onda. Para el análisis, entonces, se debe considerar el proceso de formación de la imagen como un proceso aleatorio. Un ensamble de funciones de fase produce un ensamble de distribuciones de irradiancia en el plano de detección, que en su conjunto constituye la imagen de la estrella. Dada una función de fase muestra del ensamble como se observa en la Fig. 1, ésta producirá una de las distribuciones de irradiancia constitutivas de la imagen dada por la Ec. (3). Ahora, es posible calcular el *centroide de la distribución*, (o su “centro de gravedad”) el cual representa una desviación respecto a la posición de la imagen ideal, supuesta en el origen de coordenadas. El cálculo ya se ha hecho [11] y se ha obtenido, para la coordenada x_c del centroide, la expresión

$$x_c = \frac{f}{\kappa\pi R^2} \int_{G_R} d^2\rho \frac{\partial S(\vec{\rho})}{\partial \xi}, \tag{4}$$

que, como se ve, depende de la función de fase muestra dada. Como las funciones de fase asociadas a una imagen tienen diferentes deformaciones, entonces, sus centroides correspondientes serán diferentes y estarán distribuidos aleatoriamente alrededor de la posición de la imagen ideal. Por lo tanto, con el fin de obtener una expresión representativa del ensamble es pertinente introducir una medida de dispersión estadística.

A partir de la Ec. (4) es posible obtener la *desviación cuadrática media* del centroide en la forma

$$\begin{aligned} \langle x_c^2 \rangle &= \frac{f^2}{\kappa^2\pi^2 R^4} \left\langle \int_{G_R} d^2\rho_1 \frac{\partial S(\vec{\rho}_1)}{\partial \xi_1} \int_{G_R} d^2\rho_2 \frac{\partial S(\vec{\rho}_2)}{\partial \xi_2} \right\rangle, \\ \langle x_c^2 \rangle &= \frac{f^2}{\kappa^2\pi^2 R^4} \int_{G_R} d^2\rho_1 \int_{G_R} d^2\rho_2 \frac{\partial^2 \langle S(\vec{\rho}_1)S(\vec{\rho}_2) \rangle}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \tag{5} \\ \langle x_c^2 \rangle &= \frac{f^2}{\kappa^2\pi^2 R^4} \int_{G_R} d^2\rho_1 \int_{G_R} d^2\rho_2 \frac{\partial^2 B_s(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \end{aligned}$$

en donde se ha usado la notación $B_s(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \langle S(\vec{\rho}_1)S(\vec{\rho}_2) \rangle$ para definir la *función de correlación* del conjunto de funciones de fase del ensamble. En el rango inercial de la turbulencia, ésta se expresa por la fórmula [12]

$$B_s(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = 0.49 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \kappa^{-\frac{11}{3}} e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2)}. \tag{6}$$

Aquí, r_0 es el *diámetro de coherencia atmosférico* o “parámetro de Fried”; $\vec{\kappa}$ es el vector de frecuencia espacial en la turbulencia (cuyo módulo está dado por $\kappa = 2\pi/L$, en donde L es el tamaño del remolino) y $\kappa^{-\frac{11}{3}}$ es el espectro de frecuencias en el rango inercial propuesto por Kolmogorov [13].

La segunda derivada indicada en la Ec. (5), utilizando la Ec. (6), se expresa como

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} B_s(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = 0.49 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^\infty d\kappa \kappa \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\kappa^2}{R^2} \cos^2 \theta e^{i\vec{\kappa} \cdot (\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)}, \tag{7}$$

en donde (κ, θ) son las coordenadas polares de $\vec{\kappa}$. Además, sustituyendo la Ec. (7) en la Ec. (5) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle x_c^2 \rangle &= \frac{f^2}{k^2 \pi R^4} 0.49 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-\frac{5}{3}} \int_{G_R} d^2 \rho_1 e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}_1} \int_{G_R} d^2 \rho_2 e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}_2} \\ &= \frac{f^2}{k^2 \pi R^4} 0.49 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-\frac{5}{3}} \left[\frac{2\pi R}{\kappa} J_1(\kappa R) \right] \left[\frac{2\pi R}{\kappa} J_1(\kappa R) \right] \\ &= 0.156 \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 f^2 r_0^{-\frac{5}{3}} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-\frac{5}{3}} J_1^2(\kappa R) \\ &= 0.156 \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 f^2 r_0^{-\frac{5}{3}} R^{\frac{5}{3}} 2^{-\frac{5}{3}} \frac{\Gamma(\frac{8}{3}) \Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{17}{6}) \Gamma^2(\frac{11}{6})}, \end{aligned} \tag{8}$$

denotando con el símbolo Γ a la función gama. Efectuando los cálculos indicados en la Ec. (8), la expresión final para la desviación cuadrática media del centroide resulta

$$\langle x_c^2 \rangle = 0.169 f^2 \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}, \tag{9}$$

en donde D denota el diámetro de la abertura del telescopio, es decir $D = 2R$. Ahora, nos interesan las longitudes de onda en la región visible, en la cual el diámetro de coherencia atmosférico es de diez centímetros aproximadamente. Si se piensa en telescopios con parámetros típicos, es decir, con aberturas y distancias focales de varios metros, entonces, la desviación media del centroide $\sqrt{\langle x_c^2 \rangle}$ dada por la Ec. (9), es del orden de 10^{-5} metros.

3. Resolución angular

Considerando la presencia de la turbulencia atmosférica, hasta este punto, puede decirse que *en un conjunto de frentes de onda distorsionados sucesivos, correspondientes a una imagen directa típica, (con tiempo de exposición de algunos segundos) cada uno de ellos forma una "sub-imagen" (que se mantiene durante algunos milisegundos, pues el siguiente frente de onda formará otra sub-imagen) cuya distribución de irradiancia esta representada por su centroide.* El efecto global de todas las sub-imágenes es que constituyen la imagen de un *objeto virtual* cuyo tamaño angular es mayor al del objeto astronómico real; es decir, se ha perdido resolución angular. Efectivamente, a partir de la Ec. (9) es posible expresar el ángulo subtendido por la pequeña distancia $\sqrt{\langle x_c^2 \rangle}$, con buena precisión, por medio de la relación

$$\langle \tilde{\alpha} \rangle \approx \tan(\langle \tilde{\alpha} \rangle) = \frac{\sqrt{\langle x_c^2 \rangle}}{f}, \tag{10}$$

que se reduce a la expresión

$$\langle \tilde{\alpha} \rangle = 0.411 \left(\frac{\lambda}{D} \right) \left(\frac{D}{r_0} \right)^{\frac{5}{6}}, \tag{11}$$

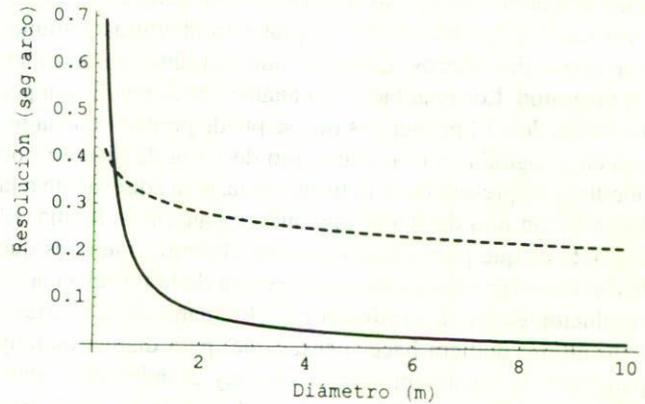


FIGURA 2. Comportamiento de la resolución angular para valores crecientes de la abertura del telescopio. La curva continua corresponde al límite de difracción y la curva punteada al límite impuesto por la turbulencia.

que proporciona un valor medio de la resolución angular impuesta por la turbulencia atmosférica. Por otro lado, para efecto de hacer una comparación, el límite de resolución impuesto por el diámetro de la abertura del telescopio, como es sabido [14], esta dado por la fórmula

$$\alpha_r = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \tag{12}$$

cuyo comportamiento se puede observar fácilmente a partir de una gráfica. En efecto, en la Fig. 2, la curva continua corresponde a la fórmula en la Ec. (12) para la longitud de onda media en el visible, es decir, $\lambda = 5.5 \times 10^{-7}$ m. En la misma figura se muestra, además, una curva punteada que corresponde a la resolución impuesta por la turbulencia, dada por la fórmula en la Ec. (11); considerándose la misma longitud de onda y un diámetro de coherencia atmosférico $r_0 = 0.1$ m

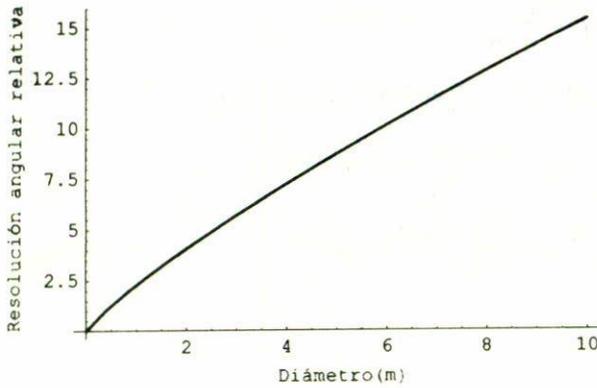


FIGURA 3. Resolución angular relativa impuesta por la turbulencia atmosférica: $\langle \tilde{\alpha} \rangle / \alpha_T$.

para la región visible. Las diferencias son evidentes y significativas si se piensa en telescopios con aberturas comunes mayores a dos metros. La resolución se reduce en un orden de magnitud. Los resultados del análisis de la Fig. 2, son por lo menos dos. El primero es que se puede predecir que la resolución lograda con un telescopio de 10 m de diámetro de apertura, en presencia de la turbulencia, será equivalente a la lograda con uno de 0.6 m operando en ausencia de ella. El segundo es que para telescopios con aberturas menores que 0.4 m (aproximadamente), en presencia de la turbulencia, la resolución estará determinada por el tamaño de la apertura. Esto último pudiera hacer pensar que, para diámetros muy pequeños, la resolución podría ser muy grande; pero, siendo el área muy pequeña, el poder colector de luz sería muy bajo y un telescopio así no serviría para observaciones astronómicas. En la Fig. 3 se muestra la resolución angular relativa dada por

$$\frac{\langle \tilde{\alpha} \rangle}{\alpha_T} = 0.33 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{0.65}, \quad (13)$$

impuesta por la turbulencia que, como se observa, puede llegar a ser 15 veces la resolución impuesta por la difracción para una apertura de 10 m.

4. Conclusiones

En primer lugar se puede decir que el análisis aquí presentado, considera un tren de ondas como un ensamble estadístico para analizar el fenómeno de la pérdida de resolución en la imagen debido a la turbulencia. Es necesario hacerlo de esta forma porque la fase ϕ , equivalentemente, el frente de onda fluctúa en el espacio en períodos de tiempo muy cortos comparados con los tiempos de exposición de las imágenes astronómicas. Se ha introducido el concepto de sub-imagen, asociada a una muestra del ensamble, es decir, a un frente de onda muestra. Los resultados gráficos son importantes en el sentido de que muestran los diámetros de telescopio para los cuales la turbulencia es determinante o no en la resolución de las imágenes que produce. Para aberturas grandes la resolución se reduce en un orden de magnitud respecto al límite difractivo. Una última conclusión es que si nos interesa obtener imágenes con una resolución hasta el límite impuesto por la turbulencia, un espejo "pequeño" de un metro de diámetro es suficiente y estaría un poco sobrado. Sin embargo, la capacidad de colección de luz, que es otra propiedad que determina la calidad de un telescopio, requiere de espejos tan grandes como sea posible para observar objetos cada vez más lejanos. Para estos últimos, la anexión de sistemas adaptivos de corrección en tiempo real es siempre recomendable para llegar al límite impuesto por la difracción y con esto obtener el mayor beneficio posible de las grandes aberturas. Un comentario final es que los resultados obtenidos están de acuerdo con los resultados reportados por otros autores [2].

Agradecimientos

Uno de los autores (CCB) agradece al CONACYT el apoyo recibido para el desarrollo del presente trabajo a través del proyecto número I27318-E.

1. M.J. Beran and J.O. Vogt, *Progress in Optics XXXIII* edited by E. Wolf, (North-Holland, Amsterdam, 1994).
2. F. Merkle, *International Trends in Optics*, edited by J.W. Goodman, (Academic Press, California, 1991).
3. R.K. Tyson, *Principles of Adaptive Optics*, (Academic Press, California, 1991).
4. G. Weigelt, *Progress in Optics, XXIX*, edited by E. Wolf, (North-Holland, Amsterdam, 1991).
5. F. Roddier, *Progress in Optics, XIX*, edited by E. Wolf, (North-Holland, Amsterdam, 1981).
6. G.D. Boreman and C. Dainty, *J. Opt. Soc. Am.* **13** (1996) 517.
7. L. Salas et al., *Proyecto del Telescopio Optico-Infrarrojo Mexicano de Nueva Tecnología: TIM*. Instituto de Astronomía de la UNAM y Observatorio Astronómico Nacional (1998).
8. G.K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1953).
9. J.H. Churnside, Anna Consortini, F. Cochetti, and R.J. Hill, *J. Opt. Soc. Am. A.* **10** (1993) 2354.
10. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, (McGrawHill, New York, 1968).
11. G. Camacho-Basilio, *Rev. Mex. Fís.* **43** (1997) 388.
12. V.V. Voitikhovich, *J. Opt. Soc. Am. A.*, **12** (1995) 2523.
13. V.I. Tatarski, *Wave Propagation in a Turbulent Medium*, (McGraw-Hill, New York, 1961).
14. P. Léna, *Observational Astrophysics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1988).