Las ecuaciones canónicas de Hamilton en la dinámica de los fluidos

Angel Fierros Palacios
Instituto de Investigaciones Eléctricas

Recibido el 21 de julio de 1999; aceptado el 28 de abril de 2000

Dentro del esquema teórico de Hamilton se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales de movimiento de la dinámica de los fluidos. Se establece una funcional de acción como una integral espacio-temporal sobre una región del espacio euclídeo tridimensional, de ciertas funciones que dependen de las variables de campo relevantes. Se postula un principio de acción extremal tipo Hamilton con condiciones de frontera adecuadas para obtener el sistema de ecuaciones canónicas de Hamilton. También se demuestra que la ecuación de balance de energía es equivalente al teorema de la energía de la mecánica teórica. Finalmente, se da una explicación acerca de la naturaleza de la fuerza hidrodinámica.

Descriptores: Mecánica analítica

In the theoretical scheme of Hamilton the set of differential motion equations of Fluid Dynamics is obtined. An action functional is introduced as a space-time integral over a region of the three dimentional Euclidean space of a certain functions that depend of the relevant field variables. A Hamilton type extreman action principle is postulated with adequate boundary conditions and the system of canonical equations of Hamilton is obtined. Additionaly, its demostrated that the energy balance equation is equivalent to the energy theorem of the theoretical mechanics. Finally, an explanation about the nature of the hydrodynamic force is given.

Keywords: Analytical mechanics

PACS: 03.40.Gc; 47.10.+g

1. Introducción

A partir de un principio de acción extremal tipo Hamilton, fue posible hacer de la dinámica de los fluidos una rama de la mecánica analítica de Lagrange [1]. Con el auxilio de las correspondientes funciones lagrangianas se obtuvieron las ecuaciones de balance para los casos de fluidos, tanto perfectos como viscosos [1, 2], así como para fluidos reales cargados eléctricamente que se mueven en presencia de un campo magnético externo [1, 3, 4]. En general, las lagrangianas que se utilizaron son funciones cuadráticas en el campo de velocidades. El formalismo propuesto se desarrolló dentro del marco teórico de la mecánica analítica de Lagrange [1]. Permite encarar el problema del estado dinámico de cualquier fluido en forma por demás sencilla, pero de mayor alcance y más fundamental que la que se logra con el marco teórico de la mecánica vectorial de Newton [5, 6]. Describe el flujo de un fluido cualquiera en una región del espacio euclídeo tridimensional, como resultado de los cambios experimentados por la geometría de esa región cuando se aplica una fuerza sobre la superficie que la envuelve [1]. El esquema de Lagrange es más sencillo que el de Newton porque no se vale del cálculo y del análisis vectorial como herramienta de trabajo. Las entidades físicas fundamentales que maneja son cantidades escalares mucho más fáciles de operar que los vectores. El principio tipo Hamilton y su generalización al enfoque de Hamilton, traslada el problema de la dinámica de los fluidos al dominio del cálculo de variaciones [6] que, ciertamente, es una herramienta matemática mucho más sencilla y transparente. La formulación lagrangiana apropiada a la dinámica de los fluidos presenta algunas dificultades debido a que se hace en términos de las coordenadas espaciales y del campo de velocidades que es función de la posición y del tiempo, de modo que coordenadas y velocidades ya no son independientes entre sí [1]. Tal circunstancia obliga a desarrollar un formalismo de Lagrange híbrido en donde se usa una densidad lagrangiana que depende únicamente del tiempo, de las coordenadas espaciales, del campo de velocidades y de ciertas funciones de campo; y un principio de acción extremal tipo Hamilton. Las ecuaciones de campo que se obtienen son ecuaciones de balance. No son ni totalmente ecuaciones de movimiento ni totalmente leyes de conservación [1]. No obstante, son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden. En el esquema de Hamilton se hace uso de las transformaciones de Legendre [5, 6] para reformular el problema de Lagrange de la dinámica. En vez de describir la mecánica en términos de las coordenadas y las velocidades generalizadas, se realiza una transformación matemática a un nuevo marco teórico donde se usan las coordenadas generalizadas como variables independientes y se reemplazan las velocidades por los momentos generalizados adecuadamente definidos en función de la lagrangiana clásica [5, 6].

En el caso de la dinámica de los fluidos se hará una reformulación del problema acorde con las transformaciones de Legendre a un nuevo esquema matemático en donde se usarán otras variables. En lugar de las coordenadas espaciales y el campo de velocidades se hará la formulación en términos de las coordenadas espaciales y los momentos generalizados convenientemente definidos en función de la lagrangiana específica del fluido bajo consideración [1]. Las ecuaciones dinámicas asociadas con este nuevo enfoque teórico sustituyen a las ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange de segundo orden, por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen una estructura muy sencilla y simétrica. Con este tercer esquema teórico para encarar y resolver los problemas de la dinámica de los fluidos es posible describir el flujo de un fluido en un nuevo espacio matemático conocido con el nombre de espacio de fases y, al mismo tiempo, dar una interpretación fundamental de la esencia de la fuerza hidrodinámica responsable del flujo en términos de un campo físico primitivo.

2. Las ecuaciones canónicas de Hamilton

Para obtener el conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton para la dinámica de los fluidos, se procederá de la manera siguiente. Sea $\mathcal{H} = \rho h$ la densidad hamiltoniana [1], con $\rho(\mathbf{x}, t)$ la densidad de masa y $h(\mathbf{x}, \pi, \tilde{u}, \mathbf{B}, t)$ la hamiltoniana específica tal que

$$h = \frac{\partial \lambda}{\partial v^i} v^i - \lambda, \tag{1}$$

en donde $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tilde{u}, \mathbf{B}, t)$ es la lagrangiana específica para el caso general de un fluido viscoso compresible y conductor que se mueve en presencia de un campo magnético externo. Evidentemente, $\mathbf{x}(t)$ son las coordenadas espaciales, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ el campo de velocidades, $\tilde{u}(\mathbf{x})$ el tensor de deformaciones pequeñas [1, 7], $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ la inducción magnética; con μ la permeabilidad del medio que en general se considera igual a la unidad [3] y $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ es el campo magnético externo. El parámetro de evolución es el tiempo t. Además $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es el momento generalizado cuya componente i satisface la definición siguiente:

$$\pi_i = \frac{\partial \lambda}{\partial v^i}; \tag{2}$$

y es el momento canónico conjugado (5,6) de la coordenada $x^i(t)$. Aquí, $i = 1, 2, 3$. En ese caso en (1) se tiene que

$$\lambda = \pi_i v^i - h. \tag{3}$$

La integral de acción se define como es costumbre [1], es decir,

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \ell\, dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho\lambda\, dV dt, \tag{4}$$

en donde $L = \int_R \ell\, dV$ es la lagrangiana clásica y $\ell = \rho\lambda$ la densidad lagrangiana [1]. En (4), R es alguna región del espacio euclídeo tridimensional, dV el elemento de volumen y dt la diferencial del tiempo. De acuerdo con el principio tipo Hamilton la integral de acción debe ser invariante frente a transformaciones geométricas continuas e infinitesimales; es decir,

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \delta\alpha = 0. \tag{5}$$

con $\{\alpha\}$ un conjunto de parámetros geométricos independientes del tiempo (1). El esquema teórico se completa mediante la imposición de la siguiente condición de frontera sobre las coordenadas espaciales:

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0. \tag{6}$$

En consecuencia, en (4) se obtiene lo siguiente:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho\lambda\, dV dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{R_0} \rho\lambda J\, dV_0 = 0; \tag{7}$$

en donde se usó la identidad $dV = J dV_o$, con $J(\alpha)$ el jacobiano de la transformación y dV_o el elemento de volumen en la región R_o inicial que no es función de los parámetros geométricos; por lo que es posible intercambiar las operaciones de variación e integral para obtener el siguiente resultado:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \{\lambda[\delta\rho + \rho \operatorname{div}(\delta\mathbf{x})] + \rho\delta\lambda\} dV dt = 0;$$

en donde se usó nuevamente la relación de Euler [1]. Como por otra parte [1] la variación local de la densidad de masa satisface la relación siguiente:

$$\delta\rho = -\rho \operatorname{div}(\delta\mathbf{x}), \tag{8}$$

finalmente se obtiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \rho\delta\lambda\, dV dt = 0. \tag{9}$$

El cálculo de variaciones aplicado a la relación (3) conduce directamente al siguiente resultado:

$$\rho\delta\lambda = \left(\rho v^i - \rho\frac{\partial h}{\partial \pi_i}\right)\delta\pi_i + \rho\pi_i\delta v^i - \rho\frac{\partial h}{\partial x^i}\delta x^i - \rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}, \tag{10}$$

únicamente, debido a que $\delta\mathbf{B} = 0$ porque $\delta t = 0$ [1] para toda t. Ahora, se puede demostrar que [1]

$$\delta v^i = \frac{d}{dt}(\delta x^i). \tag{11}$$

Sin embargo, de las relaciones (1) y (3) se tiene que $\partial h/\partial\pi_i = v^i$ de modo que el coeficiente de las $\delta\pi_i$ en la Ec. (10) se anula. Finalmente, la variación del tensor de deformaciones pequeñas es la siguiente [1]:

$$\delta u_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(u_{ik}\delta x^k). \tag{12}$$

Con todos estos resultados sustituidos en (10) se tiene que

$$\rho\delta\lambda = \frac{d}{dt}\left[\rho\pi_i\delta x^i\right] - \frac{d}{dt}(\rho\pi_i)\,\delta x^i - \rho\frac{\partial h}{\partial x^i}\delta x^i - \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}} u_{ik}\delta x^k\right] + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right] u_{ik}\delta x^k;$$

en donde se realizaron dos integraciones por partes. Al integrar el cuarto término del miembro derecho del resultado anterior y al utilizar el teorema de Green es claro que [1]

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_R \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}} u_{ik}\delta x^k\right] dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}} u_{ik}\delta x^k da_j dt;$$

en donde S es la superficie que limita a la región R y da es la diferencial de área. La integral de superficie es cero por lo siguiente. Sea un medio continuo infinito que ahí no está deformado y a la superficie de integración extendida al infinito; en donde el tensor $\partial h/\partial u_{ij}$ es cero, de modo que la integral se anula. Por otra parte, sea $\delta x^k = \delta^i_k \delta x^i$, con δ^i_k las componentes de la delta de Kronecker [8] de manera que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right] u_{ik}\delta x^k &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right] u_{\ell\ell}\delta x^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}u_{\ell\ell}\right]\delta x^i - \left[\left(\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right)\frac{\partial u_{\ell\ell}}{\partial x^j}\right]\delta x^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}u_{\ell\ell}\right]\delta x^i,\end{aligned}$$

únicamente. En efecto, $u_{\ell\ell}$ es un invariante en cualquier sistema de referencia, de modo que se puede suponer que no es una función explícita de las coordenadas por lo que $\partial u_{\ell\ell}/\partial \mathbf{x} = 0$. Para el caso de deformaciones pequeñas se puede demostrar que [1]

$$u_{\ell\ell} \approx \frac{1}{\rho} \qquad (13)$$

de manera que

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right] u_{ik}\delta x^k = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right]\delta x^i. \qquad (14)$$

En ese caso,

$$\begin{aligned}\rho\delta\lambda = \frac{d}{dt}[\rho\pi_i\delta x^i] - \frac{d}{dt}(\rho\pi_i)\delta x^i \\ - \left[\rho\frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right)\right]\delta x^i.\end{aligned}$$

Considérese el primer término del miembro derecho del resultado anterior e intégrese para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\frac{d}{dt}\left(\rho\pi_i\delta x^i\right)\right] dV dt = \\ \int_{t_1}^{t_2}\int_{R_0}\left[\frac{d}{dt}\left(\rho\pi_i\delta x^i\right)\right] J\, dV o dt \\ = \left[\int_R \rho\pi_i\, dV\delta x^i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\pi_i \operatorname{div}\mathbf{v}\, dV dt\delta x^i;\end{aligned}$$

en donde se usó la relación de Euler [1]. El término encerrado en el paréntesis cuadrado es cero debido a las condiciones de frontera (6), de modo que sólo sobrevive el otro término del desarrollo. En consecuencia, con todos los resultados obtenidos y sustituidos en (9), se obtiene lo que sigue:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R\left[\mathcal{D}(\rho\pi_i)+\rho\frac{\partial h}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right)\right]\delta x^i dV dt=0; \quad (15)$$

en donde $\mathcal{D}$ es el operador diferencial de Reynolds [1]. Para que la relación anterior se cumpla, y dado que las variaciones locales de las coordenadas son independientes entre sí y tanto dV como dt son incrementos arbitrarios y en consecuencia distintos de cero [1], es necesario que el integrando se anule. En otras palabras, se requiere que

$$\mathcal{D}(\rho\pi_i)+\rho\frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right) = 0 \qquad (16)$$

Por otra parte, se puede demostrar que con el auxilio de la ecuación de continuidad y de la definición del operador diferencial de Reynolds [1] se tiene que

$$\mathcal{D}(\rho\pi_i) = \rho\dot{\pi}_i; \qquad (17)$$

en donde el punto significa la derivada total con respecto al tiempo. En ese caso, en (16) se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{\pi}_i + \frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right) = 0. \qquad (18)$$

Además y para el caso presente, la forma explícita de a lagrangiana específica es [1]

$$\lambda = \frac{1}{2}v^2 - \varepsilon', \qquad (19)$$

en donde

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{H^2}{8\pi\rho} \qquad (20)$$

es la energía interna específica generalizada, con $\varepsilon(\tilde{u})$ la energía interna específica del fluido viscoso [1] y $H^2/8\pi\rho$ la energía magnética por unidad de volumen [3]. De acuerdo con (19) y (3) se tiene que

$$h = \pi_i v^i - \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon'. \qquad (21)$$

En consecuencia, se cumple que [1]

$$\frac{\partial h}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial u_{ij}} = \sigma^o_{ij}, \qquad (22)$$

en donde

$$\sigma^o_{ij} = \sigma_{ij} + m_{ij} \qquad (23)$$

son las componentes del tensor de esfuerzos generalizado con $\tilde{\sigma}(x,t)$ y $\tilde{m}(x,t)$ los correspondientes tensores de esfuerzos mecánicos y de esfuerzos magnéticos de Maxwell [1, 3]. En ese caso, en (18) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial h}{\partial x^i} = -\dot{\pi}_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^o_{ij}}{\partial x^j}. \qquad (24)$$

De (1) se tiene que

$$\frac{\partial h}{\partial \pi_i} = \dot{x}^i \qquad (25)$$

Finalmente y de acuerdo con (1) y (19) es claro que $h + \lambda = 2t$, con $t = 1/2v^2$ la energía cinética específica. En consecuencia $h + \lambda = 2(e - \varepsilon')$. Aquí, e es la energía total por unidad de masa y es una constante. Además, $\varepsilon'(\tilde{u}, \mathbf{B}, s)$ es la energía interna específica [1], que a su vez es la energía potencial específica del sistema y claramente, no depende explícitamente del tiempo de modo que se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{26}$$

Las relaciones (24) y (25) son las ecuaciones canónicas de Hamilton que en el espacio de fases describen el estado de movimiento de un fluido viscoso, compresible y conductor que fluye en presencia de un campo magnético externo. Este caso corresponde al problema dinámico de la magnetohidrodinámica (MHD). Si el campo magnético externo es cero, el análisis anterior se reduce al caso de un simple fluido viscoso y compresible newtoniano, de modo que en (22) el tensor que ahí aparecería es el de esfuerzos mecánicos. Se puede probar que (24) y (25) preservan su forma para tal sistema mecánico. Si el medio continuo que se estudia es un fluido perfecto, el segundo término del miembro derecho de (24) se transforma en el gradiente de la presión hidrostática por el recíproco de la densidad de masa y con signo menos. Por supuesto, las Ecs. (24) y (25) mantienen su forma también para ese caso. En consecuencia, el conjunto de relaciones representado por (24) y (25) son las ecuaciones canónicas de Hamilton para la MHD y la dinámica de los fluidos clásica, en el espacio de fases y en su forma inhomogénea.

3. La ecuación de balance de energía

La ecuación de balance de energía para cualquier fluido se puede obtener a partir del conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton del párrafo anterior siguiendo la metodología que se utiliza en el esquema de la mecánica analítica [5, 6]. En efecto, considérese la hamiltoniana específica del caso general; esto es, el de la MHD. Su derivada total con respecto al tiempo es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial h}{\partial \pi_i}\dot{\pi}_i + \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\frac{du_{ij}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial B_i}\frac{dB_i}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{27}$$

Si ahora se utiliza el conjunto de las ecuaciones canónicas de Hamilton, se tiene que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\dot{x}^i}{\rho}\frac{\partial \sigma^o_{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\frac{du_{ij}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial B_i}\frac{dB_i}{dt} - \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{28}$$

Por otra parte, se puede demostrar que

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^j}(u_{i\ell}v^\ell);$$

en cuyo caso,

$$\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\frac{\partial u_{ij}}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}v^i\right] - \frac{v^i}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right); \tag{29}$$

en donde, y para alcanzar el resultado previo, se realizaron varias integraciones por partes. Por consiguiente y dado que la densidad de masa no depende de la inducción magnética, en (28) se obtiene el siguiente resultado:

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial h}{\partial u_{ij}}v^i\right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{dt} - \rho\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{30}$$

Ahora [1]

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \ell}{\partial v^i}v^i - \ell.$$

de modo que [1]

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{H}}{4\pi}$$

Por otra parte

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

únicamente [1], porque el otro término del desarrollo es cero. En efecto, $\mathbf{v}$ y grad $\mathbf{B}$ son perpendiculares entre sí, de modo que su producto escalar es cero. Con los resultados anteriores se puede demostrar que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S},$$

en donde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{31}$$

es el vector de Pointing [1, 3]. De acuerdo con los postulados más fundamentales de la física teórica, si la lagrangiana específica del sistema no es una función explícita del tiempo de modo que $\partial\lambda/\partial t = 0$, en (30) se obtiene finalmente que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[v^i\left(\mathcal{H}\delta_{ij} - \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\right) + S_j\right] = 0, \tag{32}$$

en donde se han hecho dos integraciones por partes y se ha utilizado la ecuación de continuidad [1]. La relación anterior es la ecuación de balance de energía de la MHD. Nuevamente, si el campo magnético externo es cero, el vector de Pointing se anula y el término $\partial h/\partial u_{ij}$ es igual al tensor de esfuerzos mecánicos del fluido viscoso newtoniano, de modo que la relación (32) se reduce a la correspondiente ecuación de balance de energía para ese caso. Finalmente, si la viscosidad del medio continuo y los procesos de conducción térmica son irrelevantes, el término $\partial h/\partial u_{ij}$ tratado convenientemente [1], se reduce a la presión hidrostática por la delta de Kronecker y con signo menos; y evidentemente la relación (32) se transforma en la respectiva ecuación de balance de energía del fluido perfecto. En consecuencia y como es fácil advertir del análisis anterior, las diversas formas de la ecuación de balance de energía para los casos citados, son equivalentes al teorema de la energía de la mecánica teórica [6]. Surge en la teoría como resultado del hecho que la lagrangiana específica para cualquier fluido no es una función explícita del tiempo. Se puede afirmar que con el auxilio del cálculo de variaciones y del principio tipo Hamilton, la dinámica de los fluidos se incorpora en forma por demás natural al esquema de Hamilton [5, 6].

4. El campo de la entalpía específica

Con el objeto de hacer homogéneo el conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton del segundo párrafo, es conveniente definir un campo físico en términos de la hamiltoniana y de la energía interna específicas respectivamente del medio continuo de interés. Entonces y para el caso general de la MHD, sea

$$w' = h + \int d\varepsilon' + \mathcal{E}_o' \tag{33}$$

el campo de la entalpía específica, con ε' una función termodinámica que depende del tensor de deformaciones pequeñas, del campo magnético externo y de la entropía específica [1]. $\mathcal{E}_o'$ es alguna función arbitraria que depende del estado termodinámico en que se encuentre inicialmente el sistema y tiene unidades de energía por unidad de masa. Se introduce con el objeto que la construcción del campo w' se realice a partir de un cierto estado termodinámico de referencia. Por consiguiente, se cumple la relación siguiente:

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Ahora [1],

$$d\varepsilon' = \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial s}\right) ds + \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial u_{ij}}\right) du_{ij} + \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial B_i}\right) dB_i.$$

Se puede demostrar que [1]

$$du_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j}(u_{ik}dx^k),$$

de manera que

$$d\varepsilon' = Tds + \frac{\partial}{\partial x^j}(\sigma_{ij}^o u_{ik}dx^k) - \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j} u_{ik}dx^k + d\left(\frac{H^2}{8\pi\rho}\right);$$

en donde se realizó una integración por partes y se consideraron las definiciones siguientes [1]:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial s}\right)_{u_{ij},B_j} = T,$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial u_{ij}}\right)_{s,B_j} = \sigma_{ij}^o,$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial B_i}\right)_{s,u_{ij}} = \frac{H_i}{4\pi\rho}.$$

Además, es claro que

$$Tds = d\left[Ts - \int \frac{dp}{\rho}\right];$$

en donde se hizo una integración por partes y se utilizó la relación de Gibbs-Duhem [1]. Por otra parte, se puede demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\sigma_{ij}^o u_{ik}dx^k) = d\left[-\frac{x^i}{\rho_o}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j}\right],$$

en donde se realizó una integración por partes, se consideró que $x^k = \delta_i^k x^i$ y se utilizó el hecho que

$$u_{\ell\ell} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o} \approx -\frac{1}{\rho_o}.$$

En ese caso,

$$d\varepsilon' = d\left[Ts - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{H^2}{8\pi\rho} - \frac{x^i}{\rho_o}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j}\right] - \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j} u_{ik}dx^k.$$

Es fácil demostrar que

$$\begin{aligned} -\frac{x^i}{\rho_o}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j} - \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j} u_{ik}x^k &= -\frac{x^i}{\rho_o}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j}(1 + \rho_o u_{\ell\ell}) \\ &= -\frac{x^i}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el campo de la entalpía específica tiene la siguiente forma explícita:

$$w' = h - \frac{x^i}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x^j}, \tag{34}$$

únicamente, debido a que por definición

$$\mathcal{E}_o' = -\left[\frac{H^2}{8\pi\rho} + \int Tds\right]; \tag{35}$$

en donde se realizó una integración por partes después de que se usó nuevamente la relación de Gibb-Duhem. Para el caso del fluido viscoso y en ausencia del campo magnético externo, es evidente que

$$\mathcal{E}_o = -\int Tds; \tag{36}$$

en tanto que para el fluido perfecto y dado que para ese caso la entropía específica es una constante

$$\mathcal{E}_o^o = 0. \tag{37}$$

De acuerdo con la relación (34) se puede demostrar por cálculo directo que

$$\frac{\partial w'}{\partial x^k} = -\dot{\pi}_k$$

y

$$\frac{\partial w'}{\partial \pi_k} = \dot{x}^k; \tag{38}$$

además de la condición siguiente:

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}. \tag{39}$$

Las relaciones (38) son la forma homogénea de las ecuaciones canónicas de Hamilton para la MHD. Si el campo magnético externo es cero, el caso que se estudia es el del flujo de un fluido viscoso para el que se cumple que $d\varepsilon' =$

$d\varepsilon$, de modo que la correspondiente hamiltoniana específica no contiene al campo magnético externo y es de la forma $h(\mathbf{x}, \pi, \tilde{u}, t)$ únicamente. En consecuencia, en vez de (34) y de acuerdo con la definición [1]

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ij}}\right)_s = \sigma_{ij},$$

se tiene que

$$w = h - \frac{x'}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j}. \tag{40}$$

Es fácil comprobar que la aplicación del cálculo de variaciones y el principio tipo Hamilton al caso del fluido viscoso newtoniano tiene como consecuencia que

$$\frac{\partial h}{\partial x^i} = -\dot{\pi}_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j}, \tag{41}$$

de modo que el conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton homogeneizadas para ese caso, vuelve a ser de la misma forma que la que tienen las relaciones (38).

Finalmente, si el sistema continuo que se estudia es un fluido perfecto, el cálculo de variaciones y el principio de acción extremal tipo Hamilton conducen directamente al resultado siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial x^i} = -\dot{\pi}_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{42}$$

en donde $p(\mathbf{x}, t)$ es la presión hidrostática [1]. Para ese caso, la relación (34) toma la forma siguiente:

$$w = h + \frac{x^i}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}. \tag{43}$$

Evidentemente, se seguirá preservando la forma del conjunto de ecuaciones canónicas (38) para este último caso. De acuerdo con el análisis anterior, las mencionadas relaciones representan en el espacio de fases al conjunto completo de las ecuaciones canónicas de Hamilton en su forma homogénea para la dinámica de los fluidos. Así, en ese espacio matemático [5, 6] es posible definir un campo físico que transmite al sistema la información dinámica que contiene el espacio de fases; de tal suerte que ese campo resulta ser el responsable del proceso de flujo. El campo definido es el de la entalpía especifica o función de calor, que al actuar sobre el medio continuo bajo estudio, determina su estado dinámico. En realidad, en el espacio de fases de un medio continuo cualquiera, es posible definir en forma matemática ciertas regiones que tienen la propiedad de contener toda la información dinámica. Esas regiones son aquellas para las cuales la integral de acción es invariante. Así, cualquier fluido que se encuentre en una de esas regiones o superficies dinámicas, recibirá información de ella a través del campo que le indicará hacia dónde y de qué manera debe moverse en cada instante. El sistema continuo acata las instrucciones recibidas y se desplaza o fluye hasta alcanzar otra superficie hamiltoniana que le transmitirá a través del campo nueva información dinámica. El espacio de fases ya no se comporta como un simple escenario donde ocurren los acontecimientos físicos, sino que más bien es el receptáculo de la información dinámica que al momento transmite vía el campo al medio continuo; y éste obedientemente la transforma enseguida en el proceso de flujo. Es evidente que ese nuevo espacio ya no coincide con el espacio físico. Ahora se cuenta con un escenario más rico en cualidades. Un medio continuo inmerso en tal escenario, siente la necesidad de moverse urgido por la información dinámica que le impone cada una de las superficies hamiltonianas por las que transita. Ese proceso de flujo se realiza de modo que la energía total del sistema siempre está balanceada, como es fácil ver de la condición (39). Por otra parte, el espacio de fases adquiere la información dinámica de las fuentes del campo, las que se manifiestan en la forma de la divergencia de un tensor de rango dos en la construcción que se propuso en el último párrafo.

5. Conclusiones

Con el auxilio de las transformaciones de Legendre y dentro del esquema teórico del principio de acción extremal tipo Hamilton, fue posible obtener para la dinámica de los fluidos el conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton en su forma no homogénea en términos de la hamiltoniana específica del sistema continuo bajo estudio. Se demostró además que con su auxilio y siguiendo la metodología del esquema teórico de la mecánica de partículas, las diversas formas de la ecuación de balance de energía para distintos casos de flujos de fluidos es equivalente al teorema de la energía de la mecánica teórica [5, 6]. Para hacer homogéneo el conjunto de ecuaciones canónicas de Hamilton se construyó un campo físico en el espacio de fases, que es el campo de la entalpía específica. Se puede afirmar que el espacio de fases posee un campo cuyas fuentes no sólo le proporcionan la información dinámica, sino que también al actuar sobre el medio continuo determina la naturaleza del flujo; de manera que en el ámbito de la dinámica de los fluidos la naturaleza de las interacciones se puede visualizar en términos de un campo físico primario que es el campo de la entalpía específica. Su intervención como agente intermediario entre el medio continuo y las regiones hamiltonianas del espacio de fases, impulsa a considerarlo como la esencia de la fuerza tanto en hidrodinámica como en el ámbito de la MHD.

Apéndice

El teorema de la energía

Se puede demostrar que en la dinámica de los fluidos, la ecuación de balance de energía es equivalente al teorema de la energía de la mecánica de partículas. Es una consecuencia de la invariancia de la acción ante transformaciones temporales continuas e infinitesimales. Dado que por definición [1]

$\ell = \rho\lambda$ es fácil ver que

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R (\delta^+\ell - \frac{d\ell}{dt}\delta^+ t) dV dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\rho\left(\delta^+\lambda - \frac{d\lambda}{dt}\delta^+ t\right)\right] dV dt.$$

En la relación (1) se tiene que de acuerdo con (2)

$$h = \pi_i v^i - \lambda,$$

de modo que

$$\delta^+\lambda - \frac{d\lambda}{dt}\delta^+ t = \frac{dh}{dt}\delta^+ t - \delta^+ h;$$

y la invariancia de la acción frente a transformaciones temporales [1] se puede escribir como sigue:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\rho\left(\delta^+ h - \frac{dh}{dt}\delta^+ t\right)\right] dV dt = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

En el caso general de la MHD, $h = h(\mathbf{x}, \pi, \tilde{u}, \mathbf{B}, t)$ de manera que

$$\delta^+ h = \left[\frac{\partial h}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial h}{\partial \pi_i}\dot{\pi}_i + \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\frac{du_{ij}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]\delta^+ t.$$

Si se utilizan las ecuaciones canónicas (24) y (25) es fácil ver que

$$\delta^+ h = \left[\frac{\dot{x}^i}{\rho}\frac{\partial \sigma^o_{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial h}{\partial u_{ij}}\frac{du_{ij}}{dt} + \frac{\partial h}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]\delta^+ t.$$

De acuerdo con el resultado (29) y dado que

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{S},$$

con $\mathbf{S}$ el vector de Pointing dado en (31), es claro que

$$\rho\delta^+ h - \rho\frac{dh}{dt}\delta^+ t = -\left[\frac{\partial}{\partial x^j}(S_j - \dot{x}^i\sigma^o_{ij}) + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \rho + \frac{dh}{dt}\right]\delta^+ t.$$

Con este resultado sustituido en (A.1) se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_R \left[\frac{\partial}{\partial x^j}(S_j - \dot{x}^i\sigma^o_{ij}) + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \rho\frac{dh}{dt}\right]\delta^+ t\, dV\, dt = 0.$$

resultado que sólo se satisface si

$$\rho\frac{dh}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^j}(S_j - \dot{x}^i\sigma^o_{ij}) + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \qquad \text{(A.2)}$$

Ahora,

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{H}\dot{\mathbf{x}}),$$

en donde $\mathcal{H}$ es la densidad hamiltoniana, se utilizó la ecuación de continuidad [1] y se realizó una integración por partes. En consecuencia, en (A.2) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}[\dot{x}^i(\mathcal{H}\delta_{ij} - \sigma^o_{ij}) + S_j] + \rho\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0.$$

En la mecánica teórica se afirma que la uniformidad del tiempo implica que la lagrangiana específica y, de acuerdo con la condición (26), también la hamiltoniana específica, no sean funciones explícitas del tiempo, de modo que se cumple que $\partial\lambda/\partial t = -\partial h/\partial t = 0$. La condición anterior tiene como consecuencia la ecuación de balance de energía de la MHD:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}[\dot{x}^i(\mathcal{H}\delta_{ij} - \sigma^o_{ij}) + S_j] = 0.$$

El cálculo realizado también es válido para los casos del fluido viscoso y para el fluido perfecto, de modo que vale para la dinámica de los fluidos.

1. A. Fierros Palacios, *El Principio tipo Hamilton en la Dinámica de los Fluidos*, primera y segunda ediciones, (McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A, de C.V., México, New York, London, Madrid, 1997).
2. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Co., London, Paris, Frankfurt, 1960).
3. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamic of Continuous Media*, (Addison-Wesley Publishing Co., Oxford, London, New York, Paris, 1960).
4. J.P. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, London, 1962).
5. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley Publishing Co., London, England, 1959).
6. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4$^{\text{th}}$ edition (University of Toronto press, Toronto, 1970).
7. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, (Addison-Wesley Publishing Co., London, Paris, Frankfurt, 1959).
8. R. Aris, *Vector, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, (Prentice Hall, Inc., Englewood Cliff, N.J., 1966).