

# Sobre los efectos del tamaño del sistema en convección de onda larga producida por tensión superficial

R. Becerril

*Instituto de Física y Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo  
Apartado postal 2-82, 58040 Morelia, Mich., Mexico*

Recibido el 2 de marzo de 2000; aceptado el 30 de mayo de 2000

Mediante cálculos numéricos se muestra que los efectos que tienen las paredes laterales sobre el surgimiento de la inestabilidad deformacional de onda larga que causa la ruptura de la superficie de una capa delgada de fluido no se deben a la pequeñez del tamaño del sistema.

*Descriptores:* Métodos computacionales en dinámica de fluidos; inestabilidad creada por tensión superficial

Using numerical calculations, it is shown that the side walls effects on the onset of long-wavelength deformational instability that leads to the rupture of thin liquid layers are not effects of small system size.

*Keywords:* Computational methods in fluid dynamics; surface-tension-driven instability

PACS: 47.11.+j; 47.20.Dr

## 1. Introducción

La convección producida por tensión superficial en capas delgadas de fluidos que se calientan desde la base del contenedor presenta inestabilidades deformacionales de onda larga [1–3]. Este tipo de inestabilidad surge de fluctuaciones en la altura de la interfase líquido-gas. Dichas fluctuaciones inducen variaciones de temperatura en la superficie libre del fluido, las cuales generan gradientes de tensión superficial que amplifican la fluctuación. Si el gradiente vertical de temperatura en la capa de fluido es suficientemente grande, entonces la gravedad no puede estabilizar la deformación de la superficie y ésta se rompe. Este tipo de inestabilidad se presenta en capas de fluido muy delgadas ( $\sim 0.015$  cm) o en condiciones de microgravedad.

La discrepancia que existe entre los resultados teóricos del análisis de inestabilidad lineal que supone una superficie

inicial plana y condiciones de frontera periódicas y resultados experimentales sobre el surgimiento de la inestabilidad de ruptura [3], motivó el análisis de los efectos que las paredes del contenedor y otros aspectos que incluía el protocolo experimental, tenían sobre el surgimiento de esta inestabilidad. Como resultado se obtuvo una curva de estabilidad lineal que muestra una mejor concordancia con los datos experimentales [4]. Sin embargo, la pregunta natural que surge sobre este tipo de estudios es si dichos efectos se eliminarían a medida que se utilizara un contenedor más grande. En otras palabras, se hace necesario investigar si los efectos de las paredes laterales son o no efectos de la pequeñez del sistema experimental. Este es el objetivo del presente trabajo.

## 2. Ecuación de evolución

La ecuación de evolución de la altura de la interfase líquido-gas que utilizamos es [3]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{3D(1+F)h^2}{2(1+F-Fh)^2} \frac{\partial h}{\partial x} - h^3 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^3}{B\pi^2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

donde  $x \in [-1, 1]$ . El número dinámico inverso de Bond, el estático de Bond y el de dos capas de Biot, están definidos, respectivamente, como

$$D \equiv \frac{\sigma_T \Delta T}{\rho g d^2}, \quad B \equiv \frac{\rho g \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2}{\sigma}, \quad F \equiv \frac{\left( 1 - \frac{k_g}{k} \right)}{\left( \frac{d_g}{d} + \frac{k_g}{k} \right)}, \quad (2)$$

donde  $d$  ( $d_g$ ) es la profundidad media del líquido (gas),  $k$  ( $k_g$ ) es la difusividad térmica del fluido (gas),  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $L$  es la longitud del contenedor de fluido,  $\sigma$  es la tensión superficial,  $\rho$  es la densidad del líquido, y  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura media a través de la capa de fluido.  $D(\propto \Delta T)$  es el parámetro de control experimental.

$B$  es una medida de la intensidad relativa entre la gravedad y la tensión superficial.  $F$  describe el transporte de calor en la interfase.

## 3. Condiciones de frontera

El análisis de estabilidad lineal de la Ec. (1) que supone periodicidad en la dirección horizontal y una superficie inicial plana, nos dice que el sistema es linealmente inestable para  $D(1+F) > 0.703$ , independientemente del valor de  $d$  y con el valor experimental para el número estático de Bond  $B = 18$ . Este valor de 0.703 concuerda con los datos expe-

rimentales existentes para  $d > \sim 0.015$  cm; no obstante, para capas más delgadas existe una discrepancia significativa entre los datos experimentales y la predicción teórica. La altura de las paredes del contenedor tenía el valor fijo de 0.02 cms. Experimentalmente, para obtener diferentes valores de  $d$ , el contenedor se sobre-llenaba de fluido (obteniendo de este modo  $d > 0.02$  cms) o se ponía menos cantidad de fluido (obteniendo de este modo  $d < 0.02$  cms). Así que la superficie inicial no es plana, aun en ausencia de gradientes de temperatura. En ambos casos de bajo ó sobre llenado, el fluido mantenía la misma altura en las paredes laterales [3]. Estos aspectos del experimento fueron incorporados en la Ref. 4 introduciendo cuatro condiciones de frontera adecuadas. El hecho de que la altura del fluido permanecía constante en las paredes laterales dio las dos primeras condiciones:  $h(x = \pm 1) = h_0$ , donde  $h_0$  es la altura adimensional de las paredes laterales. La conservación del líquido proveyó las dos condiciones restantes:  $J(x = \pm 1, t) = 0$  [4]. Así que para determinar el valor de  $D(1 + F)$  para el cual el sistema es inestable, se resolvió la Ec. (1) con estas condiciones de frontera y una curva inicial que satisficiera la condición  $J(x, t = 0) = 0$ . Se utilizó un método pseudo-espectral de tau-Chebyshev [5]. Para evitar "aliasing" se usó la regla de 2/5 para las no linealidades de cuarto orden. Es decir, para  $N$  puntos de la red, se utilizaron solo los  $2N/5$  modos espectrales inferiores. Para la evolución temporal, se empleó el código Cvode [6]. La curva de estabilidad lineal resultante de ese análisis muestra la misma dependencia en  $d$  que los datos experimentales, y los aproxima mejor que el análisis que asumía periodicidad y una curva inicial plana.

#### 4. Resultados numéricos

Si estos efectos de las paredes laterales sobre el surgimiento de la inestabilidad de ruptura se debieran a la pequeñez del sistema, entonces al aumentar el tamaño del mismo (incrementando el valor de  $L$ ) dichos efectos de las paredes laterales tenderían a desaparecer. Como el número estático de Bond  $B \propto L^2$ , realizamos un análisis de estabilidad lineal utilizando el mismo código que el usado en la Ref. 4 con las condiciones de frontera arriba mencionadas, pero para diferentes valores de  $B$ . Como todas las longitudes fueron escaladas por  $d$ , y como 0.02 cm era la altura de las paredes laterales del contenedor,  $h_0 = 0.02$  cm/ $d$ . De este modo,  $h_0 < 1$  corresponde a un sobre llenado del contenedor, y  $h_0 > 1$  corresponde al caso en que se pone menor cantidad de fluido. Este último caso es donde se presentaba la mayor discrepancia entre la predicción de estabilidad lineal y el experimento. La Fig. 1 muestra los resultados de los cálculos numéricos de

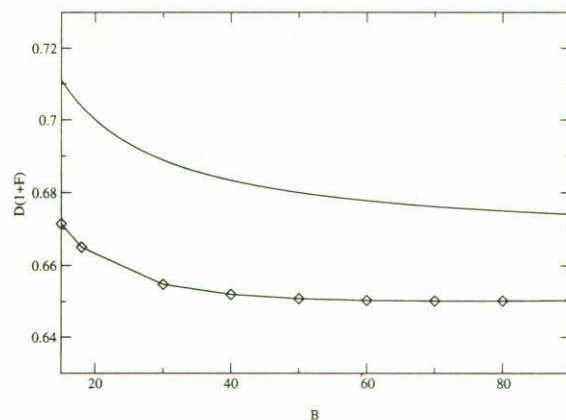


FIGURA 1. Cálculos numéricos del surgimiento de la inestabilidad de ruptura para  $F = 0.3$ ,  $h_0 = 1.4$  ( $\diamond$ ). La línea sólida superior representa la predicción lineal que asume condiciones de frontera periódicas y una superficie inicialmente plana. La superficie de interfase líquido-gas es linealmente estable abajo de la curva de estabilidad, e inestable arriba de la curva. El número de Bond  $B \propto L^2$  tiene poco efecto en los resultados, mostrando que los efectos de las paredes laterales no son efectos de la pequeñez del sistema.

la curva de estabilidad como función de  $B$ , con  $h_0 = 1.4$  y  $F = 0.3$ . Este valor de  $F$  es un valor típico para la región donde hay más discrepancia entre los datos experimentales y la teoría de estabilidad lineal que supone periodicidad. Se observa que las variaciones del surgimiento de la inestabilidad deformacional con el número de Bond no son importantes.

#### 5. Conclusiones

Como el número de Bond es proporcional al cuadrado de la distancia entre las las paredes laterales del contenedor, hemos podido investigar la dependencia del surgimiento de la inestabilidad deformacional de onda larga en esta distancia  $L$ . Nuestros cálculos numéricos muestran que el número de Bond tiene pocos efectos sobre el surgimiento de la inestabilidad deformacional. Este resultado implica que los efectos de las paredes laterales del contenedor no son un producto de la pequeñez del sistema.

#### Agradecimientos

Deseo agradecer a J.B. Swift y a S.J. Van Hook por valiosas discusiones sobre este trabajo. Agradezco el apoyo de la Coordinación de Investigación Científica de la Universidad Michoacana.

1. L.E. Scriven and C.V. Sternling, *J. Fluid Mech.* **19** (1964) 321.
2. K.A. Smith, *J. Fluid Mech.* **24** (1966) 401.
3. S.J. Van Hook et al., *J. Fluid Mech.* **345** (1997) 45.
4. R. Becerril, S.J. Van Hook, and J.B. Swift, *Physics of Fluids* **10** (1998) 3230.

5. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, (Springer-Verlag, New York, 1987), Chap. 3.
6. S.D. Cohen and A.C. Hindmarsh, *Comput. Phys.* **10** (1996) 138.