

Estudio en frecuencia de sistemas caóticos controlados

M. Luna-Rivera y R. Femat

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Apartado postal 3-90, 78231 San Luis Potosí, S.L.P., Mexico

e-mail: rfemat@uaslp.mx

Recibido el 26 de julio de 1999; aceptado el 31 de marzo de 2000

Se presenta un estudio efectuado en el dominio de la frecuencia sobre el comportamiento de sistemas caóticos al ser aplicada una retroalimentación estabilizante (sistemas controlados). Dicho estudio se centra en los fenómenos de estabilización y supresión de caos. Para desarrollar el trabajo se implementó un control con acción proporcional-integral (PI). Simulaciones numéricas muestran los resultados obtenidos al realizar el estudio sobre diferentes sistemas de segundo y tercer orden bajo comportamiento caótico. Además, se discute la posibilidad de caracterizar el acoplamiento entre las diferentes frecuencias fundamentales de un sistema caótico.

Descriptores: Control de caos; análisis en frecuencia

A frequency domain study of chaotic systems, in presence of stabilizing feedback, is presented. The study is focused in the phenomena of stabilization and chaos suppression. For developing this work, a controller with a proportional action (PI) was used. Numerical simulations are provided to show the results obtained over systems of second and third order. Besides, a discussion is formulated about the possibility of characterizing the coupling between the different fundamental frequencies in the spectrum of the chaotic system.

Keywords: Chaos control; frequency domain analysis

PACS: 05.54.+b; 87.10.+e

1. Introducción

En los últimos años se ha dado un gran interés hacia el estudio de sistemas caóticos; introduciendo nuevos métodos de control o estableciendo nuevos criterios para su aplicación y comprensión, etc. Esto se debe en gran medida al hecho que representa la presencia de un comportamiento caótico, el cual es comúnmente detectado en una amplia variedad de sistemas; tales como en sistemas mecánicos, biológicos, químicos y físicos. Actualmente existen un gran número de trabajos reportados sobre la caracterización de sistemas caóticos. Pero existen pocos o es casi desapercibido la publicación de aquellos que dirigen su estudio o aplicación con un enfoque en el dominio de la frecuencia.

Los beneficios obtenidos con esta clase de estudio son, por ejemplo, encontrar y diseñar nuevos métodos y criterios que sirvan para obtener más información acerca del sistema. También para caracterizar al sistema con el fin de interpretar e identificar el comportamiento de sistemas físicos y biológicos. Una idea semejante es el estudio que realiza la espectroscopía de resonancia; la cual es utilizada para identificar sistemas químicos [1].

La clase de sistemas no lineales considerados para este trabajo se estudian bajo el apoyo de la teoría de control, la cual permite la caracterización de dichos sistemas. Generalmente hablando, este trabajo puede ser clasificado dentro del campo de investigación de la teoría del sinergismo, la cual está basada en principios de auto-organización. Esto es, el sinergismo se fundamenta en conceptos tales como estabilidad, inestabilidad, parámetros de control, parámetros de orden,

principio esclavizante, etc. En otras palabras, la estrategia de investigación del sinergismo es estudiar el comportamiento de un sistema cuando varían los parámetros de control [2].

Una de las características importantes en una señal caótica es que tiene un espectro de frecuencia continuo; esto significa que es muy grande el ancho de banda^(a) de una señal caótica. Con este hecho, el espectro en frecuencia de una señal, en principio, puede ser una medida de gran ayuda para distinguir si una señal tiene comportamiento caótico. Sin embargo, debe quedar claro que el espectro en frecuencia no es una condición suficiente para afirmar que cierta señal contiene caos [3].

Por otro lado, la importancia de estudiar la transición que ocurre de la dinámica periódica a la caótica en diversos sistemas físicos y biológicos, mediante la variación paramétrica, ha ocasionado el desarrollo de diversas herramientas para su análisis. Para esto, existen principalmente dos conceptos relacionados: a) La dinámica de un sistema no lineal puede ser aproximada por la ecuación diferencial de primer orden $\dot{x} = f(x)$, donde el mapa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por una función que depende de uno o más parámetros, en los cuales para ciertos valores es posible inducir un comportamiento caótico en el sistema; b) las bifurcaciones (cambios cualitativos de la dinámica del sistema) son observadas sobre cambios paramétricos ocurridos en el sistema.

Así, en un sistema no lineal se puede generar el comportamiento caótico de dos maneras: (i) variando los valores de los parámetros definidos por el sistema mismo, (ii) por medio de una fuerza exógena que perturba o excita al sistema. Los valores de parámetros que producen el cambio en la

dinámica del sistema, provocan bifurcación en el comportamiento del sistema. Por lo que se han desarrollado métodos que ayudan a identificar estos valores, como son, por ejemplo, los mapas de bifurcación [3]. Por tal motivo estos son considerados como una caracterización fundamental de un sistema caótico. Con este enfoque se presenta, en la siguiente sección, una herramienta adicional que surge como *otra* opción para la identificación de la bifurcación. La herramienta consiste en presentar en el dominio de la frecuencia una gráfica tridimensional que muestre el comportamiento de los sistemas dinámicos. La característica de esta gráfica es tener como uno de sus ejes alguno de los parámetros de sistema, de esta forma se pretenden identificar los cambios ocurridos en el comportamiento del sistema mediante las frecuencias fundamentales contenidas en el sistema dinámico. Para ilustrar esta herramienta se eligieron algunos sistemas de segundo y tercer orden (péndulo, Duffing y Lorenz). Cabe hacer mención que la finalidad de presentar tal gráfica es con la idea de complementar y no sustituir una técnica como son los mapas de bifurcación, aunque es importante aclarar los términos en los cuales cada herramienta genera la información. Para el caso de los mapas de bifurcación se realiza un análisis en estado estacionario mientras que la representación tridimensional del espectro de frecuencia representa la dinámica del sistema.

En los últimos años se han propuesto algunas estrategias para controlar caos (ver Refs. 4–8 y sus referencias), siendo el objetivo principal *el desarrollo y análisis de métodos que garanticen la supresión total de caos*. Esto es debido a que en muchas situaciones prácticas (sistemas físicos y biológicos) el comportamiento caótico es indeseable. Sin embargo, hasta el momento no existe conocimiento suficiente sobre el efecto que produce un control sobre el sistema caótico. La interacción control-sistema, en principio, se puede considerar como una clase de acoplamiento entre frecuencias fundamentales. Es decir, el control absorbe o cede energía al sistema. De esta manera el comando de control consiste en una señal que contiene las frecuencias correspondientes a aquellas que excitan las órbitas del atractor caótico. En este trabajo se trata un estudio a fondo sobre este tipo de interacción. Para ello, se utiliza un control tradicional que sirve para la manipulación del comportamiento caótico.

El controlador elegido para realizar el estudio es uno en el dominio de Laplace (llamado PI, ver Ref. 8 para mayores detalles). En Ref. 8 se demostró que este tipo de retroalimentación es capaz de llevar las trayectorias de un sistema caótico al origen. Así que se ha elegido este tipo de control, por razones de simplicidad y por el hecho de ser suficiente para ilustrar la finalidad de este trabajo. Debe puntualizarse que el interés de este trabajo no se encuentra en el tipo de control aplicado, sino en el estudio mediante el espectro en frecuencia *del efecto que tiene una retroalimentación dada sobre un sistema caótico*. Es decir, se ilustra una descripción de los fenómenos de estabilización y supresión de caos en el dominio de la frecuencia por medio de una serie de representaciones pictóricas. Luego, de acuerdo a estos resultados, se

plantea, por la cantidad de información que se presenta en detalle, la interpretación del fenómeno de estabilización de órbitas inestables mediante un “*aparente*” acoplamiento de frecuencias (resonancia de órbitas en sistemas caóticos).

Este trabajo se ha organizado de la manera siguiente. En la Sec. 2 se presenta la descripción y justificación sobre el hecho de trabajar en el dominio de la frecuencia. Además se muestra la gráfica tridimensional propuesta y se discute su importancia. En la Sec. 3 se lleva a cabo un breve repaso sobre los conceptos básicos de sistemas con retroalimentación; y en particular para el caso del controlador proporcional-integral (PI). La descripción del comando de control aplicado a los sistemas estudiados se presenta en la Sec. 4. En la Sec. 5 se muestran y discuten los resultados obtenidos; esto es, cómo por medio de la acción de control se estabiliza y suprime caos. Adicionalmente, se establece la noción de resonancia en caos a partir de la retroalimentación; *i.e.*, que la fuerza de control es utilizada para ilustrar la existencia de un acoplamiento entre ciertas frecuencias fundamentales de un sistema caótico. Por último, las observaciones y conclusiones de este trabajo se encuentran contenidas en la Sec. 6.

2. Espacio experimental en el dominio de la frecuencia

Como se mencionó en la introducción, la principal intención de este trabajo es mostrar otro enfoque sobre la manera de estudiar el comportamiento de los sistemas caóticos. Este trabajo no pretende presentar un estudio completo sobre los sistemas caóticos. En particular, se limitará a estudiar algunos sistemas controlados (sistemas a lazo cerrado). En esta sección, se analiza el experimento realizado en el dominio de la frecuencia. El objetivo definido es analizar el comportamiento de los sistemas caóticos por medio de sus espectros en frecuencia. El espectro en 2D se obtiene mediante la transformación de la transformada rápida de Fourier (TRF) correspondiente a alguno de los estados del sistema en función del tiempo [10].

Tal y como se presenta en trabajos anteriores [3, 4, 7, 10], los sistemas de interés físico o biológico típicamente presentan parámetros que aparecen definidos en sus modelos. Es decir, considérese al sistema siguiente:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^k$ y $\mu \in \mathbb{R}^k$. La Ec. (1) representa a un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen de los estados x y de los parámetros $\mu \in \mathbb{R}^k$. Entonces los puntos de equilibrio de la Ec. (1) están dados por la ecuación $f_{\mu}(x) = 0$. Conforme μ varíe, los puntos de equilibrio son descritos por mapas suaves de μ que se alejan de aquellos valores en los cuales el Jacobiano de $f_{\mu}(x)$ con respecto a x tiene un valor propio con parte real igual a cero. Las trayectorias de cada una de estas funciones representan una ramificación o bifurcación de los puntos de equilibrio de la Ec. (1). Así, algunas ramificaciones de los puntos de equilibrio pueden estar unidas y a esto se

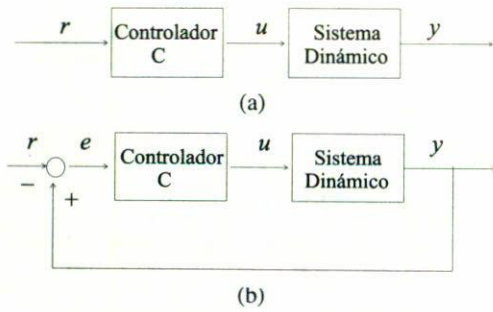


FIGURA 1. Diagrama a bloques de un sistema a (a) lazo abierto y (b) lazo cerrado

puede decir que (x_0, μ_0) es un punto de bifurcación [3]. Como se puede ver, el cálculo de los valores de bifurcación no es algo trivial.

En otro orden de ideas, el interés de este trabajo se centra sobre los sistemas a lazo cerrado (sistemas controlados), por ello es conveniente explicar la modificación que se lleva a cabo al tomar un sistema a lazo cerrado en lugar de uno a lazo abierto (ver Fig. 1). Como principal cambio se presenta la modificación a la dinámica del sistema debido a la fuerza de control aplicada (fuerza exógena). Por ejemplo, presentemos el caso sobre el sistema de Duffing, cuya dinámica a lazo abierto está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1^3 - \delta x_2 + \gamma \cos(\omega_e t), \end{aligned} \quad (2)$$

donde β, δ son parámetros propios del sistema y $\tau_e = \gamma \cos(\omega_e t)$ es la función que corresponde a la perturbación externa [3]. Para este caso, en particular, la perturbación es tomada por una señal periódica con frecuencia ω_e y amplitud γ . Por otro lado, la dinámica del sistema a lazo cerrado es modificada de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 - x_1^3 - \delta x_2 + \gamma \cos \omega_e t, \\ \dot{x}_3 &= r - y, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $y = x_1$, la acción de control está dada por $u(t) = x_c e(t) + k_c \int e(t) dt$ (controlador PI). Con k_c como la ganancia proporcional del controlador y $e(t)$ como el error de retroalimentación [$e(t) = r - y$ (r representa la referencia y y la salida)] [8]. Cabe puntualizar que la dinámica del sistema se ve modificada por la acción de retroalimentación. Una descripción detallada se presenta en la sección siguiente.

Como se puede apreciar para un sistema en particular la introducción de una fuerza de control (control PI) implica que el sistema aumente de dimensión, *i.e.*, que un sistema de segundo orden (por ejemplo, el sistema de Duffing) bajo ciertas acciones de retroalimentación (fuerza de control) se expande a un sistema de tercer orden. Asumiremos que la acción de control se toma como parte de la dinámica del sistema (*i.e.*, el sistema en lazo cerrado es $(n + 1)$ -dimensional). Esto es

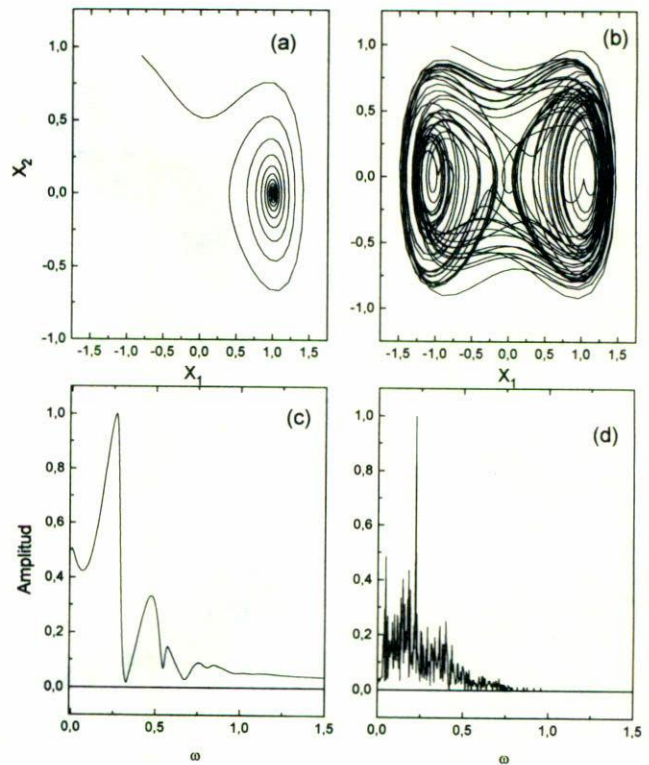


FIGURA 2. Retratos fase y espectros de frecuencia para el sistema de Duffing. (a) Retrato fase sin perturbar el sistema, (b) retrato fase con perturbación externa, (c) espectro del sistema sin perturbación y (d) espectro con perturbación. Las gráficas fueron obtenidas con los siguientes valores de constantes: $\beta = 1, \delta = 0.15, \gamma = 0.275$ y $\omega_e = 1.1$.

factible, como se mostrará mas adelante, ya que el parámetro k_c (ganancia del controlador) se presenta como un parámetro de bifurcación del sistema expandido, el cual está dado por la Ec. (3).

En general, los modelos no lineales presentan dos clases de dinámica: a) sistemas que mediante la modificación de uno o algunos de sus parámetros internos se induce un comportamiento caótico (excepto sistemas de segundo orden); y b) sistemas que por medio de una perturbación externa genera dicho comportamiento. De acuerdo al teorema de Poincaré-Bendixon [4], ningún sistema de segundo orden, sin perturbación externa, puede mostrar caos a pesar de realizar modificaciones en sus parámetros; por ejemplo, tomemos el sistema de Duffing a lazo abierto. Como se puede observar en la Fig. 2a, las trayectorias generadas por el sistema de Duffing no perturbado tiende asintóticamente a un punto de equilibrio (el sistema tiene dos puntos de equilibrio estables). Sin embargo, la adición de una perturbación externa al sistema genera un comportamiento caótico como se puede ver en la región de atracción del sistema (ver Fig. 2b). Por otro lado, el espectro en frecuencia para el sistema sin perturbación presenta sólo algunas frecuencias, pero éstas son debidas al efecto producido por las condiciones iniciales (transitorio) como se ilustra en la Fig. 2c, mientras que en el espectro del sistema

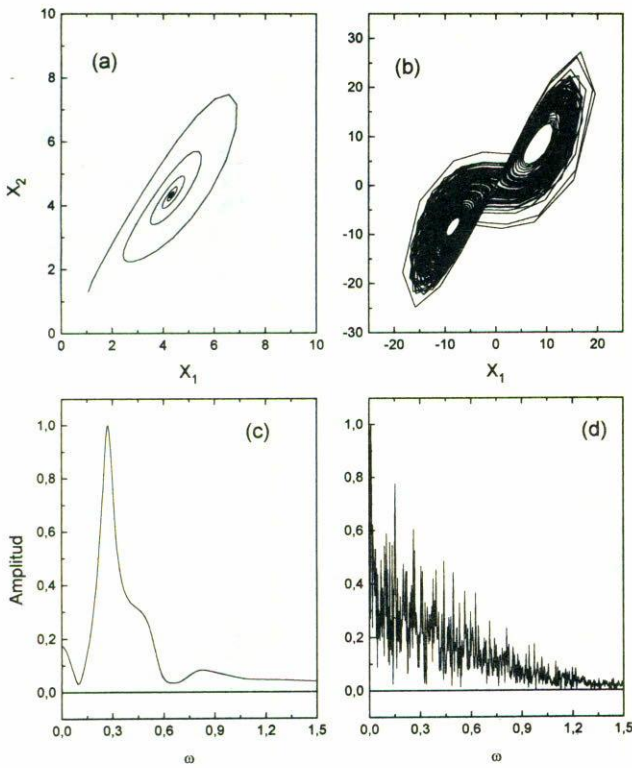


FIGURA 3. Sistema de Lorenz: (a) Retrato fase y (c) espectro de frecuencia con valores de parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 5$ y $\beta = 8/3$. (b) Retrato fase y (d) espectro de frecuencia con valores de parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$.

con perturbación se puede observar cómo se generan múltiples frecuencias (ver Fig. 2d). Además cabe mencionar que puede presentarse el caso en que el comportamiento de un sistema (sin perturbación externa) converja a un ciclo límite, sin embargo, esto sucedería únicamente bajo la condición de que los exponentes de Lyapunov del sistema sean nulos. Esto indica la presencia de una sola frecuencia en el espectro del sistema.

Por otro lado, se presentan los sistemas cuyo comportamiento caótico es inducido por las variaciones en los parámetros definidos por el sistema mismo. Un ejemplo claro sobre esta clase de sistemas lo representa el oscilador de Lorenz, el cual está definido por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2, \end{aligned} \tag{4}$$

donde σ , ρ y β corresponden a los parámetros definidos sobre el sistema. En esta clase de sistemas la variación de los parámetros puede ser muy importante, ya que para ciertos valores se presenta el comportamiento caótico. Al igual que el caso anterior se presentan los retratos fase del sistema sin comportamiento caótico (Fig. 3a) y con comportamiento caótico (Fig. 3b), incluyendo los respectivos espectros en frecuencias (Figs. 3c y 3d).

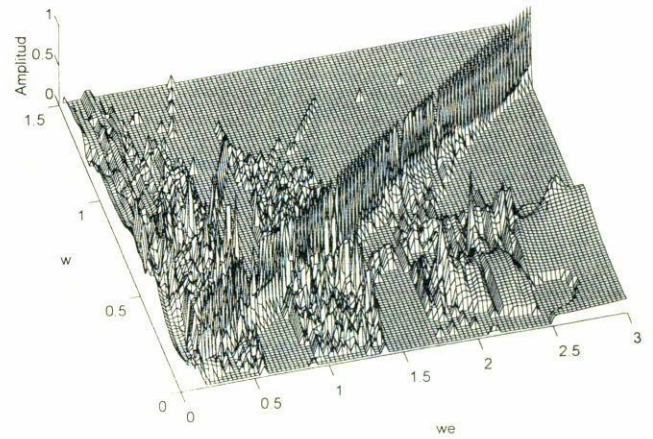


FIGURA 4. Gráfica tridimensional para la variable x_2 del sistema de Duffing a lazo abierto ($\beta = 1$, $\delta = 0.15$, $\gamma = 0.275$).

Con esto la idea es generar una representación tridimensional la cual muestra el comportamiento de un sistema mediante sus espectros en frecuencias. El objetivo de la representación es mostrar la interacción producida por la variación de alguno de los parámetros del sistema (en especial la acción de control).

Con el fin de ilustrar lo antes mencionado se muestran las siguientes gráficas tridimensionales. La Fig. 4 muestra el comportamiento del sistema de Duffing (a lazo abierto) al ser aplicada una perturbación externa, en este caso se construye la representación de A vs. (w, ω_e) , donde A es la amplitud, w frecuencia (rad) y ω_e (rad) corresponde a la frecuencia de perturbación (parámetro de variación) que es aplicada al factor de perturbación en uno de los estados del sistema, ver Ec. (2). Como se puede observar, para ciertos rangos de valores de ω_e , se produce un comportamiento irregular (*i.e.*, aparecen en el espectro múltiples frecuencias). En la Fig. 4 se observa como tal comportamiento aparece en los intervalos $0 \leq \omega_e \leq 0.6$ y $0.9 \leq \omega_e \leq 1.4$ mientras que para otros intervalos como $0.6 \leq \omega_e \leq 0.9$ y $1.14 \leq \omega_e \leq 1.75$ el comportamiento es totalmente regular. En la Fig. 5 se presenta el espectro 3-D del sistema de Lorenz que ilustra el caso del efecto producido por la acción de control sobre este sistema. Aquí, la gráfica tridimensional se obtiene de A vs. (w, k_c) , donde A y w son equivalentes al caso anterior pero, sin embargo, ahora se escoge k_c como parámetro de variación el cual caracteriza el efecto producido por la acción de control aplicada al sistema. Como se puede observar para valores de $k_c < 50$ la presencia de múltiples frecuencias es notable. Sin embargo, el incremento del valor de k_c ($k_c > 50$) ocasiona la disminución de la presencia de frecuencias fundamentales y así llegar hasta un valor alrededor de $k_c = 130$, donde únicamente aparecen 1 ó 2 frecuencias. De tal manera que uno de los valores de bifurcación en el sistema se presenta en un valor alrededor de $k_c = 50$. Una descripción detallada acerca del efecto producido por la acción de control sobre el sistema se presentará en la Sec. 5.

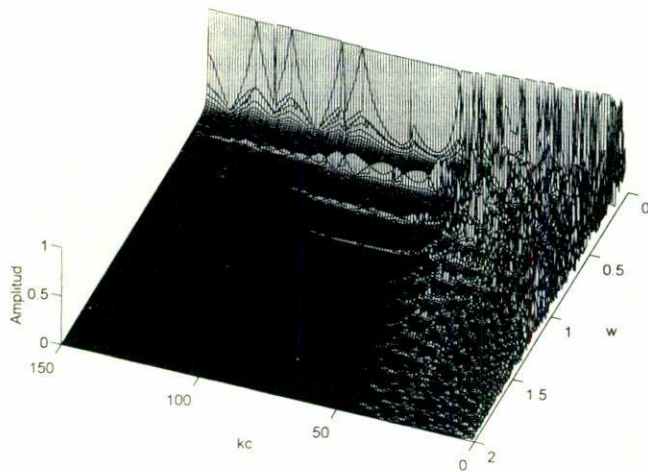


FIGURA 5. Gráfica tridimensional para la variable x_1 del sistema de Lorenz a lazo cerrado (control aplicado a x_1 y valores $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = 8/3$).

Con lo anterior, la reinterpretación del espectro de frecuencia es de gran utilidad para el análisis de los sistemas caóticos. Algunas ventajas de estas representaciones tridimensionales son: 1) la facilidad para percibir el cambio que se produce de la dinámica periódica regular a la caótica bajo la variación de alguno de sus parámetros; 2) la identificación aproximada de valores de bifurcación sin la necesidad de realizar un análisis ni estacionario ni analítico; y 3) caracterización de los efectos causados por las modificaciones realizadas en los parámetros internos del sistema o las fuerzas exógenas aplicadas al sistema en su dinámica.

Centrando la atención de las representaciones tridimensionales en los sistemas controlados (mediante retroalimentación) podemos obtener una herramienta muy importante para el análisis sobre la estructura del control. Hablando específicamente de los problemas de estabilización y supresión de caos podemos encontrar una gran herramienta de análisis en los espectros 2D obtenidos mediante TRF. Esto es debido a la capacidad de mostrar en una manera sencilla el comportamiento de un sistema caótico bajo la fuerza del control aplicada. En la Sec. 5 se muestran y establecen los fenómenos de estabilización y supresión de caos en dominio de frecuencia.

3. Sistemas retroalimentados

La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es conocer si el sistema es estable o inestable. A continuación se presentan algunos conceptos básicos relacionados con el tipo de sistemas utilizados en este trabajo.

3.1. Estabilidad y convergencia

La estabilidad en el sentido de Lyapunov y la convergencia de un sistema son dos conceptos ampliamente utilizados en la teoría de control. Para este trabajo se analiza la propiedad

de estabilidad asintótica en los sistemas dinámicos utilizados. A continuación se presenta un breve repaso sobre este concepto.

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad (5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La solución de la Ec. (5), la cual inicia en x_0 a tiempo $t_0 > 0 \in \mathbb{R}$, es denotada como $x(t; x_0, t_0)$. La estabilidad de Lyapunov es una propiedad continua de $x(t; x_0, t_0)$ con respecto a x_0 . Si el estado inicial x_0 es perturbado a \tilde{x}_0 , entonces, para estabilidad, la solución perturbada $x(t; \tilde{x}_0)$ requiere permanecer cerca a $x(t; x_0)$ para todo $t \geq 0$. Entonces se dice que un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si existe un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño tal que la solución del sistema $|x(t)| \leq \delta \forall t \geq t^* > 0$.

En particular, los sistemas dinámicos, como el dado por la Ec. (5), pueden tener puntos de equilibrio (x_e) estables o inestables; esto es, la solución $x(t; x_e) = x_e$ que satisface $f(x_e) = 0$. En principio, el carácter estable de tales soluciones puede ser demostrado. Particularmente, para el caso de supresión de caos es suficiente presentar un análisis de estabilidad local (ver Apéndice B). Dicho análisis consiste en (1) linealizar el sistema (sistema retroalimentado) en algún punto en particular mediante el jacobiano y (2) aplicar el método tradicional de estabilidad para sistemas lineales como lo es el criterio de Routh-Hurwitz. La idea es garantizar que, bajo acciones de control, la solución del sistema se estabiliza en un punto de equilibrio inestable. Así, con la ayuda de este análisis, se encuentran los valores de los parámetros del controlador que garantizan supresión de caos. De este modo se obtiene la estabilidad del sistema sobre una vecindad que contiene el punto de equilibrio x_e ; que implica sólo estados iniciales cercanos a al equilibrio, x_e . Si un punto de equilibrio es atrayente, entonces esto significa que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de estados iniciales x_0 son tales que $x(t; x_0) \rightarrow x_e \in \Omega$ cuando $t \rightarrow \infty$ para todo $x_0 \in \Omega$.

3.2. Retroalimentación pasiva

La tarea de estabilización es la más simple cuando una función de salida $y = h(x)$ puede ser encontrada tal que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (6)$$

donde u es la entrada (comando de control) y y la salida (estado medido), sea *pasivo*. Entonces por el teorema de estabilidad y pasividad [11] se tiene que la estabilidad de un sistema se alcanza si se cierra el lazo de retroalimentación de la forma $u = -y$. Sin embargo, la necesidad de una salida $y = h(x)$ tal que el sistema sea pasivo con una función positiva definida requiere que el sistema sea estable cuando $u = 0$. Para eliminar esta restricción, se toma la retroalimentación como un medio para lograr la pasividad. En lugar de ser estable,

el sistema no controlado se asume como estabilizable. Por lo tanto, se requiere encontrar una salida $y = h(x)$ y una transformación de retroalimentación

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\nu, \quad (7)$$

con $\beta(x)$ invertible, tal que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)\nu, \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (8)$$

sea pasivo. Si una transformación de retroalimentación de la forma (7) puede ser encontrada para obtener el sistema pasivo, el sistema original (6) es llamado de retroalimentación pasiva [11]. Así, la estabilidad asintótica del sistema pasivo (8) se logra, simplemente, al tomar la retroalimentación de $\nu = -ky$, $k > 0$. Por lo tanto, se garantiza que $x(t) \rightarrow x_e \in \Omega \forall t \geq t_0 > 0$.

4. Descripción del comando de control

El objetivo principal de un sistema de control es llevar la señal de salida hacia una señal de referencia deseada a pesar de: (i) desconocimiento sobre el modelo del sistema dinámico, (ii) las perturbaciones externas al sistema que tienden a generar una salida no necesariamente deseada, y (iii) variaciones paramétricas. Un diagrama esquemático de un lazo de control fue presentado en la Fig. 1b. Sin la aplicación de un acción de control, u , la salida, y , es una trayectoria natural del sistema. Por lo que el objetivo del bloque de control (C) es modificar la trayectoria natural del sistema (la cual es observada a través de la salida, y) de tal manera que y sea lo más semejante posible a la señal de referencia deseada, r . Es deseable que la diferencia entre la señal de salida, y , y la señal de referencia, r , sea lo único conocido para controlar la salida. Un aspecto interesante de estos sistemas es comprender el hecho de que un controlador absorbe (o cede) energía de acuerdo al comportamiento de la señal de error ($e = y - r$). Debe putualizarse que para el problema de control de caos donde se busca la sincronización de sistemas estrictamente diferentes, el que la salida siga a la señal de referencia no garantiza sincronización de los estados no medidos [12]. No obstante, para el caso que compete al presente artículo, la supresión de caos, la pasividad siempre se satisfice. Además, este punto de vista nos ayudará a introducirnos sobre el concepto de acoplamiento entre frecuencias el cual se discutirá en la sección final.

En los últimos años algunas estrategias de retroalimentación han sido propuestas como: el control asintótico robusto [5, 6], estrategias de esquemas lineales y no lineales adaptativos [4, 7]. Además de nuevos modelos que han surgido recientemente como el controlador proporcional con doble acción integrativa (PII^2) [8]. Muchos de estos modelos de control se utilizan en muy diversas aplicaciones [10]. No obstante la diversidad de esquemas de control existentes, se analizarán algunos de los sistemas caóticos aplicando únicamente

uno de los controladores clásicos como lo es el proporcional-integral (PI). Sin pérdida de generalidad, puede elegirse como referencia algún punto de equilibrio. En particular, los osciladores elegidos para la realización del presente trabajo tienen un punto de equilibrio en el origen. Este punto ha sido seleccionado como señal de referencia (*i.e.*, $r = 0$).

Partiendo de la función de transferencia del controlador (es decir, el modelo de éste en el dominio de Laplace), está dado por $C(s) = u(s)/e(s)$. Así que es fácil mostrar que

$$C(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right). \quad (9)$$

La estructura de este controlador incluye las siguientes partes [10]:

(i) *Acción proporcional*. La contribución de este factor es proporcional al error $e = y - r$, donde y es la salida del sistema y r es la señal de referencia. De esta manera la acción de control en función del tiempo está dada por $u = u_s + k_c e$, donde u_s es la salida del controlador cuando el $e = 0$ (comando de control en estado estacionario).

(ii) *Acción integral*. El otro factor es la contribución de un tiempo de restauración al comando de control. El tiempo de restauración es un parámetro ajustable, el cual algunas veces es llamado tiempo de repetición. Esta acción de control induce variación del comando de control de acuerdo a la magnitud del error de la salida del sistema. Cuando el problema de control consiste en la estabilización en un punto fijo, esta acción puede eliminar error en estado estacionario. Con ello, se logra llevar a la salida arbitrariamente cerca de una referencia constante.

Así, con la combinación de estos dos factores se obtiene el controlador clásico PI. Ya ha sido demostrado que el controlador anterior permite controlar en el origen a un sistema caótico [8]. La ecuación del comando de control correspondiente está dada en el dominio de la frecuencia por

$$u(s) = k_c \left[1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right] e(s), \quad (10)$$

donde la constante τ_1 representa el tiempo de restauración del comando de control [10], k_c la ganancia del controlador (parámetro de bifurcación), de tal forma que $u(s)$ y $e(s)$ están dadas como variables de desviación ($u(s) = u(s) - u_s$ y $e(s) = y(s) - r(s)$), u_s se obtiene a partir del estado estacionario deseado, k_c y τ_1 se seleccionan de tal manera que el sistema a lazo cerrado sea estable. El desarrollo para el análisis de estabilidad se presenta en el Apéndice A.

5. Simulaciones numéricas

Para presentar las simulaciones se eligen tres de los sistemas no lineales más comunes en textos y artículos de investigación como son: el péndulo, Duffing y Lorenz. Esta sección muestra el comportamiento de los sistemas a lazo cerrado, bajo la acción del controlador PI. Eligiendo la posición como salida del sistema, $y = x_1$, y la referencia como un valor

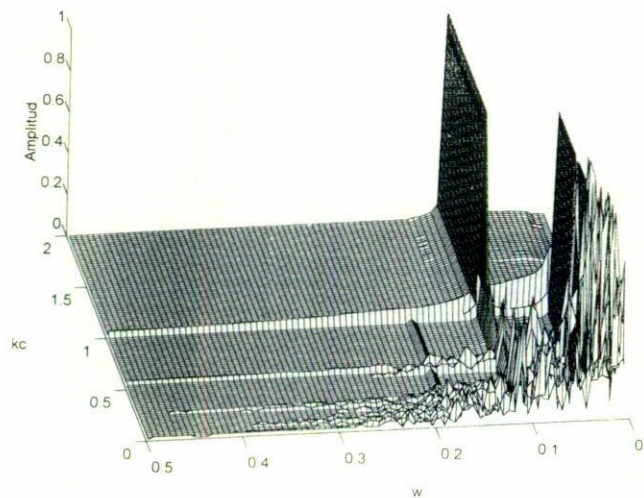


FIGURA 6. Gráfica tridimensional para la variable x_1 del sistema de Duffing a lazo cerrado (control aplicado a x_1 y valores $\beta_D = 1$, $\delta_D = 0.15$, $\gamma_D = 0.275$ y $\omega_D = 1.1$).

constante (sin pérdida de generalidad se ha considerado que $r = 0$) se realizaron simulaciones correspondientes a los sistemas seleccionados. La finalidad de estas simulaciones numéricas es la de observar el comportamiento de los sistemas a lazo cerrado para analizarlo mediante el espectro en frecuencia; así como realizar una comparación entre los es-

pectros y sus retratos fase correspondientes. Para esto se comienza realizando los experimentos siguientes.

La implementación de los sistemas de ecuaciones se realizó mediante programas en lenguaje Fortran, el cual utiliza métodos de integración estándar, como Runge-Kutta, en la obtención de las respuestas. Por otro lado, los espectros de frecuencia se obtuvieron al aplicar la transformada rápida de Fourier a las correspondientes señales en tiempo de la señal medida. Para la obtención de estos espectros se tomaron series de tiempo consistentes en 2048 y 1024 puntos; una vez eliminados los efectos de condiciones iniciales.

Para el caso del oscilador de Duffing el sistema a lazo cerrado queda en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= \beta_D x_1 - x_1^3 - \delta_D x_2 + \gamma_D \cos(\omega_D t), \end{aligned} \quad (11)$$

donde u está dada por la expresión equivalente en tiempo de la Ec. (9) (ver Apéndice A). Primero se muestra el efecto que se produce al tener como parámetro de variación a la ganancia del control (k_c), para esto se obtiene la gráfica en 3D del sistema (ver Fig. 6). Con el conocimiento previo del comportamiento del sistema, se ilustran en la Fig. 7 una serie de gráficas que muestran los espectros de frecuencia para x_1 (variable medida) y u (acción de control) del sistema retroa-

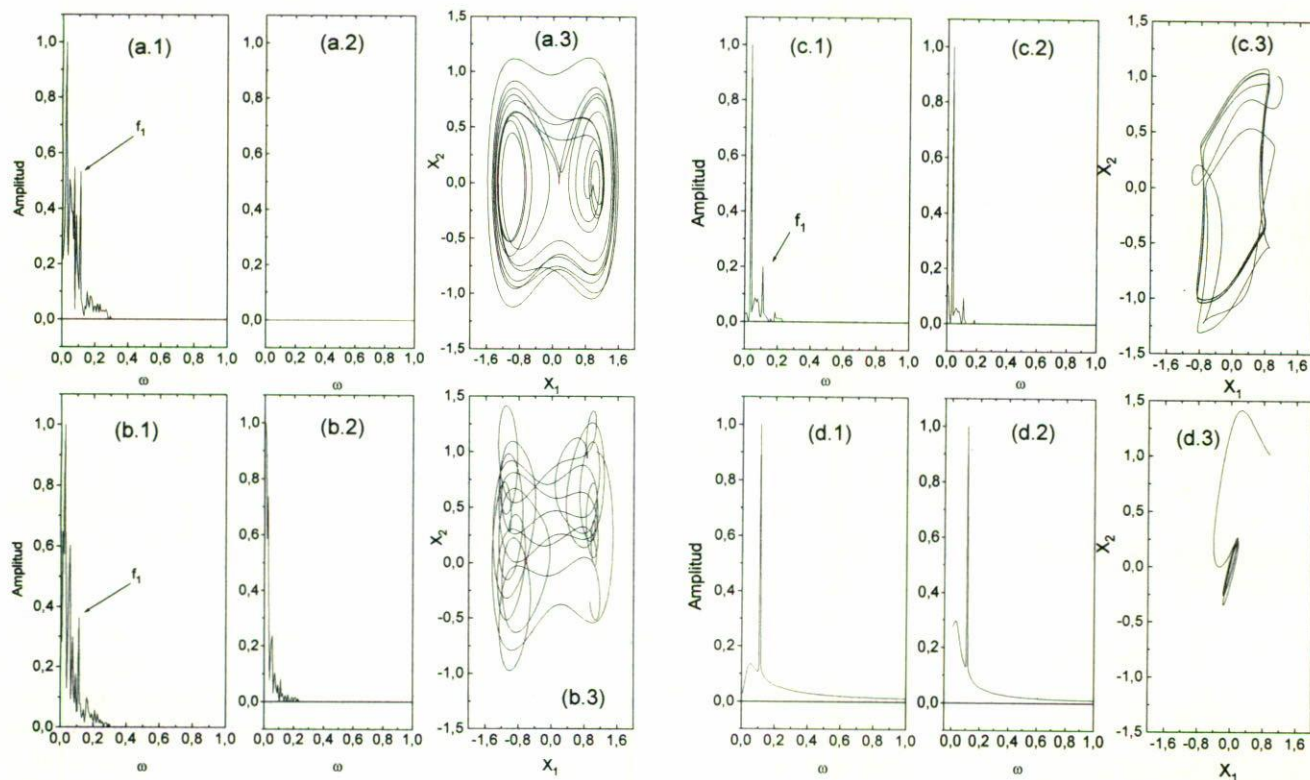


FIGURA 7. Espectros de frecuencias para x_1 y u del sistema de Duffing, con los respectivos retratos fase, bajo la acción de control PI para algunos valores de k_c . (a) $k_c = 0$, (b) $k_c = 0.1$, (c) $k_c = 0.5$ y (d) $k_c = 1.5$. Parámetros escogidos $\beta_D = 1$, $\delta_D = 0.15$, $\gamma_D = 0.275$ y $\omega_D = 1.1$.

limentado a diferentes valores de k_c ; así como los respectivos retratos fase. Se puede notar, que cuando el controlador no está activado ($k_c = 0$), el sistema presenta su comportamiento natural (considerando la perturbación externa como término natural del sistema) tanto en su retrato fase como en el espectro en frecuencia (Fig. 7a). Por otro lado, en la Fig. 7b se muestra cómo para $k_c = 0.1$ las amplitudes de las frecuencias fundamentales en el espectro de x_1 se modifican al grado de desaparecer algunas de ellas (otras modifican sólo su amplitud). En cambio el espectro del control gana algunas frecuencias (Fig. 7b.1). También es claro cómo el atractor del sistema todavía presenta múltiples órbitas. Sin embargo, aumentando a $k_c = 0.3$ se puede ver la desaparición de frecuencias fundamentales en el espectro de x_1 , coincidiendo esto con la estabilización de órbitas en el retrato fase. Mientras tanto el espectro del comando de control varía un poco con respecto al obtenido para $k_c = 0.1$ (ver Fig. 7c.2). Por último, se nota que al continuar incrementando la ganancia del controlador ($k_c = 1.5$) se ocasiona la estabilización de todas las órbitas inestables del sistema y por ende la supresión total de caos; esto es, la ganancia del controlador logra llevar las diferentes órbitas inestables del sistema a una órbita en común (ver Fig. 7d). Por lo tanto, se puede decir que para valores aproximados al intervalo de $0 < k_c < 0.7$, el sistema estabiliza algunas órbitas inestables pero no logra suprimir caos completamente, sin embargo para $k_c > 0.7$ se logra la estabilización. De acuerdo al respectivo análisis de estabilidad (ver Apéndice B) sobre el sistema se puede comprobar que efectivamente para un valor de $k_c > 0.76$ las trayectorias del sistema a lazo cerrado convergerán al origen; el cual es un punto de equilibrio. Por otro lado, cabe destacar que se logra una estabilización práctica en el sistema y esto es debido a que las trayectorias del sistema convergen a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen. Incrementar la ganancia del controlador significa eliminar frecuencias fundamentales del sistema. Por ejemplo, la frecuencia f_1 (cuya frecuencia es 0.11 rad) permanece para $k_c = 0, 0.1$ y 0.5 (Figs. 7a.1, 7b.1 y 7c.1), sin embargo para $k_c = 1.5$ (Fig. 7d.1) dicha frecuencia es eliminada. De esta manera es importante notar que el control destruye la dinámica del sistema por medio de k_c pero, sin embargo, *el control se queda con solo algunas frecuencias del sistema (por ejemplo para $k_c = 0.5$) y no con todas las frecuencias que son eliminadas para ese valor de k_c . Y con solo algunas frecuencias el resto son estabilizadas.*

Para el caso del péndulo el sistema a lazo cerrado está dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= -\delta_p x_2 - \sin(x_1) + \gamma_p \cos(\omega_p t),\end{aligned}\quad (12)$$

donde u es el comando de control en el dominio del tiempo (ver Apéndice A). De igual manera, primero se muestra el comportamiento del sistema mediante la gráfica en 3D

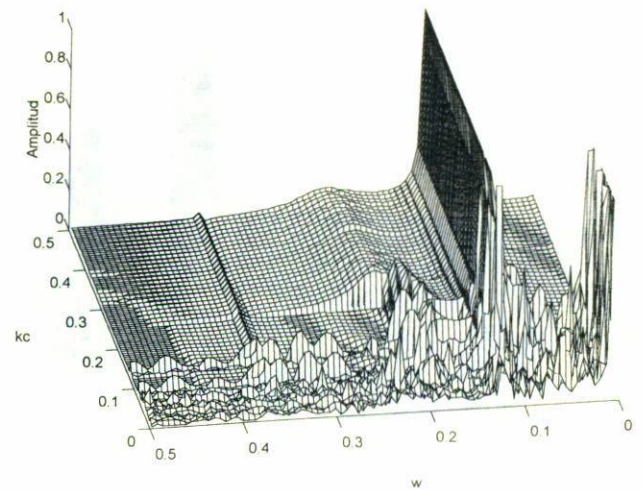


FIGURA 8. Gráfica tridimensional para la variable x_2 del Péndulo a lazo cerrado (control aplicado a x_1 y valores $\delta_p = 0.013$, $\gamma_p = 0.5$ y $\omega_p = 0.6$).

(Fig. 8). Para este caso en lugar de presentar una comparación entre el estado x_1 y la acción de control ahora se muestra los espectros de frecuencia para x_2 y u (acción de control) del sistema retroalimentado, obteniendo las gráficas a diferentes valores de k_c con sus respectivos retratos fase. No obstante el comando de control es aplicado a la variable x_1 , los fenómenos de estabilización y supresión de caos se presentan en los demás estados x_2 como se ilustra en la Fig. 9. Para este sistema se encuentra mediante el análisis de estabilidad que para valores de $k_c > -0.013$ el sistema es estable.

Finalmente se muestra el modelo de Lorenz, cuyo sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) + u, \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy,\end{aligned}\quad (13)$$

donde, de acuerdo al análisis de estabilidad, el sistema de Lorenz puede ser estabilizado en el origen para $k_c > 128$ (el valor puede ser obtenido siguiendo el procedimiento discutido en el Apéndice B). Al igual que los casos anteriores se presentan los fenómenos de estabilización y supresión de caos con la ventaja de ser observados con una mayor claridad (ver Fig. 10). Esto es, a medida que la ganancia de control es incrementada, un gran número de órbitas inestables se estabilizan de acuerdo al valor de k_c . Así, se puede observar en la Fig. 5 que para un valor alrededor de $k_c = 130$ el comportamiento caótico es suprimido, coincidiendo esto con el valor encontrado mediante el análisis de estabilidad. Una explicación de este fenómeno es que el control de retroalimentación es un estabilizador de órbitas por medio de la ganancia del control (k_c). Como se puede ver en los retratos fase respectivos para cada uno de los sistemas (ver Figs. 7, 9 y 10).

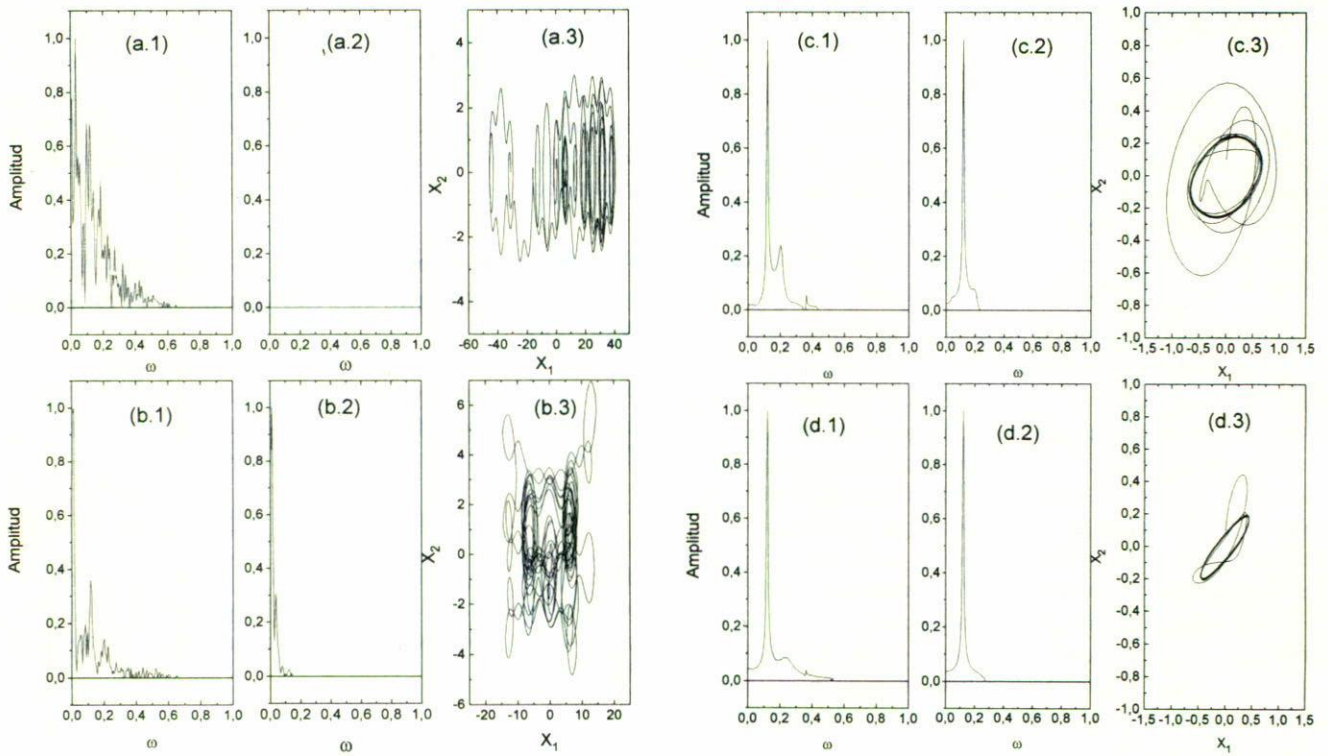


FIGURA 9. Espectros de frecuencias para x_2 y u del Péndulo, con los respectivos retratos fase, bajo la acción de control PI para algunos valores de k_c . (a) $k_c = 0$, (b) $k_c = 0.025$, (c) $k_c = 0.15$ y (d) $k_c = 0.45$.

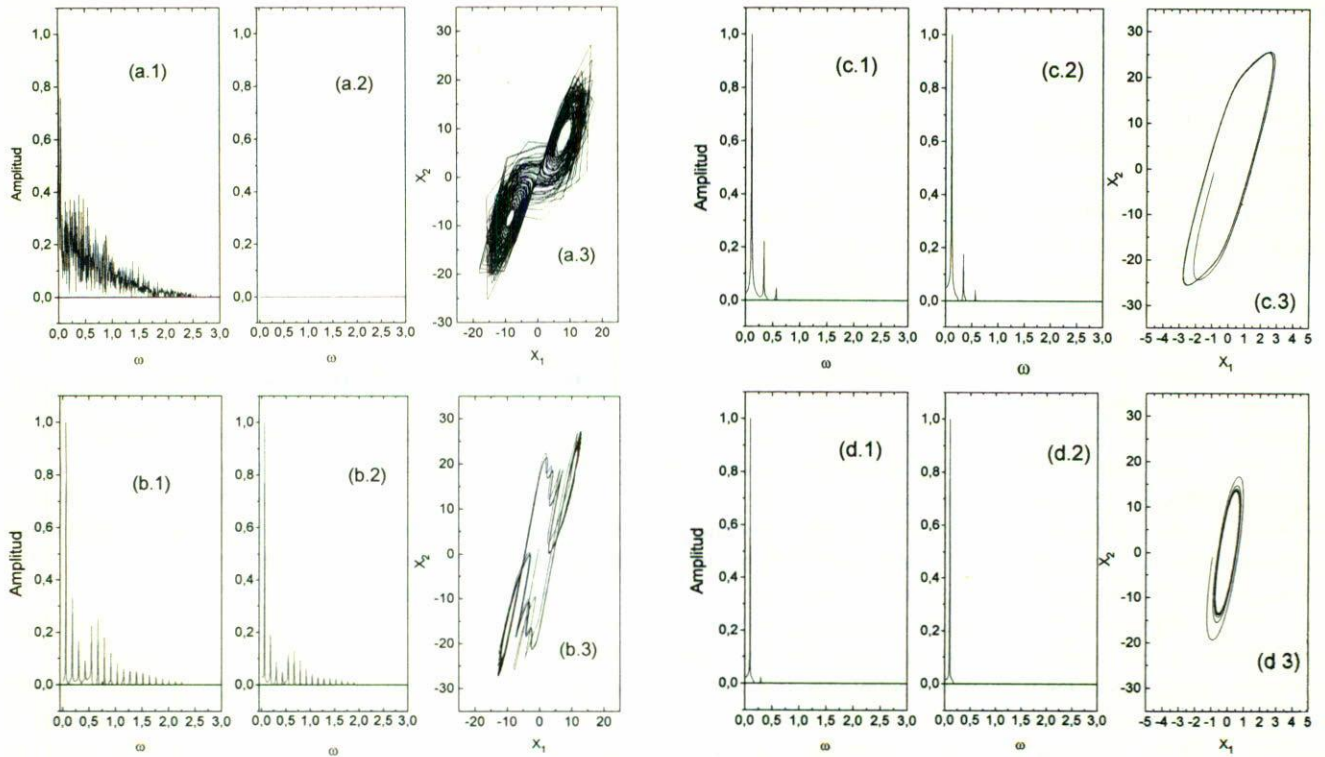


FIGURA 10. Espectros de frecuencias para x_1 y u del sistema de Lorenz, con los respectivos retratos fase, bajo la acción de control PI para algunos valores de k_c . (a) $k_c = 0$, (b) $k_c = 20$, (c) $k_c = 80$ y (d) $k_c = 128$.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un estudio en el dominio de la frecuencia sobre sistemas caóticos retroalimentados (sistemas de control a lazo cerrado). Además, se ha expuesto una herramienta para el análisis de estabilización de órbitas en atractores caóticos. Se encontró que la ganancia de control (k_c) de un sistema retroalimentado puede ser interpretada como un parámetro de bifurcación del sistema.

Por otro lado, se logró la estabilización y supresión de caos; implementando una acción de control clásica (PI). Conforme la ganancia de control incrementa, la retroalimentación proporcional-integral permite (mediante la modificación de la dinámica del oscilador) la estabilización de órbitas contenidas en el atractor. Simulaciones numéricas ilustraron, mediante espectros en frecuencias, resultados obtenidos al estudiar sistemas caóticos de segundo y tercer orden. Entonces, es claro que el controlador PI estabiliza o suprime caos en un sistema dinámico para alguna $k_{c,1} \leq k_c \leq k_{c,2}$ (donde $k_{c,1}$ y $k_{c,2}$ son constantes). Una interpretación de este fenómeno es que el control de retroalimentación es un estabilizador de órbitas inestables por medio de la ganancia de control (k_c) [8].

En principio, el controlador actúa sobre un sistema, ya sea absorbiendo o cediendo energía, esto es, al producirse los efectos de estabilización o supresión de caos se piensa que la energía que se está eliminando del sistema se transfiere a la del sistema del control (o sea esa energía es absorbida por el control). En la Ref. 8 se discutió que un controlador proporcional-integral es capaz de suprimir caos. Pero desde el punto de vista de absorción energética, los resultados obtenidos aquí muestran que la señal del comando de control no tiene comportamiento dinámico regular. De hecho, la señal del comando de control puede contener una o varias frecuencias fundamentales (ver Figs. 7, 9 y 10). Está claro que el comando de control no cuenta con todas las señales contenidas en el atractor sin control, así que surgen algunas preguntas. En un esquema de supresión de caos basado en retroalimentación, el comando de control absorbe (o provee) energía. ¿La energía del comando de control tiene frecuencias que estaban contenidas en el atractor sin control?. Si el comando de control contiene algunas señales que son producidas por el sistema a lazo abierto (sin control), significa que algunas órbitas del atractor han sido "absorbidas" por la retroalimentación. Entonces, ¿el resto de las órbitas dependen de las que han sido estabilizadas?. Una respuesta afirmativa a la segunda pregunta implica que existe acoplamiento directo de algunas órbitas dentro del atractor con las que absorbe el controlador. Así, al haber sido estabilizadas (*i.e.*, absorbidas por el controlador) las frecuencias acopladas se estabilizan. Es decir, existe *resonancia* entre órbitas contenidas en un atractor caótico. Intentar responder las preguntas anteriores está más allá de los objetivos del presente trabajo, así que resultados obtenidos en este sentido serán sometidos para su publicación en breve.

Finalmente, podemos concluir que si existe este tipo de acoplamiento de frecuencias en los sistemas estudiados, es posible caracterizar este acoplamiento, el cual sería de gran ayuda principalmente para la identificación de un número considerable de sistemas caóticos (biológicos, físicos y químicos).

Apéndice A. Obtención de la ecuación equivalente en el dominio del tiempo para el controlador $u(s)$

Aquí se presenta el procedimiento para la obtención del controlador en el dominio del tiempo. Consideremos la ecuación del control en el dominio de Laplace como

$$u(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right) e(s), \quad (14)$$

donde k_c es la ganancia de control, τ_1 la constante del tiempo de integración y $e(s)$ el error de retroalimentación [$e(s) = y(s) - r(s)$]. Aplicando la transformada inversa de Laplace tenemos

$$u(t) = k_c e(t) + \frac{k_c}{\tau_1} \int_0^t e(t) dt; \quad (15)$$

asumiendo el caso particular de tomar x_1 como la salida del sistema y una referencia nula ($r = 0$) se obtiene $e(t) = y(t) - r(t) = y(t) = x_1(t) = x_1$,^(b) simplificando (14)

$$u = k_c x_1 + \frac{k_c}{\tau_1} \int_1^t x_1 dt. \quad (16)$$

Por último, se realiza un cambio de variable de $\eta = y - r$ y en consecuencia obtenemos la expresión final del comando de control

$$u = k_c x_1 + \frac{k_c}{\tau_1} \eta, \\ \dot{\eta} = x_1. \quad (17)$$

Apéndice B. Análisis de estabilidad

Aquí se presenta un procedimiento sistemático que garantiza al menos estabilidad local sobre los sistemas a lazo cerrado estudiados en este trabajo (sistemas retroalimentados). Sin perder generalidad, consideremos un sistema dinámico de segundo orden bajo la acción de control.

El sistema es de la forma siguiente:

$$\dot{x} = f(x) + u, \quad (18)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x)$ es una función suave no lineal y $u \in \mathbb{R}$ es el comando de control aplicado al sistema. Para esto, se considera que el sistema presenta un comportamiento caótico y que el comando de control aplicado es representado por el control con acción proporcional e integral $u = k_c (y - r) + (k_c / \tau_1) \int (y - r) dt$.

Así, tomando el caso particular del oscilador de Duffing, el sistema 17 queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - \delta_D x_2 + \gamma_D \cos(\omega_D t),\end{aligned}\quad (19)$$

donde u es la acción de control en su representación en el dominio del tiempo (14), δ_D es una constante propia del sistema y $\gamma_D \cos(\omega_D t)$ corresponde a la perturbación exógena introducida al sistema con la finalidad de generar el comportamiento caótico del mismo. De tal forma que mediante algunas manipulaciones algebraicas la ecuación anterior puede ser reescrita de la manera siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - k_c e - \frac{k_c}{\tau_1} \eta, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - \delta_D x_2 + \gamma_D \cos(\omega_D t), \\ \dot{\eta} &= e,\end{aligned}\quad (20)$$

donde e es el error ($e = y - r$), la salida del sistema es la posición ($y = x_1$) y la señal de referencia es una constante ($r = 0$). Enseguida se linealiza el sistema al obtener el jacobiano evaluado en un punto en particular (para este caso se

elige el origen) resultando la matriz

$$J_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -k_c & 1 & -\frac{k_c}{\tau_1} \\ 1 & -\delta_D & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Por lo tanto, para garantizar estabilidad, al menos localmente, se requiere que los valores propios de la matriz J estén ubicados en el semiplano izquierdo complejo. Así que, tomando los valores siguientes, para el caso del oscilador de Duffing: $\delta_D = 0.15$, $\gamma_D = 0.275$, $\omega_D = 1.1$ y $\tau_1 = 1$, se encuentra que el valor de k_c (ganancia del controlador PI), para lo cual el sistema es estable es $k_c > 0.76$.

En consecuencia, con este mismo procedimiento se pueden obtener los valores de los parámetros del controlador (k_c) al realizar el análisis respectivo sobre los diferentes sistemas dinámicos. Así, obtenemos que para el oscilador de Lorenz con parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, se encuentra que el sistema es estable para valores de $k_c > 128$. Del mismo modo, pero para el caso del péndulo, se obtiene que el sistema es estable para $k_c > -0.013$ con $\delta_D = 0.013$, $\gamma_D = 0.5$, $\omega_D = 0.6$.

- (a) Intervalo donde aparece las frecuencias fundamentales de una señal.
- (b) Por simplicidad en la presentación se asume que $e(t) = e$, $u(t) = u$ y $x_n(t) = x_n$.
1. A.E. Derome, *Modern NMR techniques for Chemistry Research*, (Pergamon Press, New York (1987) Vol. 6.
 2. H. Haken, *Synergetics An Introduccion*, 3rd edition, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983).
 3. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations*, 3rd edition, (Springer-Verlag, New York, 1983).
 4. K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989).
 5. R. Femat, J. Alvarez-Ramírez, and J. González, *Phys. Lett. A* **224** (1997) 271.

6. R. Femat and J. Alvarez-Ramírez, *Phys. Lett. A* **236** (1997) 307.
7. F. Mossayebi, H.K. Qammar, and T.T. Hartley, *Phys. Lett. A* **161** (1991) 255; A.K. Kozlov, V.D. Shalfeev, and L.O. Chua, *Int. J. Bifur. and Chaos* **6** (1996) 569.
8. R. Femat, J. Capitrán-Tobías, and G. Solís-Perales, *Phys. Lett. A* **252** (1999) 27.
9. J.G.G. Dobbe, *Dr. Dobb's Journal* (February 1995) 125.
10. D.R. Coughanowr and L.B. Koppel, *Process Systems Analysis and Control*, (McGraw-Hill, New York, 1965); J.J. D'Azzo and C.H. Houpis, *Linear Control Systems Analysis and Design*, (McGraw-Hill, Tokyo, 1975).
11. R. Sepulchre, M. Janković, and P.V. Kokotović, *Constructive Nonlinear Control*, (Springer-Verlag, London, 1997).
12. R. Femat and G. Solís-Perales, *Phys. Letts. A* **262** (1999) 50.