Probabilidad un enfoque epistemológico

M.A. Martínez Negrete
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México, D.F., Mexico

Recibido el 1 de marzo de 2000; aceptado el 28 de marzo de 2000

El aprendizaje significativo [J.B. Araújo y C.B. Chadwick, *Tecnología Educacional, Teorías de Instrucción*, 2ª edición, (Paidós Educador, México, 1993)] de un concepto demanda como una de sus condiciones básicas la máxima contrastabilidad entre tal concepto y los preconceptos del estudiante. Se asume que la construcción axiomática del concepto a enseñar es la forma más nítida de su presentación al alumno. Así, a partir de un "objeto preliminar" que es un colectivo de datos generados por un sistema físico (por ejemplo las posiciones de una partícula browniana), se construye la probabilidad asociada al colectivo mediante un conjunto de axiomas. Del axioma cero o de transitividad de la operación de "selección de lugar" de von Mises [R. Von Mises, *Probability, Statistics and Truth*, (Dover Publications, Inc., USA, 1981)], se deduce que la probabilidad existe como propiedad objetiva de un colectivo. Los axiomas restantes completan las características de la probabilidad como propiedad intrínseca de los sistemas aleatorios, mediante los cuales se pueden realizar cálculos o "predicciones" comprobables experimentalmente.

Descriptores: Probabilidad física; aprendizaje significativo; filosofía de la física

One of the basic assumptions of the meaningfull learning of a concept [J.B. Araújo y C.B. Chadwick, *Tecnología Educacional, Teorías de Instrucción*, 2ª edición, (Paidós Educador, México, 1993)] is its maximum contrastability with the preconcepts of the student. It is assumed that the axiomatic construction of the concept to teach is the neatest form of its presentation to the student. Starting from a "preliminary object", which is a collective of data generated by a physical system (like the positions of a brownian particle), the probability associated to the collective is constructed by means of a set of axioms. From the transitivity or zeroth axiom postulated for the "place selection" operation of von Mises [R. Von Mises, *Probability, Statistics and Truth*, (Dover Publications, Inc., USA, 1981)] it is deduced that probability exists as an objective property of the collective. The other axioms complete the remaining aspects of probability as an intrinsic property of the random systems, by means of which probability calculations or "predictions" could be performed, subjected to experimental testing.

Keywords: Physical probability; meaningful learning; philosophy of physics

PACS: 02.50.Cw; 01.70.+w

1. Introducción

La probabilidad, para que tenga un papel en física semejante a cualquier otra variable de los sistemas físicos como la masa o la temperatura, debe referirse a una propiedad objetiva de ellos [3]. Es decir, su significado tiene que ser un invariante frente a los científicos y sus instrumentos y procedimientos de observación y medición, elementos éstos que constituyen el sujeto (S) de observación y de "construcción" del objeto físico.

La teoría de la probabilidad (o del "objeto probabilista") puede construirse como cualquier otra teoría física referente a un objeto determinado, en la que el papel jugado tanto por el físico como por el equipo de su laboratorio y los procedimientos de observación y medición quedan explícitamente estipulados, a modo de delimitar su intervención en la formulación teórica del objeto. Aquí se considera que una teoría física consta de un conjunto de axiomas o postulados de los cuales, mediante un cierto aparato matemático, se pueden derivar "leyes" o "predicciones" susceptibles del escrutinio experimental.

De las distintas maneras de construcción del objeto probabilístico, la frecuencial de von Mises [2] es la que más se acerca a un planteamiento epistemológico orientado a la objetivación del concepto de probabilidad. Otros enfoques como el subjetivista quedan, por construcción, automáticamente fuera de las pretensiones de conformación de una teoría científica (*i.e.*, contrastable experimentalmente) de la probabilidad.

En el presente trabajo se modifica el conjunto de axiomas originales de von Mises, partiendo sin embargo de un objeto probabilístico preliminar semejante $O(p)$, para luego enriquecerlo con las otras propiedades intrínsecas derivables de los axiomas que se postulan para el nuevo $O(p)$. Como resultado final se obtiene que la probabilidad es una variable común a los sistemas físicos macroscópicos, tan objetiva como su masa, temperatura o calor específico. La caracterización de "macroscopía" para la probabilidad proviene de la escala en que se hace la construcción, a partir de observaciones medibles, visibles en el laboratorio, como las posiciones vistas al microscopio de una partícula browniana o la visualización de las caras de una moneda al tirarla.

Mediante la visualización del desarrollo constructivo de una teoría, como la de la probabilidad, se espera que el estudiante internalice en su mente el nuevo concepto, de modo que el grado de contraste con el preconcepto correspondiente sea claro, eficiente y máximo. Se estaría cumpliendo asi una de las condiciones básicas para que se dé el aprendizaje significativo de la probabilidad [1].

2. El objeto probabilístico preliminar O(p)

Considérese un sistema físico (SF) capaz de generar una secuencia masiva de eventos, por ejemplo:

i) Una moneda que se tira muchas veces, o las posiciones sucesivas de una partícula en una mesa de Galton. En este caso se trata de la repetición de una operación o evento por un SF formado por una sola componente física (una moneda, una partícula).

ii) El lanzamiento de un conjunto grande de monedas iguales, o de un gran número de balines en la mesa de Galton. Aquí el SF consta de muchas componentes iguales, lanzadas a la vez.

El O(p) puede extenderse a otros SF menos perceptibles, como el movimiento molecular de un gas encerrado en un recipiente, o un electrón (o un haz) lanzado contra dos orificios u obstáculos difractores.

El SF genera una larga secuencia de datos experimentales, tanto en la condición *i)* como en la *ii)*, a la que se llamará un colectivo (C). En el ejemplo de la moneda tirada repetidas veces un C es la secuencia de "caras" y "cruces", o bien una secuencia de "caras" y "cruces" registrada al lanzar a la vez una cantidad grande de monedas iguales. Si, para simplificar la notación y los cálculos posteriores se representa "cara" por la cifra "1" y "cruz" por un "0", un C posible en el lanzamiento de la moneda sería:

$$\mathrm{C}_{\text{inicial}} = 10110100101\ldots,$$

en donde los puntos suspensivos indican los siguientes 0's y 1's obtenidos en el experimento.

(El hecho de que las propiedades del C generado por la numerosa repetición del experimento con un solo SF sean las mismas que las del C generado por muchos SF semejantes a la vez, implica la validez de un cierto comportamiento, que se llamará **reduccionismo**. No parece difícil concebir que las propiedades del C obtenido de una sola moneda lanzada varias veces sean las mismas que las del C obtenido por el lanzamiento único de varias monedas, pero en otros casos se presentan dificultades filosóficas de interpretación, como al lanzar un solo electrón repetidas veces contra una pantalla con dos hoyos y al enviar un haz electrónico compuesto de electrones monocromáticos contra la misma.)

Otras dos propiedades del O(p) son las siguientes.

Atributo observable (ao): propiedad asociada a cada elemento de la secuencia de C; por ejemplo"cara"o"cruz" en el caso de la moneda, o el valor de la posición x de la partícula browniana.

Frecuencia relativa de un ao (f_{ao}): proporción en que el ao aparece en C.

Hasta aquí el O(p) consta de el SF, el C que genera, sus ao y las f_{ao}. **La distribución de frecuencias** es precisamente el conjunto de frecuencias de los ao y es una más de las propiedades del O(p).

Sobre este O(p) se puede definir una operación que cambia el ordenamiento de los elementos en la secuencia de C, pero de tal manera que no toma en cuenta el valor de ningún ao en particular. Esta operación la llama von Mises **selección de lugar** (SL). Por ejemplo, si el C inicial de la moneda era $10110100101\ldots$, la SL_{par} que escoge los elementos pares de C genera otro C' dado por $01100\ldots$. Se escribirá simbólicamente

$$\mathrm{C}' = \mathrm{SL}_{\text{par}} \cdot \mathrm{C},$$

como representación de

$$01100\ldots = \mathrm{SL}_{\text{par}} 10110100101\ldots$$

La SL_{par} solamente toma en cuenta la situación de orden par de los elementos del C inicial, sin que influya en su selección el que tengan previamente el valor 0 ó 1, pues de lo contrario se podrían alterar los valores de f_{ao} y la naturaleza aleatoria del C original (aleatoriedad que se definirá más adelante).

Tanto el O(p) y sus propiedades, como la operación de SL actuando sobre él, son características que cualquier investigador de la probabilidad puede observar y medir, por lo que adquieren el *status* de objetividad o de invariancia frente al sujeto (S-invariancia). En la acepción presente el sujeto S comprende no sólo al investigador sino también a su equipamiento de observación-medición y a sus procedimientos experimentales de análisis.

Lo que aquí se define como "objetivo", o lo que es S-invariante, es a lo que se llamaba "absoluto" en otras épocas (como en el siglo pasado) [4].

3. El objeto probabilístico de von Mises

A partir del O(p) anterior construye von Mises su objeto probabilístico con dos axiomas implícitos y tres operaciones adicionales a la SL. Para simplificar supóngase el caso de la moneda, y que en n tiradas se observa el ao_1 en n_1 ocasiones; entonces el primer axioma de von Mises postula que

$$\begin{aligned} \mathrm{A1}_{\mathrm{vM}} : \lim f_{\mathrm{ao1}} &= \lim \frac{n_1}{n} \\ &= \text{limite fijo o estable} \\ &= \text{probabilidad } p_1 \text{del } \mathrm{ao}_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

El axioma 1 de von Mises ($\mathrm{A1}_{\mathrm{vM}}$) proporciona al O($p$) una nueva variable, la probabilidad p, de modo que se convierte en un nuevo objeto enriquecido O($p1$). La crítica a este axioma generalmente se centra en que no es posible discernir el valor en que se estabiliza el límite de la secuencia, pues no es experimentalmente posible la consideración de una infinita serie de eventos, términos o tiradas. Pero el axioma 1 lo que postula es precisamente la existencia del límite, siendo su valor el sugerido por la tendencia experimental, en caso de manifestarse. Por ejemplo, en el caso citado de la moneda se observa experimentalmente que el cociente n_1/n oscila alrededor del valor $1/2$ (si la moneda no está "cargada"), y se estabiliza en este valor al aumentar el número de experiencias. La suposición de que $p_1 = 1/2$, exactamente, es el contenido del primer axioma de von Mises, el cual equivale a postular que existe la propiedad "probabilidad" como atributo objetivo de la moneda y sus colectivos. (Se hace la interpretación de que cada valor del cociente n_1/n es realizado por un sujeto en su laboratorio, de modo que al postular que su valor tiende a $1/2$ cuando la cantidad de experimentos o de sujetos tiende al infinito es equivalente a postular que $1/2$ es objetivo o S-invariante.)

Ahora bien, para von Mises no cualquier SF y sus colectivos que satisfagan (1) es apropiadamente probabilístico, pues el límite puede existir sin que por ello los SF considerados gocen de una propiedad básica universal que se desea posean: la de ser "aleatorios" o "azarosos". Tal es el caso de la serie "nueve postes medianos y el décimo alto", repetida *ad infinitum* en una carretera. Es claro que la frecuencia de postes altos tiende a un límite estable, pero el colectivo no es de los que se estudian en la teoría de la probabilidad; la frecuencia de los postes altos es de 1/10, pero puede alterarse por una SL que escoja cada quinto poste (ver la Ref. 2, p. 24). Con el fin de dejar fuera a estos casos triviales, von Mises postula un segundo axioma:

> $A2_{vM}$: Existen los colectivos **aleatorios** (o **azarosos**). En estos colectivos los límites de las frecuencias relativas de cualquier ao son invariantes frente a cualquier SL.

Como se dijo antes, la SL se aplica sobre el orden del C original, no tomando en cuenta el valor del atributo en dicho lugar, pues de lo contrario la SL cambiaría el valor de la frecuencia relativa del ao (por ejemplo, SL="cambia por 0 cada 1 que se encuentre en los sitios pares", modificaría el valor límite de la frecuencia del 0 ó del 1).

El segundo axioma de von Mises también admite una formulación en sentido "negativo", que se expresa como el "**principio de la imposibilidad de un sistema de juego**" que, por caso, permitiera ganar sistemáticamente en los juegos de azar.

Los dos axiomas de von Mises equivalen a postular que la probabilidad es un atributo de los SF con C's aleatorios o azarosos (los que en adelante podrían llamarse "**colectivos de von Mises**"). Y a estos colectivos, y nada más que a éstos, se aplica la teoría de la probabilidad. Por lo mismo, al ser la probabilidad un atributo de los colectivos masivos y azarosos, quedan descalificadas las preguntas del estilo: "¿Cuál es la probabilidad de que Juan Pérez muera mañana?". La probabilidad solamente tiene significado en un colectivo de un SF aleatorio.

Para von Mises el cálculo de probabilidades y, con él, la "predicción" de nuevas probabilidades relacionadas con el comportamiento de sistemas "reales", consistirá en la determinación de las nuevas distribuciones de probabilidad derivadas de las iniciales, mediante la transformación de los C's originales en los C's finales a través de la aplicación de cuatro operaciones fundamentales (que recuerdan a las cuatro operaciones básicas de la aritmética). Ellas son: la ya definida SL (que no cambia la distribución original de probabilidad), el **mezclado** de colectivos (que implica la suma de probabilidades), la **partición** de colectivos (división de probabilidades) y la **combinación** de colectivos (multiplicación de probabilidades). Cualquiera otra probabilidad se puede calcular si se dan el colectivo de von Mises y la distribución inicial de probabilidad, simplemente derivando el colectivo final del inicial mediante la aplicación de las cuatro operaciones fundamentales descritas.

TABLA I. Construcción del objeto probabilista o teoría "frecuentista" de la probabilidad, siguiendo a Richard von Mises.

Axioma	Propiedad	Objeto enriquecido
	SF, C, ao, f, SL	O(p)
$A1_{vM}$	p	O(p1)
$A2_{vM}$	aleatoriedad	O(p12)

En el sentido anterior el programa del cálculo de probabilidades es semejante al de la mecánica o la termodinámica, en que el estado final se calcula del inicial aplicando ciertas operaciones matemáticas a los axiomas de la teoría, la que así puede someterse al escrutinio experimental. A la larga, la confrontación experimentalmente favorable de la teoría es la prueba que decide su permanencia o su abandono, y es un criterio adicional muy restrictivo de objetividad (además del criterio de S-invariancia). En la Tabla I se resume la construcción del objeto probabilista de von Mises.

4. Construcción epistemológica de la probabilidad

Con el fin de evadir los posibles cuestionamientos a la teoría de von Mises respecto a la existencia de valores estables de la frecuencia en el valor límite en infinito, y para mostrar que la probabilidad es una propiedad intrínseca y común a todos los SF que exhiben comportamiento aleatorio (al igual que m es una propiedad universal de **todos** los cuerpos de la mecánica, o T de la termodinámica), se fundamenta en otros axiomas el objeto probabilista. Se parte, sin embargo, del mismo O(p) que en la teoría de von Mises, excepto por una propiedad que aquí enseguida se define explícitamente.

4.1. Estocasticidad del O(p)

En general a la **estocasticidad** de un SF se la suele emplear como sinónimo de **aleatoriedad** pero, para marcar las diferencias, se empezará con una definición distinta.

Definición 1: Un SF es **estocástico** (SFE) si ninguno de sus C's experimentales es derivable de otro mediante una SL.

Como las SL son construidas mediante reglas o algoritmos, la estocasticidad equivale a la afirmación de que un SF estocástico es aquel cuyos colectivos no admiten regla alguna de derivación.

Una vez provisto el O(p) de todas las propiedades hasta aquí descritas, se postulará el cumplimiento de un axioma cero o de transitividad, el cual jugará un papel semejante a los axiomas correspondientes en la mecánica clásica (postulado de Mach [5]) y en la termodinámica (postulado de Fowler [6]). Si bien en estas disciplinas el axioma de transitividad conduce a las existencias objetivas o absolutas de la masa y la temperatura (3), respectivamente, en el caso presente implicará la existencia de la probabilidad como una nueva propiedad del O(p).

4.2. El axioma cero (A0) o de transitividad en probabilidad

Sea C*1 un colectivo original cualquiera de un SF, obtenido experimentalmente. A partir de éste se puede generar un conjunto arbitrariamente grande de colectivos derivados mediante selecciones de lugar SL_{i1} (definidas por reglas R_i1) aplicadas a C*1. Llámese CC1 a este conjunto de colectivos:

$$\begin{aligned}\mathrm{CC1} &= (\mathrm{C}{*}1; \mathrm{C1}, \mathrm{C2}, \ldots, \mathrm{C}n) \\ &= \{\mathrm{C}{*}1; \mathrm{C}i\}, i = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Si se encuentra que $f_{\mathrm{aoj}} = f_{\mathrm{aok}}$, para un cierto atributo observable (como "cara", en la moneda), se dirá que entre el C_j y el C_k de CC1 existe una **relación de reordenamiento** representable por

$$\mathrm{C}j \approx \mathrm{C}k.$$

Se postula entonces el siguiente axioma cero, o de transitividad, de la relación de reordenamiento:

A0: Si C1 $\approx$ C2 y C2 $\approx$ C3, entonces C1 $\approx$ C3, para cualesquiera C1, C2 y C3 de CC1.

El A0 implica matemáticamente la igualdad de las frecuencias para cualesquiera tres colectivos de CC1, lo que es indicativo de la existencia de una propiedad intrínseca p, para cada CC1 (y, por ello, para cada C*1 del SF); es decir,

$$f_{\mathrm{ao1}} = f_{\mathrm{ao2}} = f_{\mathrm{ao3}} = p_{\mathrm{ao}} = \textbf{probabilidad} \text{ del ao en CC1.}$$

Si cada colectivo Ci (junto con los aparatos de selección y observación) se asocia a un sujeto S, entonces el A0 es epistemológicamente un postulado de objetividad para la probabilidad en CC1, pues su existencia derivada cumple la definición de S-invariancia. (Al ser p objetiva o absoluta también es relativa, pues depende de un CC1 construido por un conjunto de sujetos. Esta aparente paradoja de la simultaneidad de lo absoluto-relativo o de lo objetivo-subjetivo, es señaladamente una característica esencial de toda teoría física construida por humanos.)

En la presente formulación p existe como propiedad objetiva del SF y sus C's como consecuencia del A0, lo cual es una diferencia con respecto a la formulación de von Mises en que se postula explícitamente la objetividad de p desde un principio. Resulta así que las tres disciplinas de la mecánica, termodinámica y probabilidad contienen cierta unidad estructural, proveniente del hecho que sus variables distintivas fundamentales, m, T y p, son derivables de sendos axiomas de transitividad. En los tres casos los axiomas cero han sido identificados como necesarios después que la teoría ha alcanzado una formulación útil en las aplicaciones.

La validez del A0 presupone implícitamente que el tamaño y la cantidad de colectivos es suficiente para garantizar la estabilidad del valor de p. Los colectivos "pequeños" quedan así descartados. La condición de masividad o de largueza de las secuencias experimentales va implícita, por lo que no es necesario hacerla explícita en los C's que dan validez al A0. von Mises, en cambio, hace explícita la existencia de p asumiendo la estabilidad de la frecuencia, mediante un postulado que resulta así más una manera de inducir los valores de las probabilidades iniciales en el cálculo de probabilidades, que una suposición básica sujeta a discrepancias por la cuestión de la convergencia.

En cuanto a las nociones de aleatoriedad o azarocidad, von Mises estipula que los C's probabilistas son aquellos para los cuales la frecuencia de un ao es estable con respecto al número de experimentos y es invariante frente a cualquier SL. En el presente trabajo se va a identificar el azar mediante la siguiente definición:

Definición 2: Un SF es **aleatorio** o **azaroso** (SFA) si sus C's satisfacen el A0.

Es decir, la aleatoriedad o la azarocidad es una propiedad intrínseca u objetiva de los SF que satisfacen el A0. Afirmar que un SF es aleatorio equivale a decir que cuenta con la probabilidad como una de sus propiedades descriptivas. Y como lo objetivo es al mismo tiempo subjetivo o relativo, el azar también participa de esta doble determinación. El azar es S-invariante, hasta donde las construcciones de los sujetos lo determinan ("Dios juega a los dados absoluta pero relativamente"). Un punto de vista semejante al aquí enunciado en este aspecto de lo absoluto-relativo del azar se puede encontrar en la Ref. 7, en donde la teoría del caos es tomada en cuenta.

La construcción del A0 y las consecuencias descritas se pueden igualmente repetir para cualquier otro colectivo experimental C*2, C*3,... del SF, de manera que si se postula que

A1: La relación de reordenamiento $\approx$ vale para los colectivos de todo SFE, entonces las frecuencias son iguales tanto para el SFE como para el SFA. Se cumple por tanto el:

Teorema 1: Todo SFA es un SFE, y viceversa.

La probabilidad resulta ser así una propiedad intrínseca de todo sistema físico azaroso-aleatorio-estocástico y de sus colectivos (C*1; C1, C2,...), (C*2; C1, C2,...), ..., etc. (Aquí los colectivos que siguen de ";" en cada CC1, CC2, ... etc, son diferentes, aunque se los denote con los mismos símbolos, pues cada uno de ellos son derivables de distinto C*i.)

4.3. La probabilidad como propiedad universal de los sistemas físicos

El paso siguiente en la construcción del objeto o teoría probabilista consiste en la especificación de su universalidad, en el mismo sentido en que la masa y la temperatura son propiedades de todos los sistemas de la mecánica (p.ej., un trompo, un planeta) y la termodinámica (un litro de gas, un cristal), respectivamente. Mientras que la masa cuantifica la relación de inercia entre las partículas, la temperatura de los sistemas de naturaleza diferente es el valor común que tienen en su equilibrio diatérmico.

Para proceder de forma semejante con la probabilidad y así poder afirmar que, por ejemplo, la probabilidad definida para una partícula browniana y sus colectivos es la misma (o tiene la misma naturaleza) que la que ocurre en otros sistemas físicos y sus colectivos, como en los juegos de azar o las poblaciones, se recurre a la siguiente definición:

> **Definición 3**: Dos o más sistemas estocásticos o aleatorios son **traducibles** si sus colectivos se pueden expresar en la misma representación matemática (por ejemplo la partícula browniana y la moneda, en el sistema binario), y si ambos satisfacen los axiomas A0 y A1.

En un sentido semejante dos sistemas mecánicos diferentes son traducibles si sus masas se pueden comparar con el mismo patrón (el kilogramo estándar), y en termodinámica si sus temperaturas se pueden apreciar con el mismo termómetro (por ejemplo, un termómetro de gas muy diluido, a volumen constante). En la teoría de la probabilidad se puede suponer que la p y su distribución de una partícula browniana tienen el mismo significado que la p de una moneda, porque ambos sistemas son traducibles.

La construcción del objeto probabilista hasta ahora descrita se resume en la Tabla II.

Al igual que en el esquema de von Mises, el cálculo de probabilidades (o las "predicciones" de la teoría) se efectúan de la misma manera: de las distribuciones iniciales de probabilidad se calculan las distribuciones finales, manipulando el colectivo inicial con las cuatro operaciones básicas que permiten construir el colectivo final. La solución de cada problema particular de probabilidad consiste en esto, en ir del estado inicial definido por la pareja (colectivo, probabilidad) al estado final de la misma, lo que constituye la "predicción" de la teoría. En este sentido el planteamiento predictivo no difiere del de cualquier teoría física.

TABLA II. La construcción axiomática del objeto probabilista en la presente versión.

Axioma	Propiedad	Objeto enriquecido
	SF, C, ao, f, SL	O(p)
A0	p, aleatoriedad	O(p0)
A1	estocasticidad, universalidad	O(p01)

Ahora bien, en ninguna de las dos presentaciones del objeto probabilista que se han ofrecido hay indicación alguna respecto a un procedimiento o método de cálculo de las probabilidades iniciales, situación que es parecida a la que priva en la termodinámica, en que no se especifica el modo de cálculo de la entropía o de la energía interna para de ellas derivar el resto de las propiedades del objeto termodinámico (como su ecuación de estado o sus calores específicos). En esta ciencia se recurre a la mecánica estadística para el conocimiento de alguna de las dos funciones generatrices, pero entonces hay que cambiar de objeto y de escala de descripción. Se puede hacer la pregunta de si, por analogía, habría el equivalente de la mecánica estadística para el cálculo "de primeros principios" de las probabilidades.

De hecho, podrían pensarse varias formas macroscópicas para el cálculo aproximado de las probabilidades iniciales: en una se aprovecharía la observación de von Mises de que las frecuencias en algunos sistemas parecen tener valores estables, como en el caso simple de los juegos de azar. Este valor tendencialmente estable se podría aceptar como el valor de la probabilidad inicial y someterse a la prueba de invariancia frente a SL arbitrarias, así como al escrutinio experimental vía las probabilidades derivadas, con el fin de evaluar su grado de objetividad. Otro procedimiento partiría de consideraciones físicas sobre la naturaleza del SF, como serían en el caso de la moneda su simetría corporal (lo que implicaría que $p = q = 1/2$), o la simetría de los impactos en la partícula browniana ($p_{\text{izquierda}} = p_{\text{derecha}} = 1/2$), etc.

Un tercer procedimiento, el más semejante a la mecánica estadística para la termodinámica, consistiría en el planteamiento y solución de las ecuaciones que obedece p, como la ecuación de Fokker-Planck [8]. (El caso de la probabilidad en mecánica cuántica se tratará en un trabajo posterior.)

5. Comentarios y conclusiones relacionados con la enseñanza de la probabilidad

El planteamiento epistemológico, al resaltar el papel que juega el sujeto en la construcción del objeto probabilista (que aquí se emplea como sinónimo de "teoría probabilista") pretende inducir al alumno a que juegue un papel responsable y activo en su aprendizaje, al identificarse con un sujeto cualquiera constructor de la teoría. Esto quiere decir que el estudiante inicia el aprendizaje formulándose preguntas como:

"¿Es la probabilidad una apreciación subjetiva del comportamiento de un SF o, por lo contrario, es una propiedad objetiva de dicho SF?". La respuesta hará ver al estudiante el papel inclusivo que él mismo puede jugar dentro de la comunidad de los científicos, por la posible contribución al saber colectivo al realizar sus propios experimentos, analizando sus conclusiones y sometiéndolas al doble escrutinio de la dicha comunidad y el comportamiento experimental del SF.

También, a partir de la pregunta anterior se pueden empezar a elaborar los primeros colectivos, aprendiendo previamente sobre la naturaleza de los SF capaces de generar aleatoriedad, etc. En fin, es posible el diseño de una secuencia temática-práctica en el proceso de enseñanza, capaz de proporcionar mediante el recurso de la responsabilidad, un aprendizaje significativo de la probabilidad.

Un aspecto básico de la probabilidad es que solamente tiene un significado objetivo para un SF y sus colectivos aleatorios. La probabilidad no tiene sentido para un solo evento, sino para un colectivo estadístico de ellos; por lo mismo, la caracterización de un solo evento como aleatorio tampoco tiene significado físico en la presente concepción, y esta afirmación vale ya sea que se estudien poblaciones, juegos de azar o partículas brownianas. La probabilidad es como la masa y la temperatura de los SF; es una de sus propiedades y de las construcciones que se hacen a partir de ellos. Finalmente, siendo la mecánica cuántica una teoría probabilista [9], se abre de manera natural la pregunta sobre el papel que ahí desempeña la noción que se tenga de la probabilidad, especialmente si ésta se refiere a un evento o a un colectivo de ellos. El problema será tratado en un trabajo posterior.

1. J.B. Araújo y C.B. Chadwick, *Tecnología educacional, teorías de instrucción*, 2ª edición, (Paidós Educador, México, 1993).

2. R. Von Mises, *Probability, Statistics and Truth*, (Dover Publications, Inc., USA, 1981).

3. M.A. Martínez Negrete, *Rev. Mex. Fís.* **45** (1999) 405.

4. M. Planck, *¿A dónde va la ciencia?*, cuarta edición, (Editorial Losada, S.A., Argentina, 1961).

5. E. Mach, *The Science of Mechanics: A Critical and Historical Account of its Development*, (The Open Court Publishing Company, LaSalle, Illinois, USA, 1960).

6. M.W. Zemansky, *Heat and thermodynamics*, 5ª edición, (McGraw-Hill, New York, 1968).

7. I. Ekeland, *Al Azar*, Segunda edición, (Gedisa Editorial, España, 1998).

8. F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, (McGraw-Hill Book Co., USA, 1965).

9. D.J. Velleman, *Am. J. Phys.* **66** (1998) 967.