

# Estabilidad e inestabilidad. Parte I: Uso de integrales de movimiento en el problema de estabilidad

P. Ripa

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada  
Km. 107, carretera Tijuana-Ensenada, 22800 Ensenada, Baja California, Mexico  
e-mail: ripa@cicese.mx

Recibido el 13 de diciembre de 1999; aceptado el 23 de mayo de 2000

El concepto de estabilidad de los equilibrios de un sistema dinámico es clarificado, definiendo tanto estabilidad lineal (espectral y formal) como alineal. Se analizan casos para los que hay equilibrios linealmente estables pero alinealmente inestables y *viceversa*. Las integrales de movimiento del sistema son utilizadas para el estudio de la evolución de estados inicialmente cercanos a un equilibrio; se muestra cómo se pueden obtener cotas *a priori* para la distancia a ese punto. Los ejemplos utilizados corresponden a sistemas hamiltonianos, tanto canónicos como singulares. Se ejemplifica el proceso de reducción del espacio de estados y el concepto de estabilidad en un espacio restringido.

*Descriptor:* Estabilidad; integrales de movimiento; sistemas dinámicos

The concept of equilibria stability in a dynamical system is clarified, defining both linear (spectral and formal) and nonlinear stability. Cases for which there are equilibria that are linearly stable but nonlinearly unstable and *viceversa* are analyzed. The integrals of motion of the system are used to study the evolution of states initially close to an equilibrium; it is shown how to derive *a priori* bounds for the distance to that point. The examples used here correspond to Hamiltonian systems both in the canonical and singular sense. The process of state space reduction and the concept of restricted stability are exemplified.

*Keywords:* Stability; integrals of motion; dynamical systems

PACS: 05.45.-a; 45.05.+x; 45.20.Jj

## 1. Introducción

Sea un sistema dinámico autónomo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde las negritas indican un vector con un número finito de componentes (aunque nuestra intención es generalizar al caso de campos). Definiendo uno de los puntos de equilibrio (indicados por mayúsculas)  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$  y la perturbación  $\delta\mathbf{x}$  por

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{X}) &= \mathbf{0}, \\ \delta\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{X},\end{aligned}$$

al estudiar la *estabilidad* de  $\mathbf{X}$  nos preguntamos si es posible demostrar *a priori* que  $\delta\mathbf{x}$  no puede crecer; por otra parte, si  $\mathbf{X}$  es *inestable* nos preguntamos cómo es que pueda crecer  $\delta\mathbf{x}$ . Estabilidad e inestabilidad no son conceptos unívocos, sino que dependen de definiciones particulares. Por ejemplo, tres definiciones de *estabilidad* son [1]

1. *Espectral:* Si  $\delta\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\varepsilon \hat{\mathbf{x}}_a e^{\lambda_a t}) + O(\varepsilon^2) \Rightarrow \text{Re}\lambda_a \leq 0$ .
2. *Formal:*  $\exists \mathcal{I}(\mathbf{x}) : d\mathcal{I}/dt = 0, \delta\mathcal{I} = 0, \delta^2\mathcal{I} > 0$ .
3. *Normada:*  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : \|\delta\mathbf{x}(0)\| < \eta \Rightarrow \|\delta\mathbf{x}(t > 0)\| < \varepsilon$ .

(Normalmente este orden es de más débil a más fuerte; sin embargo veremos un ejemplo de sistema linealmente inestable pero alinealmente estable.) La primera definición, la de

los *modos normales*  $\hat{\mathbf{x}}_a$ , es la más fácil de aplicar, ya que el problema se reduce a calcular las autosoluciones  $(\lambda_a, \hat{\mathbf{x}}_a)$  de  $\mathbb{L}$ , donde la ecuación de evolución de una perturbación infinitesimal se escribe como

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{L}(\mathbf{X}) \delta\mathbf{x}. \quad (1)$$

Para asegurar estabilidad lineal, además de la condición indicada, sobre los autovalores de  $\mathbb{L}$ , se necesita también probar que los autovectores  $\{\hat{\mathbf{x}}_a\}$  forman una base completa en el espacio de las perturbaciones infinitesimales. En el segundo caso, la variación total de una cierta integral de movimiento  $\Delta\mathcal{I}$  es expandida en términos de la perturbación

$$\Delta\mathcal{I} := \mathcal{I}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{x}) - \mathcal{I}(\mathbf{X}) = \delta\mathcal{I} + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{I} + \dots,$$

donde  $\delta^n\mathcal{I} = O(\delta\mathbf{x}^n)$  [2]; la condición de estabilidad formal establece que  $\mathcal{I}(\mathbf{x})$  tiene un mínimo en el punto de equilibrio (si tuviera un máximo, bastaría con cambiarle el signo a  $\mathcal{I}$ ). Finalmente, la tercera definición es la más fuerte: establece, a diferencia de las dos primeras, *estabilidad alineal* y requiere de la definición de una norma  $\|\delta\mathbf{x}\|$ ; en adelante se indicará por  $\eta(\varepsilon)$  al menor de los  $\eta$  correspondientes a cada  $\varepsilon > 0$ .

En las Sec. 2 aclararemos más estos conceptos, mediante ejemplos particulares. Los resultados son luego relacionados, en la Sec. 3, con la teoría de sistemas hamiltonianos, lo que facilita la comparación con resultados similares de física oceánica, a presentarse más adelante.

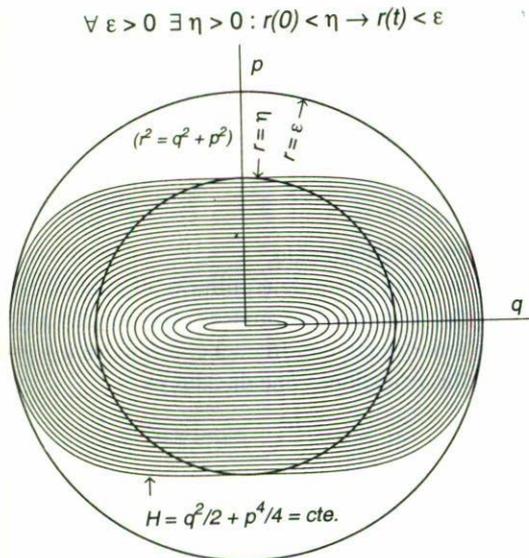


FIGURA 1. En el espacio de perturbaciones  $\delta \mathbf{x} = (q, p)$ , las líneas delgadas representan órbitas posibles y el origen es un punto de equilibrio. Éste es estable, ya que si  $\|\delta \mathbf{x}(0)\| < \eta$  (círculo menor) entonces  $\|\delta \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  (círculo mayor)  $\forall t$ , y es posible encontrar  $\eta$  dado cualquier  $\varepsilon > 0$ .

## 2. Estabilidad: alineal vs. lineal

Estabilidad alineal significa que dado cualquier entorno  $V_\varepsilon$  del punto de equilibrio, es posible elegir un subentorno  $V_\eta \subseteq V_\varepsilon$  tal que para cualquier condición inicial en  $V_\eta$ , el sistema no sale de  $V_\varepsilon$ . En la definición escrita más arriba utilizamos los conceptos de entorno y subentorno con base en *distancias*, es decir  $\|\delta \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  para  $\|\delta \mathbf{x}(0)\| < \eta$  (ver el ejemplo de la Fig. 1, correspondiente a un sistema descrito en la siguiente subsección).

En esa figura se utiliza la definición euclídea de distancia,  $\|\delta \mathbf{x}\|^2 = q^2 + p^2$ ; es fácil convencerse que el resultado es válido para cualquier otra definición de la norma  $\|\delta \mathbf{x}\|$ . Esto es cierto, en general, para sistemas con un número finito de dimensiones. (En el caso de sistemas infinitos, por otra parte, para los que  $\|\delta \mathbf{x}\|$  se define por medio de series o integrales, un equilibrio puede ser estable respecto de una norma e inestable respecto de otra.)

Un tipo de problemas para los que se puede demostrar fácilmente estabilidad alineal son aquellos para los que existe una integral de movimiento  $\mathcal{I}(\mathbf{x})$  que tiene un mínimo en el punto de equilibrio  $\mathbf{X}_E$ . Para todos los puntos a igual distancia

$$\|\delta \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{X}_E\| =: r \tag{2}$$

de ese punto,  $\Delta \mathcal{I}(\delta \mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{X}_E + \delta \mathbf{x}) - \mathcal{I}(\mathbf{X}_E)$  tendrá un mínimo y un máximo, es decir

$$\phi(r) \leq \Delta \mathcal{I}(\delta \mathbf{x}) \leq \Phi(r), \tag{3}$$

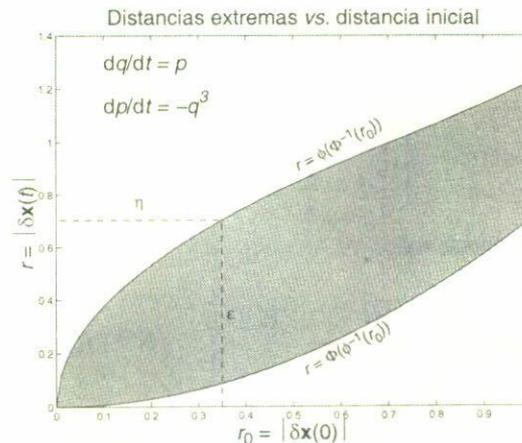


FIGURA 2. **Sombreado:** Rango de distancias al origen en función de la distancia original, para el sistema de la Fig. 1. **Líneas cortadas:** El origen es alinealmente estable, ya que  $\|\delta \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  para  $\|\delta \mathbf{x}(0)\| < \eta = \Phi(\phi^{-1}(\varepsilon))$ .

donde las funciones  $\phi$  y  $\Phi$  se anulan en el origen. Vamos a suponer que la función  $\Delta \mathcal{I}(\delta \mathbf{x})$  es bien comportada, en el sentido que  $\phi(r)$  y  $\Phi(r)$  son monótonas, por lo menos en algún entorno del origen. Como  $\Delta \mathcal{I}$  es constante para cada órbita, el movimiento está restringido a la capa  $\Phi^{-1}(\Delta \mathcal{I}) \leq \|\delta \mathbf{x}(t)\| \leq \phi^{-1}(\Delta \mathcal{I})$ . Es conveniente expresar estas cotas en función de la distancia inicial, para lo que usamos (3) en  $t = 0$ , obteniendo

$$\Phi^{-1}\{\phi[r(0)]\} \leq r(t) \leq \phi^{-1}\{\Phi[r(0)]\}; \tag{4}$$

el sistema no sólo no se aleja arbitrariamente de  $\mathbf{X}_E$ , sino que tampoco puede acercarse arbitrariamente a ese punto. La cota superior de (4) implica la estabilidad alineal de  $\mathbf{X}_E$ , definida en la Introducción, con  $\eta \leq \Phi^{-1}(\phi(\varepsilon))$ . Estas cotas son utilizadas en la Parte II de esta serie, para establecer límites *a priori* al crecimiento de perturbaciones de equilibrios inestables.

### 2.1. Ejemplo 1: alineal $\nRightarrow$ lineal

Para ejemplificar el procedimiento anterior, considérese el sistema autónomo bidimensional

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q^3, \tag{5}$$

para el cual la única integral de movimiento es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}q^4. \tag{6}$$

Las líneas finas de la Fig. 1 son precisamente los contornos de  $\mathcal{H}$  para este sistema. A menos de normalizaciones,  $q$  es la posición y  $p$  la velocidad de una partícula en el potencial (unidimensional)  $V(q) = \frac{1}{4}q^4$ , que tiene un fondo más “aplano” que el del potencial armónico  $V(q) \propto q^2$ . El único punto de equilibrio es el origen,  $(Q, P) = (0, 0)$ , de donde  $\delta \mathbf{x} \equiv (q, p)$ . Para establecer si es o no estable utilizamos la norma  $r(t) := \sqrt{p^2 + q^2}$ . Las cotas (3) pueden derivarse haciendo  $q = r \cos \theta$  y  $p = r \sin \theta$  y encontrando los extremos

de  $\mathcal{H}$  con respecto a  $\theta$  con  $r$  fijo; el resultado está dado por las funciones [3]

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4}r^4 & r \leq 1 \\ \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} & r \geq 1 \end{cases}, \quad \Phi(r) = \frac{1}{2}r^2,$$

cuyas inversas son

$$\phi^{-1}(\mathcal{H}) = \begin{cases} \sqrt[4]{4\mathcal{H}} & \mathcal{H} \leq \frac{1}{4} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + 2\mathcal{H}} & \mathcal{H} \geq \frac{1}{4} \end{cases}, \quad \Phi^{-1}(\mathcal{H}) = \sqrt{2\mathcal{H}}.$$

En la Fig. 2 se muestran las cotas (4) a la evolución de la perturbación para este sistema.

Con respecto a las tres definiciones de estabilidad, descritas en la Introducción, se puede concluir lo siguiente: 1) No se puede decir que el origen sea espectralmente estable, ya que hay sólo un autovector (con autovalor nulo): los modos normales no constituyen una base completa. 2) Tampoco se puede demostrar estabilidad formal, pues la segunda variación de  $\mathcal{H}$  no es definitivamente positiva, sino *definitivamente no negativa*

$$\delta^2\mathcal{H} = p^2 \geq 0,$$

es decir, la segunda variación no es suficiente para determinar si el origen es o no un mínimo. Esto está relacionado con el hecho de que muy cerca del origen las curvas de  $\mathcal{H}$  constante son prácticamente rectas paralelas al eje  $q$  (ver la Fig. 1): desde el punto de vista lineal, no parece haber restricción a la variación de esta variable. De hecho, la solución de las ecuaciones linealizadas es

$$\delta p(t) = \delta p(0), \quad \delta q(t) = \delta q(0) + \delta p(0)t,$$

es decir, el origen es *linealmente inestable*. 3) Sin embargo, este punto es *alinealmente estable*, lo que se demuestra fácilmente con  $\eta \leq \Phi^{-1}[\phi(\varepsilon)]$  (ver la Fig. 2).

En este caso, para demostrar la estabilidad no basta  $\delta^2\mathcal{H}$ , sino que se debe utilizar  $\delta^4\mathcal{H} [\equiv 4!V(q)]$ : cambiando el signo de ese término (es decir, para el potencial  $V(q) = -\frac{1}{4}q^4$ , que corresponde a  $\dot{q} = p$  y  $\dot{p} = q^3$ ) el origen es inestable; por ejemplo, existen las soluciones  $\left\{ q = \pm\sqrt{2}(t-t_0)^{-1}, p = \mp\sqrt{2}(t-t_0)^{-2} \right\}$  que muestran que el sistema modificado puede “explotar” en un tiempo finito  $t_0 > 0$ . La única integral de movimiento es en este caso  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}q^4$ , que satisface  $\delta\mathcal{H} = 0$  y  $\delta^2\mathcal{H} \geq 0$  en el punto de equilibrio, como en el caso anterior.

### 2.2. Ejemplo 2: lineal $\not\Rightarrow$ alineal

Podemos ahora considerar el ejemplo opuesto al anterior, es decir, un sistema es *linealmente estable* pero *alinealmente inestable*. Sea

$$\frac{dz_1}{dt} = -iz_1 + \alpha z_1^* z_2^*, \quad \frac{dz_2}{dt} = 2iz_2 - 2(z_1^*)^2, \quad (7)$$

donde las funciones  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  son complejas. Definiendo  $W = z_1^2 z_2$  es  $d|z_1|^2/dt = 2\alpha \text{Re } W$ ,  $d|z_2|^2/dt = -4\text{Re } W$ , y  $dW/dt = 2|z_1|^2 (\alpha|z_2|^2 - |z_1|^2)$ : real, de donde se puede demostrar fácilmente que

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}|z_1|^2 + \frac{1}{4}\alpha|z_2|^2, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\text{Im}(z_1^2 z_2) \quad (8)$$

son integrales de movimiento.

El origen es un punto de equilibrio, el cual es espectralmente estable: los modos normales corresponden a dos osciladores sin amortiguar, con frecuencias iguales a 1 y  $-2$ . La solución de las ecuaciones linealizadas es

$$z_1 \sim \varepsilon e^{-it}, \quad z_2 \sim \varepsilon e^{2it},$$

con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Los términos alineales entran en las ecuaciones de movimiento como un forzamiento *en resonancia*, ya que substituyendo las soluciones linealizadas en los términos cuadráticos de las ecuaciones de movimiento se obtienen  $z_1^* z_2^* \sim \varepsilon^2 e^{-it}$  y  $(z_1^*)^2 \sim \varepsilon^2 e^{2it}$ , es decir, términos con la *misma* frecuencia que  $z_1$  y  $z_2$  (por lo que una expansión perturbativa en  $\varepsilon$  no es válida a todo tiempo). Ecuaciones del tipo (7) pueden estar relacionadas a un campo  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[z_1(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + z_2^*(t)e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \dots]$ ; la resonancia indica que la interacción entre la onda básica  $z_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  y el armónico  $z_2^* e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  es muy eficiente, por lo que puede tener sentido aislar estas dos componentes [4].

El comportamiento alineal del sistema depende crucialmente del signo de  $\alpha$ . Si  $\alpha > 0$ , entonces  $\mathcal{I}_2$  es una norma que se conserva: el origen es un punto de equilibrio alinealmente estable. Para  $\alpha < 0$ , en cambio,  $\mathcal{I}_2$  es indefinida.

Por ejemplo, la siguiente solución (con frecuencias iguales a las del problema linealizado)

$$\alpha = -1 : \begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-t_0)^{-1} e^{-it-i\theta} \\ z_2 = -(t-t_0)^{-1} e^{2it+2i\theta} \end{cases}, \quad (9)$$

muestra que para  $\alpha < 0$ , el sistema puede explotar en un tiempo finito. Eligiendo  $t_0 \gg 1$  se ve que la inestabilidad es posible *para perturbaciones iniciales arbitrariamente pequeñas*. Esto es diferente a decir que un punto de equilibrio es inestable para perturbaciones suficientemente grandes, lo que es casi una trivialidad (para la mayoría de los sistemas).

Por otra parte, las soluciones para, digamos,  $\alpha = 1$  pueden ser obtenidas de la solución general [5] para una triada resonante  $(z_1, z_2, z_3)(t)$ , haciendo que dos componentes coincidan:  $z_3 \mapsto z_1$ . En la solución genérica  $|z_1|$  y  $|z_2|$  oscilan entre dos valores diferentes de cero, mientras que las frecuencias instantáneas  $-d(\arg z_j)/dt$  experimentan una modulación periódica. Casos extremos son las soluciones donde las frecuencias son las del problema lineal y hay un máximo intercambio de energías

$$\alpha = 1 : \begin{cases} z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\mu \text{sech}[\mu(t-t_0)] e^{-it-i\theta} \\ z_2 = \mu \tanh[\mu(t-t_0)] e^{2it+2i\theta}, \end{cases} \quad (10)$$

a las que tienen energías y frecuencias constantes

$$\alpha = 1 : \begin{cases} z_1 = i(1 - \omega) e^{-i(\omega t + \theta)} \\ z_2 = i(1 - \omega) e^{2i(\omega t + \theta)}, \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\mu, \omega, \theta$  y  $t_0$  son reales arbitrarios. Aplicando la transformación  $\theta \mapsto \theta \mp \frac{1}{2}\pi$  en las tres soluciones presentadas, (9) a (11), se obtiene una nueva solución de la forma  $z_1 \mapsto \pm iz_1, z_2 \mapsto -z_2$ ; dos veces esta transformación implica que  $z_1 \mapsto -z_1, z_2 \mapsto z_2$  lleva soluciones a soluciones. Es fácil ver que éstas son invariancias de todas las soluciones de (7).

En (11) las frecuencias son iguales a  $\omega$  veces sus valores lineales y las amplitudes son constantes. Haciendo  $\omega = 0$  se obtiene una familia de puntos de equilibrio, diferentes del origen:

$$Z_1 = ie^{-i\theta}, \quad Z_2 = ie^{2i\theta}, \quad (12)$$

donde  $\theta$  es un real arbitrario. ¿Son estables estos equilibrios? La respuesta es claramente negativa: eligiendo  $\omega \ll 1$  en (11) se obtiene una solución exacta que inicialmente está muy cerca del equilibrio (12), pero luego se aleja una distancia finita de él. Por ejemplo, para la norma  $\|z_j - Z_j\|^2 = \mathcal{I}_1(z_j - Z_j)$  es  $r^2(t) = \frac{3}{4}\omega^2 + 2(1 - \omega)(2 + \cos \omega t) \sin^2 \frac{\omega t}{2}$ . De manera que  $r(0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\omega$ , mientras que  $\max_t [r(t)] = \frac{3}{2} + O(\omega)$  (el máximo se alcanza en  $\omega t = \frac{2}{3}\pi$ ). Esta inestabilidad es de origen alineal y no es de modos normales: el crecimiento inicial de  $r$  en  $t$  no es exponencial sino cuadrático. Comparando (11) con (12) se ve que la inestabilidad está asociada a una deriva de las fases de  $z_1$  y  $z_2$ , tal que la fase de  $z_1^2 z_2$  permanece constante. Podemos hacer un cambio de variables —que separe la fase que varía en (11)— mediante una transformación a cuatro variables reales  $(x, y, z, \phi)$  de la forma

$$z_1 = iz(t) e^{-i\phi(t)}, \quad z_2 = [x(t) + iy(t)] e^{2i\phi(t)}.$$

Las ecuaciones de movimiento, para  $\alpha = 1$ , en las nuevas variables son

$$\alpha = 1 : \begin{cases} \dot{x} = 2z^2 - 2y^2 \\ \dot{y} = 2xy \\ \dot{z} = -xz \end{cases} \quad (13)$$

y  $\dot{\phi} = 1 + y$  (si  $z \neq 0$ ), las que tienen como integrales de movimiento a

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 2z^2), \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}yz^2. \quad (14)$$

La cuarta variable,  $\phi(t)$ , no entra en las ecuaciones de evolución (13) de las tres primeras —ni en las integrales de movimiento (14). Se puede, por lo tanto, reducir el sistema a las variables  $(x, y, z)(t)$ . Esta reducción es análoga a la que va de la descripción lagrangiana de un fluido a la euleriana. En la primera se tiene la información de la posición y demás propiedades de cada volumen elemental (o “partícula”), en función del tiempo; En la segunda, en cambio, se utilizan

los valores de esas propiedades en cada posición posible, independientemente de cuál sea la partícula que pasa en ese momento por ahí. La información que se pierde con la reducción (el equivalente de  $\phi$ , en este ejemplo sencillo) son las “etiquetas” de las partículas (que nos permiten identificarlas en la descripción lagrangiana).

Los equilibrios del sistema reducido son

$$\begin{aligned} A : \{X = 0, |Y| = |Z|\}, \\ B : \{X \neq 0, Y = Z = 0\}, \end{aligned} \quad (15)$$

mientras que los del sistema (7), el origen y los de (12), corresponden en las nuevas variables a  $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$  y  $(X, Y, Z) = (0, 1, 1)$ , respectivamente; los que son tan sólo casos particulares del conjunto A. El sistema reducido tiene más equilibrios que el problema original. Regresando a la analogía del fluido, existen equilibrios de la descripción euleriana (un campo estacionario de corrientes) que no lo son de la lagrangiana (ya que la posición de cada partícula cambia con el tiempo). Además, un estado estable desde el punto de vista euleriano (espacio reducido) no lo es necesariamente en el lagrangiano (espacio “completo”): una pequeña perturbación de velocidad euleriana puede hacer que la distancia entre dos partículas inicialmente muy cercanas aumente arbitrariamente, respecto del caso sin perturbar, para  $t \rightarrow \infty$ .

Los equilibrios del conjunto A corresponden, en el espacio completo (tetradimensional), a la solución dependiente del tiempo (11), la cual en las nuevas variables se escribe como  $(x, y, z, \phi) = (0, 1 - \omega, 1 - \omega, \theta + \omega t)$ . Esta solución es inestable, ya que las órbitas correspondientes a  $\omega = \omega_1$  y  $\omega = \omega_2$  con  $\omega_1 - \omega_2 \ll 1$ , aunque están muy cercanas en  $t = 0$  se separan una distancia finita para  $|\omega_1 - \omega_2| t \gtrsim 1$ . Podemos preguntarnos si son o no estables en el espacio reducido (tridimensional) descrito por  $(x, y, z)$ . Los modos normales garantizan estabilidad lineal, pues los autovalores son  $\{0, 2i\sqrt{3}Y, -2i\sqrt{3}Y\}$  y los autovectores correspondientes forman una base completa. Con respecto a estabilidad formal, la combinación  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$  de ambas integrales de movimiento tiene primera variación nula  $\delta\mathcal{I} = 0$  en el punto de equilibrio, pero  $\delta^2\mathcal{I} = \frac{1}{4}\delta x^2 + \frac{1}{4}\delta y^2 + \delta y\delta z$  es claramente indefinida.

En suma, se puede demostrar estabilidad espectral, pero no formal (al menos en el sentido definido en la Introducción). Con las integrales de movimiento no se puede demostrar  $\delta^2\mathcal{I} > 0$  para perturbaciones arbitrarias. Esto parecería ser una limitación de la utilidad de las leyes de conservación. Sin embargo, la Fig. 3 muestra que

$$\delta^2\mathcal{I}_2 \Big|_{\mathcal{I}_1=\text{cte.}} > 0 \quad \text{ó} \quad \delta^2\mathcal{I}_2 \Big|_{\mathcal{I}_1=\text{cte.}} < 0$$

en cada uno de los cuatro equilibrios del conjunto A. Esta condición ampliada (o “débil”) de estabilidad formal es suficiente para garantizar estabilidad lineal, ya que una perturbación pequeña de un equilibrio debe evolucionar sobre una superficie  $\mathcal{I}_1(\mathbf{x}) = \text{cte.}$ , donde  $\mathcal{I}_2(\mathbf{x})$  tiene máximos y mí-

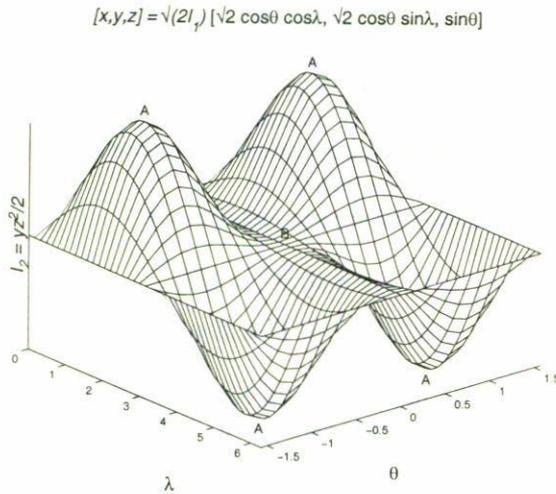


FIGURA 3. Representación gráfica de las integrales de movimiento del sistema (13): se muestra la estructura de la segunda,  $\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}yz^2$ , sobre la superficie del elipsoide definido por un valor constante de la primera,  $\mathcal{I}_1 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 2z^2)$ . Las coordenadas  $(x, y, z)$  son escritas en función de las coordenadas polares  $(\lambda, \theta)$  como se indica en la figura. Los puntos A son equilibrios estables, mientras que el punto B es un equilibrio inestable.

nimos; a las perturbaciones sobre  $\mathcal{I}_1(\mathbf{X}) = \text{cte.}$  se les llama "dinámicamente accesibles" [6].

Finalmente, la Fig. 3 muestra que en cada superficie  $\mathcal{I}_1(\mathbf{x}) = \text{cte.}$ ,  $\mathcal{I}_2(\mathbf{x})$  tiene un punto de ensilladura en el equilibrio del conjunto B, es decir,  $\delta^2\mathcal{I}_2|_{\mathcal{I}_1=\text{cte.}}$  es indefinida. De hecho, los puntos B son equilibrios inestables: la solución linealizada de (13) es  $\delta x \approx \delta x(0)$ ,  $\delta y \approx \delta y(0)e^{2Xt}$  y  $\delta z \approx \delta z(0)e^{-Xt}$ . Los equilibrios del conjunto B corresponden a una solución muy sencilla de (7):  $(z_1, z_2) = (0, Xe^{2it+2i\theta})$ . Obviamente, ésta también es inestable en el espacio completo (de cuatro dimensiones); por ejemplo, la solución (10) con  $t_0 > 0$ ,  $\mu = -X$  y  $\text{sech}[\mu t_0] \ll 1$  está inicialmente muy cerca de ella, mientras que para  $|\mu|t \rightarrow \infty$  es  $(z_1, z_2) \rightarrow (0, Xe^{2it+2i\theta+i\pi})$ .

### 3. Relación con sistemas hamiltonianos

En la Sec. 2 se ejemplificó el uso de las leyes de conservación en el estudio de la estabilidad de equilibrios. Estos puntos están directamente ligados a la existencia de extremos de integrales de movimiento dentro del contexto de la teoría de sistemas hamiltonianos, tanto canónicos como singulares.

Los sistemas *hamiltonianos canónicos*, son caracterizados por la función (de un número par de variables)  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , tal que

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (16)$$

En un equilibrio,  $(d\mathbf{q}/dt) = \mathbf{0}$  y  $(d\mathbf{p}/dt) = \mathbf{0}$ , es  $\delta\mathcal{H} = (\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{q}) \cdot \delta\mathbf{q} + (\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}) \cdot \delta\mathbf{p} = 0$ ; si  $\delta^2\mathcal{H}$  es de signo definido se garantiza estabilidad formal. Este es el caso de los

sistemas clásicos de partículas, para los que  $\mathcal{H}$  es igual a la suma de la energía cinética (la que es definitivamente positiva en el subespacio de las velocidades) y un potencial  $\mathcal{V}$ : los mínimos de  $\mathcal{V}$  son equilibrios estables, al menos en el sentido lineal.

El primer ejemplo presentado en la Sec. 2 es de este tipo: las Ecs. (5) se pueden derivar del hamiltoniano (6) usando las fórmulas canónicas (16). En este ejemplo, el hamiltoniano tiene un mínimo en el origen, el cual es un equilibrio alinealmente estable a pesar de que  $\delta^2\mathcal{H} \geq 0$  (la segunda variación no basta para demostrar estabilidad).

Se puede considerar un caso aún más raro, el cual muestra que aunque es útil que una integral de movimiento sea extrema en un punto de equilibrio, esto no es estrictamente necesario para establecer su estabilidad: El hamiltoniano canónico

$$\mathcal{H}(q \neq 0, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 \cos \frac{2\pi}{q},$$

$$\mathcal{H}(0, p) = \frac{1}{2}p^2,$$

tiene gradiente nulo en el origen (el cual es, por lo tanto, un punto de equilibrio), pero no es ni máximo ni mínimo allí: en cualquier entorno del origen hay puntos con  $\mathcal{H} > 0$  y  $\mathcal{H} < 0$ . Por ejemplo,  $\mathcal{H}(\pm 2q_n, 0) = (-1)^n 2/n^2$ , donde  $q_n = 1/n$  con  $n$  entero positivo. Sin embargo, se puede demostrar que el origen es alinealmente estable: considérese una condición inicial tal que  $q(0)^2 + p(0)^2 < q_n^2$  para algún entero positivo  $n$ ; ya que en general  $2\mathcal{H} \leq p^2 + q^2$  es obviamente  $2\mathcal{H} < q_n^2$ . Nótese que  $2\mathcal{H}(\pm q_n, p) = p^2 + q_n^2$  y, por lo tanto, es  $q(t)^2 < q_n^2$  (pues si fuera  $q = \pm q_n$ , entonces sería  $p^2 = 2\mathcal{H} - q_n^2 < 0$ ). Por otra parte es  $p(t)^2 \leq 2\mathcal{H} + q(t)^2 < 2q_n^2$ . Finalmente  $q(t)^2 + p(t)^2 < 3q_n^2$ . Por lo tanto demostramos estabilidad alineal, en el sentido definido en la Introducción, con  $\eta \leq n^{-1} \leq \varepsilon/\sqrt{3}$ .

El segundo ejemplo de la Sec. 2 es más "normal" que el recién descrito. Mediante el cambio de variables  $z_1 = q_1 + ip_1$ ,  $z_2 = 2(q_2 - ip_2/\alpha)$ , el sistema (7) puede escribirse como un hamiltoniano canónico donde  $\mathcal{H}(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_1^2 + \alpha q_2^2 + \frac{1}{\alpha}p_2^2 + p_1^2 p_2 - q_1^2 p_2 + 2\alpha q_1 p_1 q_2$ ; en término de las  $\mathcal{I}_j$ , definidas en (8), es  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{I}_1 + \alpha\mathcal{I}_2$ . El origen es un equilibrio; si  $\alpha > 0$ , entonces  $\delta^2\mathcal{H} > 0$  allí y por lo tanto ese punto es estable. Los equilibrios (12), por otra parte, son tales que  $\delta\mathcal{H} = 0$  y  $\delta^2\mathcal{H} \geq 0$ . Efectivamente, se vio en la Sec. 2 que son inestables. El sistema reducido a tres variables (13) es hamiltoniano pero singular (no puede ser canónico, ya que el número de variables en el espacio de estados es impar).

Un sistema *hamiltoniano singular* [7] es uno caracterizado por la función  $\mathcal{H}(\mathbf{x})$  y el tensor de Poisson  $\mathbb{J}(\mathbf{x})$ , el cual es antisimétrico y satisface la igualdad de Jacobi [8], tal que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J}(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Las ecuaciones canónicas (16) también pueden ser escritas en esta forma, donde  $\det \mathbb{J} \neq 0$ ; lo que hace especiales a los sistemas singulares es que  $\det \mathbb{J} = 0$ , por lo que existe un

espacio nulo de  $\mathbb{J}$  (desarrollado, en cada  $\mathbf{x}$ , por las autosoluciones  $\{\hat{\mathbf{u}}_a\}$  de  $\mathbb{J}\hat{\mathbf{u}}_a = 0$ ). Más precisamente, la antisimetría de  $\mathbb{J}$  y la igualdad de Jacobi aseguran que hay soluciones no triviales de

$$\mathbb{J}(\mathbf{x}) \nabla C_a(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \tag{18}$$

las funciones  $C_a(\mathbf{x})$  son llamados *casimires* del tensor de Poisson [9]. Un resultado muy importante es que en casi todo el espacio de estados, el número de casimires es igual al corranjo de  $\mathbb{J}$ ; dicho de otra forma,  $\{\nabla C_a(\mathbf{x})\}$  es una base completa en el espacio nulo de  $\mathbb{J}(\mathbf{x})$  [10]. (Más adelante se da un ejemplo de esto.)

Como se expresó más arriba, los puntos de equilibrio de un sistema hamiltoniano canónico corresponden a soluciones de  $\nabla \mathcal{H} = \mathbf{0}$ , ya que  $\det \mathbb{J} \neq 0$ . Para un sistema singular, en cambio,  $\mathbb{J}(\mathbf{X}) \nabla \mathcal{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$  corresponde a

$$\delta \mathcal{H}_C = 0 \quad \text{en } \mathbf{x} = \mathbf{X}, \quad \mathcal{H}_C = \mathcal{H} + \sum_a \lambda_a C_a \tag{19}$$

donde las  $\lambda_a$  son constantes. Para  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}$  es  $\nabla(\mathcal{H} + \sum_a \lambda_a C_a) = \mathbf{M}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{x} + O(\delta \mathbf{x}^2)$ , por lo que la evolución de una perturbación infinitesimal (1) tiene la forma

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J}(\mathbf{X}) \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial(\delta \mathbf{x})},$$

$$\mathcal{H}_2(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{H}_C.$$

En otras palabras, el problema linealizado puede ser escrito en la forma (17), con  $\mathbb{J} = \mathbb{J}(\mathbf{X})$  y el hamiltoniano  $\mathcal{H}_2(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{H}_C = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x})^T \mathbf{M}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{x}$ . La estabilidad formal se basa en que  $\mathcal{H}_2(\delta \mathbf{x})$  (que es una integral de movimiento del problema linealizado) tenga un máximo (o un mínimo) en  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Esto incluye como caso particular a los canónicos, para los cuales el término  $\sum_a \lambda_a C_a$  no está presente y  $\mathcal{H}_2(\delta \mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{H}$ .

Por ejemplo, las Ecs. (13) del sistema de la Sec. 2.2 en el espacio reducido de tres dimensiones pueden ser escritas en la forma  $\dot{\mathbf{x}} = 4z^{-1} \nabla \mathcal{I}_2 \times \nabla \mathcal{I}_1 = -4z^{-1} \nabla \mathcal{I}_1 \times \nabla \mathcal{I}_2$ , donde los  $\mathcal{I}_j$  están definidas en (14). Ésta es justamente la forma de un sistema hamiltoniano singular en un espacio de tres dimensiones, donde  $\mathcal{H} = \mathcal{I}_1$  y  $\mathbb{J}\mathbf{u} = 4z^{-1} \nabla \mathcal{I}_2 \times \mathbf{u}$  (para  $\mathbf{u}$  arbitrario), o sea

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -4y & 2z \\ 4y & 0 & 0 \\ -2z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por ser  $\mathbb{J}$  lineal en  $\mathbf{x}$  se dice que es un tensor de *Lie-Poisson* [6]. (También se podría elegir  $\mathcal{H} = \mathcal{I}_2$  y  $\mathbb{J}\mathbf{u} = -4z^{-1} \nabla \mathcal{I}_1 \times \mathbf{u}$ , pero este tensor de Lie-Poisson tiene una singularidad en  $z = 0$ .) Es fácil ver que el corranjo de  $\mathbb{J}$  es uno y el vector nulo es  $\nabla \mathcal{I}_1$ , salvo para el punto  $y = z = 0$ . En las superficies (bidimensionales)  $\mathcal{I}_1 = \text{cte.}$ , el sistema se puede a su vez reducir a uno canónico, pero la transformación es complicada e innecesaria para establecer estabilidad.

## 4. Conclusiones

Un marco bastante general donde se puede estudiar el problema de estabilidad es el de un sistema hamiltoniano singular, donde las integrales de movimiento son el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  y los casimires  $C_a$ . En un cierto equilibrio se puede encontrar, en general,  $\mathcal{C} = \sum_a \lambda_a C_a$  tal que  $\delta(\mathcal{H} + \mathcal{C}) = 0$ . Un criterio de estabilidad formal, más débil que  $\delta^2(\mathcal{H} + \mathcal{C}) > 0$  ó  $< 0$  (para perturbaciones arbitrarias), es

$$\delta^2 \mathcal{H}|_{\mathcal{C}=\text{cte.}} > 0 \quad (\text{ó } \delta^2 \mathcal{H}|_{\mathcal{C}=\text{cte.}} < 0).$$

Este sistema singular puede provenir de la reducción de uno canónico, en un espacio de más dimensiones, que se obtiene al eliminar ciertas variables. Los casimires  $C_a$  son una propiedad del espacio reducido, y corresponden a los generadores de las transformaciones a lo largo de las variables ignoradas, en el sistema original. A su vez, la dinámica en el subespacio  $\mathcal{C} = \text{cte.}$  puede escribirse en forma canónica, con  $\mathcal{H}_C(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{H} + \mathcal{C}$ ; los extremos de  $\mathcal{H}_C$  son equilibrios estables en el espacio reducido. Esta transformación a variables canónicas no es siempre posible y, de todos modos, no es necesaria para establecer estabilidad.

El ejemplo de la Sec. 2.1 es especial porque los modos normales, los autovectores de  $\mathbb{L}(\mathbf{X})$ , no forman una base completa; de hecho, el sistema es *linealmente inestable* porque hay perturbaciones infinitesimales que crecen como  $t$  (lo cual no tiene la forma de un modo normal). Para establecer la *estabilidad alineal* fue necesario analizar el término de grado superior en el hamiltoniano.

Para el ejemplo de la Sec. 2.2, en cambio, los modos normales sí forman una base completa, y estos son osciladores elementales (el sistema es *espectralmente estable*). Llamemos al valor de  $\mathcal{H}_2(\delta \mathbf{x})$  evaluada en cada modo su "energía". Cuando todos los modos tienen energía del mismo signo, el punto de equilibrio es formalmente estable, lo que para sistemas con un número finito de variables implica estabilidad alineal. Cuando hay modos con energías de signos opuestos, en cambio, el sistema puede ser *alinealmente inestable* (por ejemplo, a través del fenómeno de interacción resonante explosiva) [11]. Esto es muy diferente al caso espectralmente inestable, cuyos modos crecientes (o decrecientes) tienen energía nula.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el presupuesto interno del CICESE y por CONACyT (México) mediante el proyecto 26670-T. Agradezco a mis alumnos por generar la motivación a clarificar estos temas, y a Julio Sheinbaum y Oscar Velasco por correcciones al manuscrito.

1. M.E. McIntyre and T.G. Shepherd, *J. Fluid Mech.* **181** (1987) 527.
2. Para el caso discreto es  $\delta\mathcal{I} = \nabla\mathcal{I}(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{x}$ ,  $\delta^2\mathcal{I} = \delta\mathbf{x} \cdot \nabla(\nabla\mathcal{I})(\mathbf{X}) \cdot \delta\mathbf{x}$ , etc. Cuando  $\mathcal{I}$  es una funcional de campos,  $\delta^n\mathcal{I}$  debe interpretarse en el sentido de variación de funcionales.
3. La restricción  $\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}q^4 = \mathcal{H}$  implica la órbita  $r^2 = 4\mathcal{H}/[(\sin^4\theta + 4\mathcal{H}\cos^4\theta)^{1/2} + \sin^2\theta]$ . La distancia mínima  $\Phi^{-1}(\mathcal{H})$  corresponde a  $\theta = \pm\pi/2$ , mientras que la máxima  $\phi^{-1}(\mathcal{H})$  corresponde a  $\theta = 0, \pi$  si  $4\mathcal{H} \leq 1$  ó a  $\sin^2\theta = (4\mathcal{H} - 1)/(4\mathcal{H} + 1)$  si  $4\mathcal{H} > 1$ .
4. P. Ripa, *AIP Proceedings* **106** (1984) 537.
5. P. Ripa, *J. Fluid Mech.* **103** (1981) 87.
6. P.J. Morrison, en *Geometrical Methods in Fluid Mechanics*, edited by Rick Salmon, (Woods Hole Oceanographic Institution, Woods Hole, Massachusetts, 1994) p. 17.
7. P. Ripa, *Rev. Mex. Fís.*, **38** (1992) 984.
8. O sea,  $\mathbb{J}^{ij} + \mathbb{J}^{ji} = 0$  y  $\mathbb{J}_{,i}^{ij} \mathbb{J}^{lk} + \mathbb{J}_{,l}^{ki} \mathbb{J}^{lj} + \mathbb{J}_{,l}^{jk} \mathbb{J}^{li} = 0$ , donde el subíndice  $l$  luego de la coma indica derivación con respecto a  $x^l$ , y se sobreentiende suma sobre índices repetidos.
9. Nótese que para un sistema hamiltoniano singular no hay un hamiltoniano único, ya que haciendo  $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} + \sum_a \lambda_a C_a$ , con  $\lambda_a$  arbitrarios, el sistema (17) queda inalterado.
10. R.G. Littlejohn, *AIP Proceedings* **88** (1982) 47.
11. R.A. Cairns, *J. Fluid Mech.* **92** (1979) 1; P.J. Morrison, and M. Kotschenreuther, en *Nonlinear World: IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, (Kiev, USSR, 1990) p. 910.