

Dinámica de geodésicas en los pp-espacio-tiempos de Einstein-Maxwell

A.I. Nesterov¹ y F. Aceves de la Cruz*
 Departamento de Física, Universidad de Guadalajara
 Guadalajara Jalisco, Mexico
 e-mail: ¹nesterov@udgserv.cencar.udg.mx

Recibido el 10 de abril de 2000; aceptado el 16 de agosto de 2000

Se estudian las geodésicas correspondientes a los pp-espacio-tiempos de Einstein-Maxwell. Se muestra que bajo ciertas condiciones el comportamiento de las geodésicas se vuelve caótico.

Descriptores: Ondas gravitacionales; caos

We study the dynamics of geodesics in Einstein-Maxwell pp-wave spacetimes. The chaotic and non-chaotic behavior of geodesics is demonstrated.

Keywords: Gravitational waves; chaos

PACS: 04.30.-w; 04.20.Jb; 05.45.+b; 95.10.Fh

1. Introducción

En los últimos años el estudio del caos se ha difundido en muchas áreas de la ciencia, entre ellas la relatividad general, donde el caos puede presentarse en dos formas: en la geometría del espacio-tiempo o bien en la dinámica de las geodésicas. Las primeras soluciones a las ecuaciones de Einstein cuyo comportamiento caótico fue detectado, fueron los modelos cosmológicos anisótropos (en particular el modelo de Bianchi tipo IX, o universo mixmaster), pero no son las únicas: las geodésicas en el espacio-tiempo de dos hoyos negros de Reissner-Nordström y en espacio-tiempo perturbado de Schwarzschild presentan comportamiento dinámico caótico, etcétera (ver Ref. 1 y otras ahí citadas). Entre otros sistemas, recientemente fue mostrado que en algunos casos particulares las ondas gravitacionales con fronteras planas y rayos paralelos (*pp-ondas*) tienen geodésicas cuyo comportamiento es caótico [2-4].

En general, la métrica de las pp-ondas depende de una función arbitraria; sin embargo, para que esta métrica satisfaga las ecuaciones de Einstein-Maxwell, se restringe la función a cumplir ciertas condiciones. Entre las funciones que satisfacen estas condiciones existen algunas para las que el sistema posee cierta simetría [5]; así mismo, con funciones independientes del tiempo se puede utilizar el formalismo hamiltoniano en el estudio de la dinámica de las geodésicas [2, 3].

En las Refs. 2-4 se analizan casos con funciones polinomiales independientes del tiempo. En nuestro trabajo nos ocupamos de las pp-ondas en presencia de campo electromagnético, para una función construida como combinación de funciones trigonométricas y polinomiales de tal forma que el sistema posee cierta simetría, además de la independencia del tiempo.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en la Sec. 2 se estudia la dinámica de las geodésicas utilizando el criterio local de inestabilidad [4, 7], para determinar en

qué casos las geodésicas se comportarán caóticamente. En la Sec. 3, utilizando el paquete MAPLE V (R.5), se estudian los espacio-tiempos particulares. La Sec. 4 contiene las conclusiones obtenidas con este trabajo.

2. Dinámica de las geodésicas y criterio local de inestabilidad

La métrica correspondiente a los pp-espacio-tiempos de Einstein-Maxwell es

$$ds^2 = 2d\zeta d\bar{\zeta} - 2 du dv - 2h(\zeta, \bar{\zeta}, u) du^2 \quad (1)$$

donde $\zeta = (x + iy)/\sqrt{2}$; $u = t - z$; $v = t + z$; además, h debe tener la forma $h(\zeta, \bar{\zeta}, u) = \Re f(\zeta, u) + \kappa_0 F(\zeta, u) \bar{F}(\bar{\zeta}, u)$, con f y F funciones analíticas arbitrarias y κ_0 como la constante gravitacional [5].

Las ecuaciones de geodésicas correspondientes a la métrica (1) son

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\dot{u}(h_{,\zeta}\dot{\zeta} + h_{,\bar{\zeta}}\dot{\bar{\zeta}}) + h_{,u}\dot{u}^2 &= 0, \\ \ddot{\zeta} + h_{,\bar{\zeta}}\dot{u}^2 &= 0, \\ \ddot{\bar{\zeta}} + h_{,\zeta}\dot{u}^2 &= 0, \\ \ddot{u} &= 0. \end{aligned}$$

La solución a este sistema quedará determinada al resolver $\ddot{\zeta} + h_{,\bar{\zeta}}\dot{u}^2 = 0$. Si h es independiente del tiempo, se puede estudiar el comportamiento de las geodésicas mediante la función de Hamilton

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y),$$

donde el potencial está dado como $U(x, y) = V^2 h$ y $V \equiv \dot{u} = \text{const}$ [2, 3].

Para estudiar el comportamiento de las trayectorias en el espacio de fase utilizaremos el criterio local de inestabilidad

desarrollado en [7]. De este trabajo, la ecuación para el vector de desviación es

$$\frac{\partial \eta_a}{\partial t} = \mathbf{M} \cdot \vec{\eta}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot \text{Hess}$ es el producto de la matriz simpléctica y la matriz hessiana. En general no es fácil resolver esta ecuación. Sin embargo, podemos trabajar en el sistema donde \mathbf{M} tiene forma diagonal, con lo cual (2) se simplifica a

$$\dot{\eta}_a - \lambda_a \eta_a = 0,$$

donde λ_a son los eigenvalores de \mathbf{M} . La solución de esta ecuación (si λ_a no depende del tiempo) es

$$\eta_a = \eta_a(0)e^{\lambda_a t}. \tag{3}$$

Cabe aclarar que en general, los eigenvalores de \mathbf{M} dependen del tiempo, por lo cual la solución (3) es válida sólo para tiempos cortos; de aquí que se le dé el nombre de "local" a este criterio.

Para nuestro caso, los eigenvalores de la matriz \mathbf{M} son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{-(U_{xx} + U_{yy}) + \sqrt{(U_{xx} + U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)}}{2}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{-(U_{xx} + U_{yy}) - \sqrt{(U_{xx} + U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)}}{2}}, \\ \lambda_3 &= -\sqrt{\frac{-(U_{xx} + U_{yy}) + \sqrt{(U_{xx} + U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)}}{2}}, \\ \lambda_4 &= -\sqrt{\frac{-(U_{xx} + U_{yy}) - \sqrt{(U_{xx} + U_{yy})^2 - 4(U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)}}{2}}. \end{aligned}$$

Es de notar que en todas las ecuaciones anteriores aparece el término $U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2$, que coincide con el numerador de la función de curvatura gaussiana [13]. Con esto podemos esperar que, si la curvatura gaussiana del potencial es negativa, los eigenvalores de \mathbf{M} tendrán partes reales no nulas, y así las componentes del vector de desviación (3) se comportarán exponencialmente, con lo cual las trayectorias de la partícula que en principio pudieron ser cercanas, comenzarán a alejarse entre sí, lo cual caracteriza la aparición de movimiento caótico [7]. De aquí que esperamos que el movimiento se vuelva caótico si la curvatura gaussiana de $U(x, y)$ se vuelve negativa.

3. Simulaciones gráficas

A continuación aplicaremos el criterio de inestabilidad presentado en la sección anterior y las secciones de Poincaré [14], para estudiar el movimiento de una partícula en dos potenciales diferentes: el primero tomado de la Ref. 4, con forma

$$U(\zeta, \bar{\zeta}) = V^2 (\Re \zeta^n + a \kappa_0 |\zeta|^{2m}), \quad a = \text{const.},$$

para el caso de $n = 2m$ (las otras opciones ya fueron estudiadas en el artículo citado).

El segundo potencial tiene un término exponencial y otro polinomial, y es

$$U(\zeta, \bar{\zeta}) = V^2 (\Re e^{2a\zeta} + \kappa_0 |\zeta|^{2m}).$$

Para ambas funciones de potencial el análisis es similar: a partir del potencial obtenemos la función de curvatura gaussiana [13]

$$K = \frac{U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2}{1 + U_{xx}^2 + U_{yy}^2},$$

para después localizar las zonas donde $K < 0$, $K = 0$ y $K > 0$, y utilizando el criterio presentado en la sección anterior predecir cuándo esperamos que el movimiento sea regular, y cuándo caótico. Con base en esto obtenemos las condiciones iniciales para simular el movimiento de la partícula y construir la sección de Poincaré correspondiente, para con ella poner a prueba nuestras predicciones.

3.0.1. Función polinomial ($n = 2m$)

Tomamos la función de potencial

$$U(x, y) = V^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2^n}} \Re(x + iy)^n + \frac{1}{2^m} \kappa |(x + iy)|^{2m} \right],$$

con $\kappa = a \kappa_0$. Analizaremos el caso $n = 2m$ (las otras combinaciones posibles fueron estudiadas en la Ref. 4), y en particular $n = 2, m = 1$; para simplificar hacemos $V = \sqrt{2}$. De esta forma,

$$U(x, y) = (\kappa + 1)x^2 + (\kappa - 1)y^2.$$

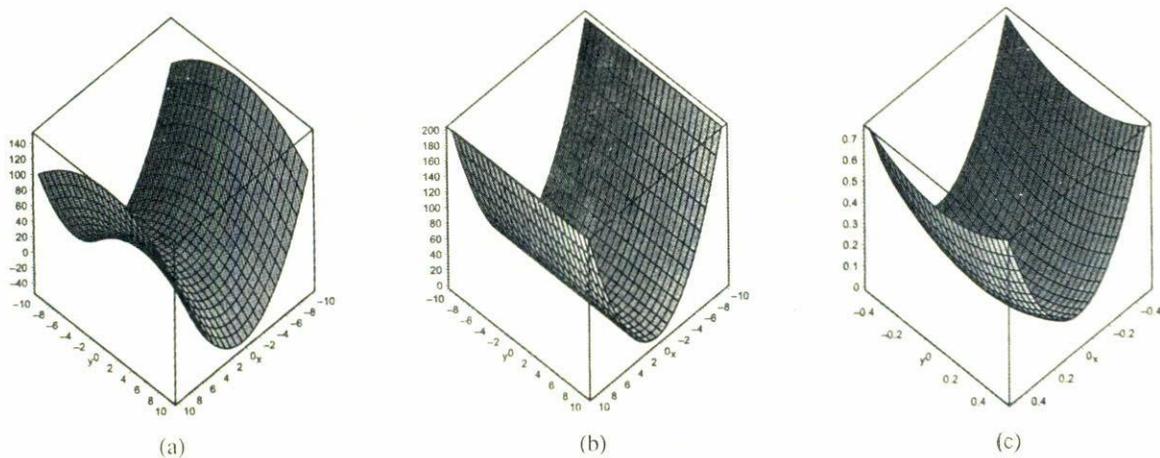


FIGURA 1. Caso polinomial con $m = 1, n = 2$ y (a) $\kappa = 0.5$, (b) $\kappa = 1$ y (c) $\kappa = 1.5$.

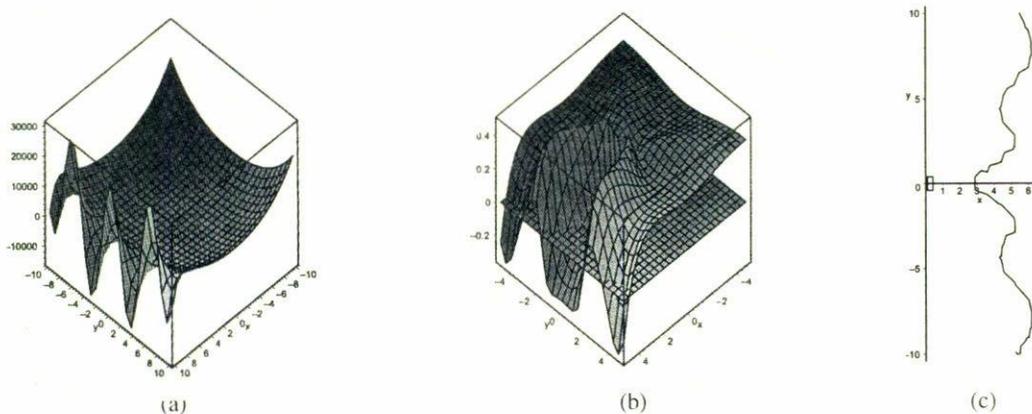


FIGURA 2. (a) Función de potencial para $\kappa = 0.5$, (b) curvatura gaussiana y (c) curvas con curvatura nula.

Las gráficas de este potencial, con diferentes valores de κ se muestran en la Fig. 1. Como puede verse, para $\kappa \leq 1$ los potenciales son abiertos por el eje y , con lo cual en general una partícula en este campo tendrá movimiento infinito, a menos que su velocidad sea paralela al eje x .

Además, la función de curvatura gaussiana es una constante que sólo depende del valor de κ como

$$K = \frac{4(\kappa^2 - 1)}{9 + 8\kappa^2};$$

de modo que K es negativa si $\kappa < 1$, cero para $\kappa = 1$ y positiva cuando $\kappa > 1$. En vista de lo anterior, esperamos que el movimiento sea, o regular ($\kappa > 1$), o caótico ($\kappa < 1$). La única incógnita es para $\kappa = 1$ (curvatura nula), donde cualquiera de las dos tipos de movimiento puede presentarse, dependiendo del signo de la suma $U_{xx} + U_{yy}$.

3.0.2. Función con factores exponencial y polinomial

Consideramos la función $h(\zeta, \bar{\zeta}) = \Re e^{2a\zeta} + \kappa_0 |\zeta|^4$. El espacio-tiempo correspondiente a esta función tiene simetría de vacío G_3 y vectores de Killing $\partial_v, \partial_u, \partial_\zeta + \partial_{\bar{\zeta}} - a(u\partial_u -$

$v\partial_v)$ [5]. Por conveniencia, hacemos los cambios de variables $2a\zeta \rightarrow \sqrt{2}\zeta$ y $\kappa_0/4a^4 \rightarrow \kappa$. Así, la función de potencial correspondiente, en términos de x y y , es

$$U(x, y) = V^2 [e^x \cos y + \kappa(x^2 + y^2)^2]. \quad (4)$$

En este caso κ no es una constante, dado que depende del parámetro a , por lo cual se le pueden asignar diferentes valores. Elegimos $V = 1$ para los experimentos computacionales. Con esto, encontramos que el comportamiento del potencial y la curvatura gaussiana es el mismo para $0 \leq \kappa \leq 1.5$; por ello tomamos $\kappa = 0.5$.

En las gráficas correspondientes al potencial (4) se ve que, en cuanto al signo de la curvatura, existen tres regiones para esta función de potencial (ver Fig. 2): dos con curvatura negativa (una es un "pico" que atraviesa al plano xy por el origen, y la otra son los picos cuasi-sinusoidales cuyas intersecciones con el plano xy pueden verse en los cuadrantes I y IV de la Fig. 2c), y una con curvatura positiva. Ésto nos hace esperar que existan valores críticos de energía a partir de los cuales el movimiento pase de regular a caótico o viceversa.

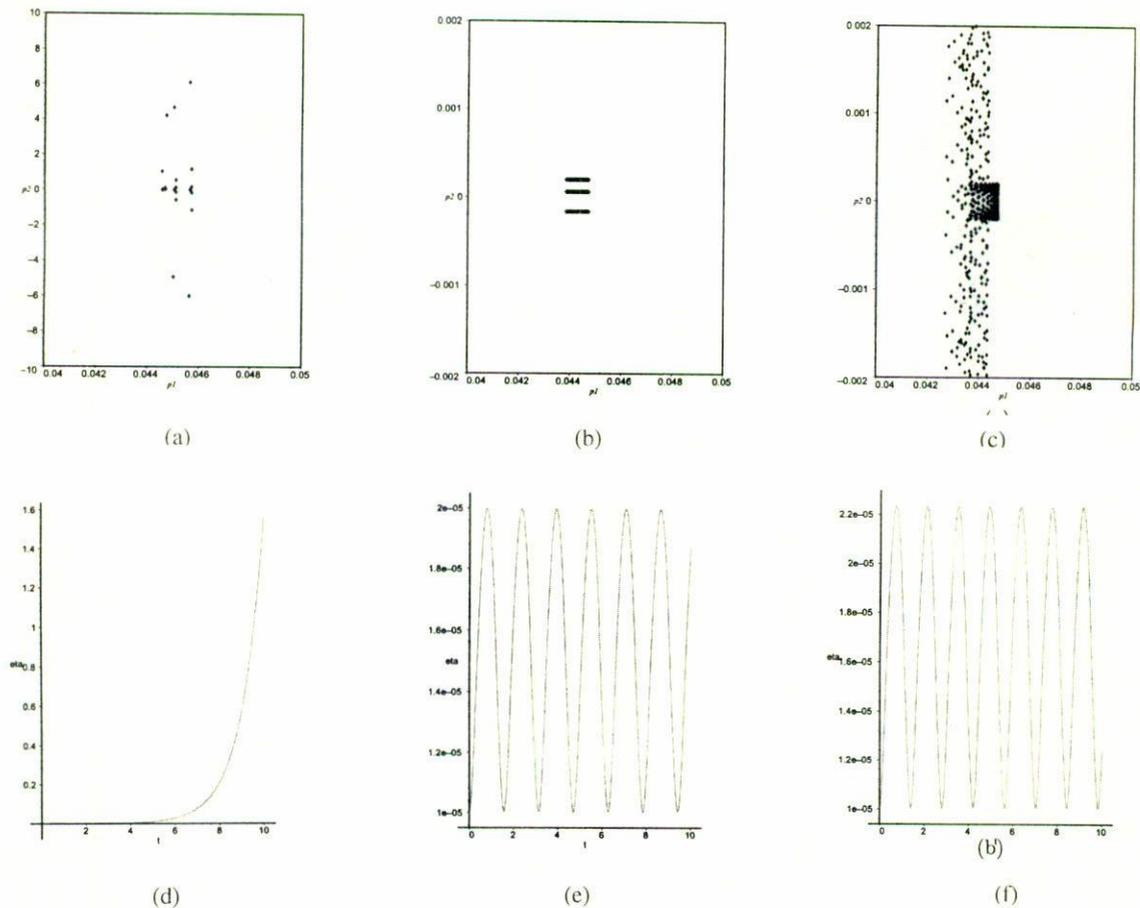


FIGURA 3. Sección de Poincaré ($E = .999 \times 10^{-3}$) [Vector de desviación] para $m = 1$ y (a)[(d)] $\kappa = 0.5$, (b)[(e)] $\kappa = 1$, (c)[(f)] $\kappa = 1.5$.

3.1. Aplicaciones de secciones de Poincaré

A continuación se presentan las secciones de Poincaré correspondientes a los casos mencionados en el apartado anterior. Para obtener estas gráficas, se simuló el movimiento de una partícula en un potencial dado. Las condiciones iniciales para la simulación se eligieron de acuerdo con los siguientes criterios: que el movimiento de la partícula se desarrollara en una región con determinada curvatura gaussiana (aquí intervienen los valores de la energía y las velocidades iniciales); para los potenciales abiertos, se escogieron velocidades y posiciones iniciales de tal forma que la partícula cruzara el plano de referencia antes de escapar; además se consideraron en cada corrida cinco trayectorias diferentes con puntos iniciales sobre una circunferencia alrededor de un punto de interés (mínimo de energía, cero de la curvatura, etc.).

3.1.1. Caso polinomial (para $n = 2, m = 1$)

En la Fig. 3a se presenta la sección de Poincaré para el caso $K < 0$. Ésta se construyó con muy pocos puntos dado que el potencial es abierto (ver Fig. 1), y muchas de las trayectorias escapan a infinito cruzando sólo una vez el plano $p_1 p_2$. Sólo con este criterio no es posible decir si el movimiento es caótico o no. Sin embargo, en la Fig. 3d se observa que el

vector de desviación se comporta exponencialmente, por tanto el movimiento es caótico, de acuerdo con las predicciones teóricas.

Con $\kappa = 1$ ($K = 0$), el movimiento es regular (ver Figs. 3b y 3e). Se muestran unas cuantas trayectorias, dado que este potencial también es abierto (Fig. 1b). Además, el vector de desviación oscila, lo que demuestra que el movimiento es regular (Fig. 1c).

Por último, para $\kappa = 1.5$ ($K > 0$) el potencial es cerrado (Fig. 1b), y como se ve en las Figs. 3c y 3f el movimiento es regular, tal como esperábamos.

3.1.2. Caso con factores exponencial y polinomial

El término $e^x \cos y$ es el factor dominante en el potencial (ver Fig. 2a):

$$U(x, y) = e^x \cos y + \kappa(x^2 + y^2)^2. \tag{5}$$

El resultado de graficar esta función en un intervalo menor es la gráfica de la Fig. 4a, donde podemos ver que existe una región en la que, para valores de energía bajos, la partícula puede presentar movimiento finito (ver la ampliación en Fig. 4b). Además, en la Fig. 2c vemos que existe una zona con curvatura negativa en esta región, y está justamente alrededor del origen de coordenadas.

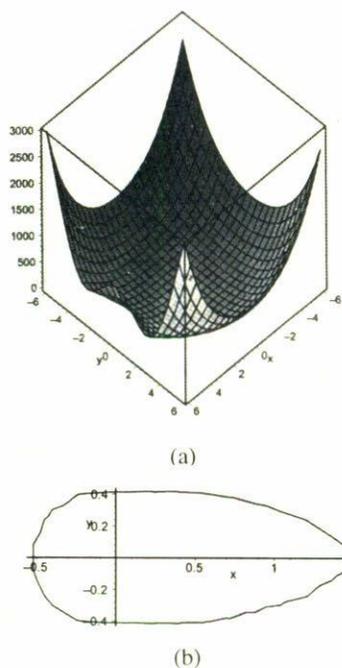


FIGURA 4. (a) Función de potencial para $\kappa = 0.5$ y (b) frontera entre curvatura gaussiana positiva y negativa.

De acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, el movimiento de la partícula debe ser caótico en las regiones donde la curvatura sea negativa. Ahora bien, debe existir un valor de energía a partir del cual la partícula pueda pasar de la zona de potencial con curvatura positiva a la región del mismo donde la curvatura es negativa (en adelante denominaremos a este valor como energía crítica).

Para encontrar el valor de la energía crítica hacemos las siguientes consideraciones con base en los resultados hasta aquí obtenidos: este valor debe corresponder a un punto de la curva $K = 0$ (ver Figs. 2c y 4b); dada la forma creciente del potencial (Figs. 2a y 4a), la energía crítica no puede ser un

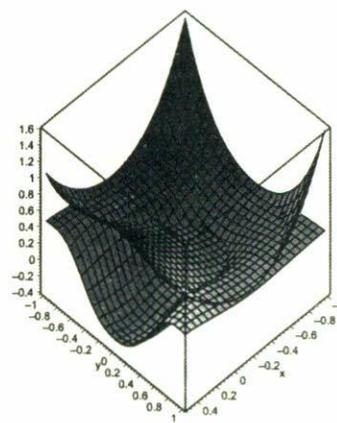


FIGURA 5. Superposición de la función de potencial y la curvatura gaussiana.

máximo. En principio, entonces debe existir un mínimo valor de energía en la región alrededor del origen donde la función de potencial tiene curvatura negativa (Figs. 2c y 4b), dado que allí es donde, a curvatura nula, x y y toman sus valores absolutos más pequeños. En vista del factor exponencial en (5), esperamos que el mínimo de energía crítica corresponda a $x < 0$, y puesto que este potencial es función par en y , también podemos prever que, o existen dos puntos con energía crítica mínima ($x_c < 0$ y $\pm y_c$), o bien sólo existe uno donde $y_c = 0$ y $x_c \approx -0.5$ (ver Fig. 4b). Para decidir cuál de estas opciones es la correcta, hacemos lo siguiente: en el punto $(-0.539, 0)$, la energía potencial vale 0.6253; con esto, graficamos en una sola figura la función de curvatura gaussiana (Fig. 2b) y $F(x, y) = U - 0.6253$ obteniendo la Fig. 5. La curva de $K = 0$ corresponde a la intersección de ambas gráficas; así, podemos ver que el punto sobre esta curva donde la energía crítica es mínima es $x = -0.539$ y $y = 0$; a la energía correspondiente a este punto la llamaremos "energía crítica" ($E_c = 0.6253$). En vista de lo anterior, analizaremos el movimiento de la partícula con condiciones iniciales alrededor del punto $(-0.641, 0)$. Dependiendo de los valores de

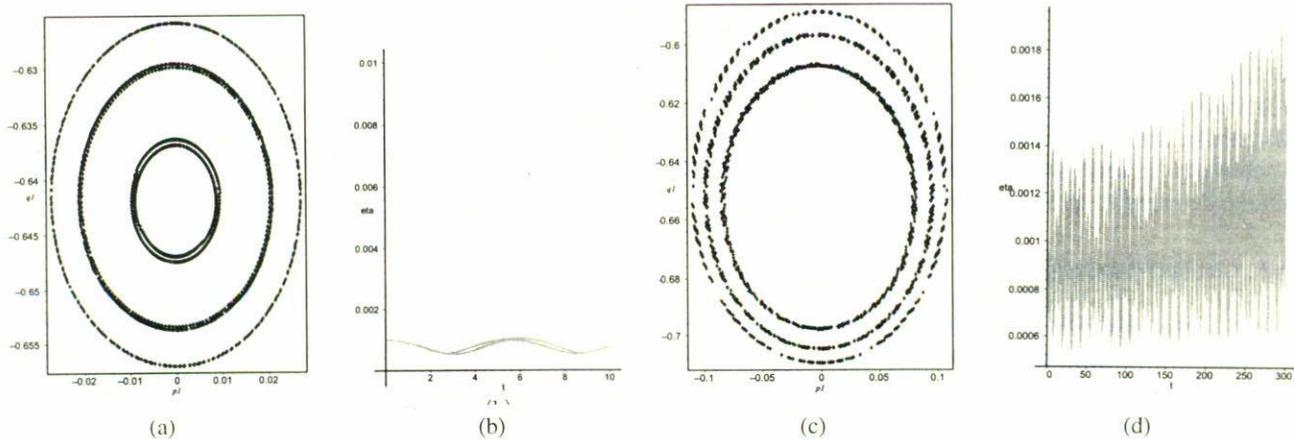


FIGURA 6. Sección de Poincaré [Vector de desviación] para (a)(b) $E = 0.611998$ y (c)(d) $E_c = 0.6253$.

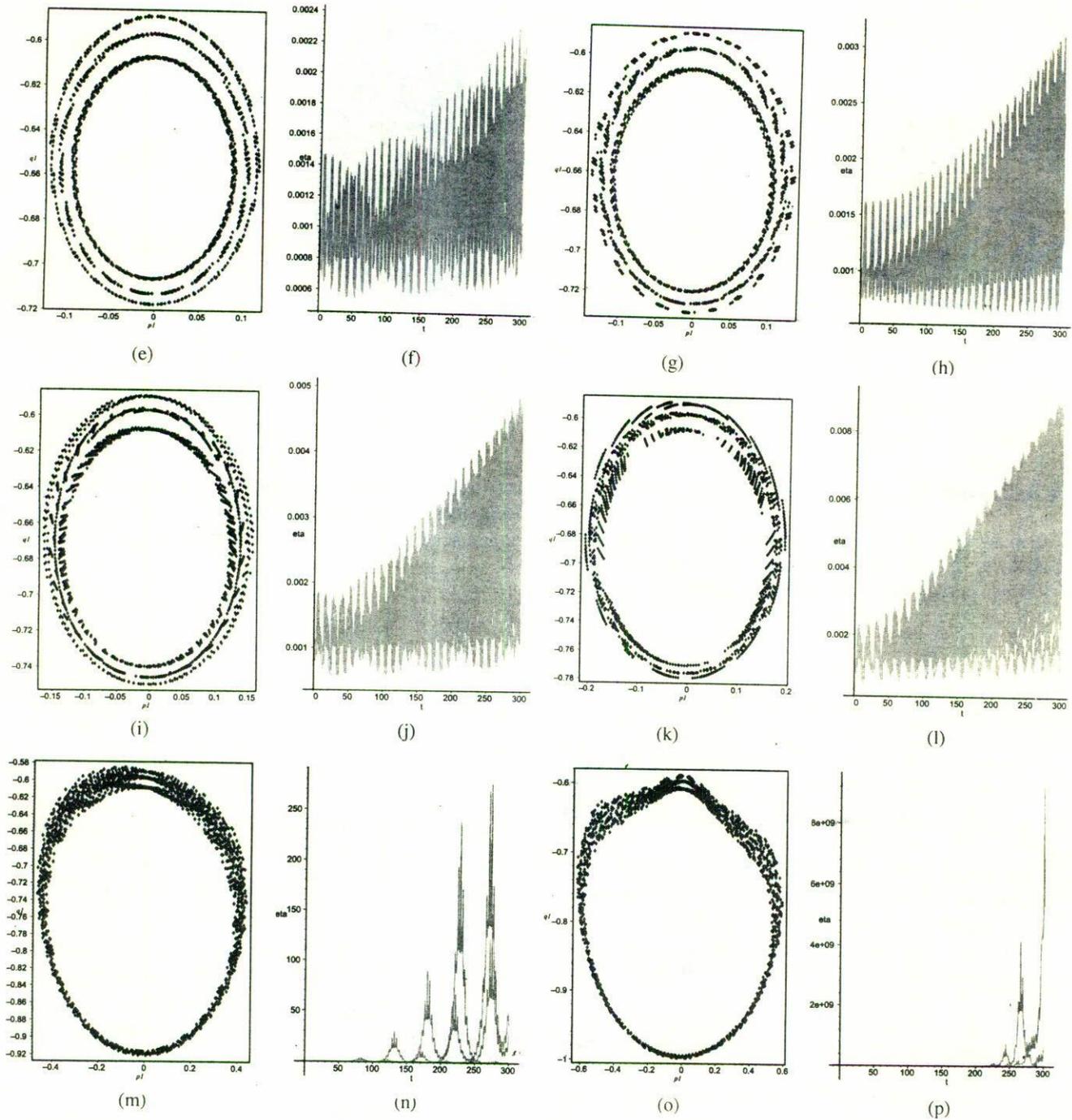


FIGURA 6. (continuación) Sección de Poincaré [Vector de desviación] para (e)[(f)] $E = 0.63$, (g)[(h)] $E = 0.637778$, (i)[(j)] $E = 0.64999$, (k)[(l)] $E = 0.67$, (m)[(n)] $E = 0.8$, (o)[(p)] $E = 0.9$.

la energía, E , tenemos los siguientes casos: Para $E = 0.611998$ podemos ver en la sección de Poincaré correspondiente (Fig. 6a) que el movimiento es regular, como lo demuestra el comportamiento de la magnitud del vector de desviación, que está oscilando alrededor de un valor (Fig. 6b). A medida que el valor de h aumenta, la sección de Poincaré

Fig. 6a se va destruyendo (ver Figs. 6c, 6e, 6g, 6i, 6k, 6m, 6o, 6q y 6s) y el vector de desviación (Fig. 6b) cambia su comportamiento de sinusoidal a exponencial a partir de la energía crítica (Fig. 6d). En las Figs. 6q y 6s observamos cómo se pasa de caos a caos total, y el comportamiento del vector de desviación es totalmente exponencial (Figs. 6r y 6t).

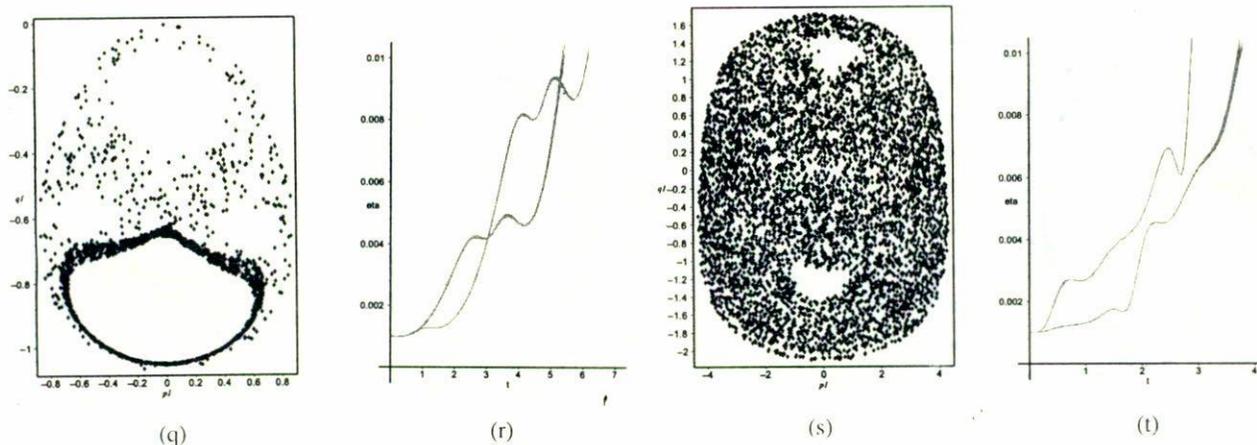


FIGURA 6. (continuación) Sección de Poincaré [Vector de desviación] para (q)|(r) $E = 1$ (s)|(t) $E = 10$.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos confirman el marco teórico presentado en la Sec. 2: mientras el movimiento tiene lugar en regiones donde la curvatura de la función de potencial es positiva,

éste tiene comportamiento regular (ver Figs. 4b, 6a y 6b); al desarrollarse en zonas con curvatura negativa de la función de potencial, el movimiento se torna caótico (Figs. 4b, 6e y 6f).

* Actualmente en el Instituto de Física, Universidad de Guanajuato, León, Gto., Mexico, e-mail: fermin@ifug2.ugto.mx

1. D. Hobill, A. Burd, and A. Coley, *Deterministic Chaos in General Relativity*, (Plenum Publishing Corporation, USA, 1994).
2. J. Podolský and K. Veselý, *Class. and Quantum Grav.* **15** (1998) 3505.
3. J. Podolský, K. Veselý, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 081501.
4. A.I. Nesterov, *Chaos in Einstein-Maxwell pp-wave Spacetimes*, (submitted to *Classical and Quantum Gravity*).
5. D. Kramer, H. Stephani, M.A.H. MacCallum, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
6. H. Stephani, *General Relativity: An Introduction to the Theory of Gravitational Field*, (Cambridge University Press, New York, 1990).
7. A.I. Nesterov and P. Torres Tonche, *Rev. Mex. Fís.* **45** (1999) 1834.
8. S.M. Carroll, *Lecture notes on General Relativity*, gr-qc/9712019.
9. B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
10. W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco, 1973).
11. P. Ryan and L.C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, (Princeton University Press, Princeton, 1975).
12. A.P. Lightman et al., *Problem Book in Relativity and Gravitation*, (Princeton University Press, Princeton, 1979).
13. B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, and A.T. Fomenko, *Modern Geometry: Methods and Applications*, (Springer Verlag, New York, 1990).
14. E.S. Cheb-Terrab and H.P. de Oliveira, *Computer Physics Communications* **95** (1996) 171.