

Implicaciones de ordenamiento normal en supersimetría

Moisés E. Araiza García

Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas", Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
 Apartado postal J-48, 72570 Puebla, Pue., Mexico
 e-mail: moises@sirio.ifuap.buap.mx

Recibido el 13 de marzo de 2000; aceptado el 15 de junio de 2000

Se estudian las implicaciones del ordenamiento normal en teorías supersimétricas. En particular se demuestra para estas teorías que la igualdad del hamiltoniano con el hamiltoniano ordenado normalmente, solamente se mantiene al nivel de árbol debido a la ausencia de diagramas de *tadpole* en la teoría ordenada normalmente, que es descrita por el hamiltoniano ordenado normalmente. En esta última se destruye la cancelación de las divergencias cuadráticas lo cual aparece como un rompimiento explícito de la supersimetría, que se sabe ocurre para teorías supersimétricas.

Descriptores: Supersimetría; teoría cuántica de campo; teoría de perturbaciones

We study the consequences of normal ordering in supersymmetric theories. In particular, the equality of hamiltonian is demonstrated for these theories, with the normally ordered hamiltonian, and kept at level tree due to the absence of tadpole diagrams in a normally ordered hamiltonian. Besides this theory destroys the cancellation of quadratic divergences, appearing as an explicit breaking of supersymmetry, which is known to occur for these supersymmetric theories.

Keywords: Supersymmetry; quantum field theory; perturbation theory

PACS: 11.30.Pb; 11.90.+k; 03.70.+t

1. Introducción

En teoría cuántica de campos la integración sobre *loops* internos en diagramas de Feynman produce resultados divergentes y para que una teoría tenga carácter predictivo es necesario absorber estas divergencias en los parámetros de la teoría, lo cual constituye el programa de renormalización [1]. En particular es conveniente eliminar la divergencia asociada a la energía del vacío. Esto se hace mediante la técnica conocida como ordenamiento normal [2], que formalmente consiste en conmutar al lado derecho los operadores de aniquilación, los cuales se asocian con las frecuencias positivas en las que los campos han sido expresados. Así, una teoría descrita por un hamiltoniano H pasa a ser descrita por otro ordenado normalmente que se denota por $:H:$ y que satisface $\langle 0| :H: |0\rangle = 0$. Una consecuencia de este formalismo en la solución perturbativa de la teoría, es la ausencia de diagramas del tipo *tadpoles*, es decir, aquellos en los cuales aparecen contracciones de un campo en un mismo punto.

Por otra parte, se sabe que las teorías supersimétricas (SUSY) descubiertas hace dos décadas [3, 4], no contienen divergencias cuadráticas [5]. Esto se debe a que tales teorías poseen igual número de estados bosónicos y fermiónicos. En esta línea, podemos esperar que el valor de expectación de vacío del tensor de energía momento T^{mn} se anule en teorías supersimétricas, en particular también se puede expresar por la relación $H = :H:$. En este artículo mostraremos, usando el modelo SUSY de Wess -Zumino (W-Z), que este hecho no es válido en SUSY. Con este fin investigaremos el efecto de tomar ordenamiento normal en tal modelo y las consecuencias que se obtienen para la cancelación de las divergencias cuadráticas.

En la Sec. 2 revisaremos brevemente la teoría supersimétrica para presentar lagrangianos supersimétricos formados únicamente por supercampos quirales, es decir, el modelo de W-Z. En la Sec. 3 calcularemos la función de dos puntos utilizando el lagrangiano supersimétrico W-Z ordenado normalmente. Posteriormente procederemos a realizar una comparación entre el lagrangiano de este modelo sin ordenamiento normal, y con el ordenamiento normal. Las conclusiones se presentan en la Sec. 4.

2. Lagrangianos supersimétricos con supercampos quirales: modelo de Wess-Zumino

Con el fin de construir un modelo supersimétrico introducimos el formalismo de los supercampos [6, 7], por lo que describiremos la teoría de campo supersimétrica en términos de campos que no estén en la capa de masa; el álgebra supersimétrica puede expresarse utilizando parámetros que anticonmutan ζ, θ , como sigue:

$$\begin{aligned} [\zeta^\alpha Q_\alpha, \bar{\zeta}_\beta \bar{Q}^\beta] &= 2\zeta^\alpha \sigma_{\alpha\beta}^m \bar{\zeta}^\beta P_m, \\ [\zeta Q, \zeta Q] &= [\bar{\zeta} \bar{Q}, \bar{\zeta} \bar{Q}] = 0, \\ [P^m, \zeta Q] &= [P^m, \bar{\zeta} \bar{Q}] = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Q, \bar{Q} son los generadores supersimétricos, σ^m son las matrices de Pauli y $\alpha, \beta = 1, 2$. El anticonmutador de $\{Q, \bar{Q}\}$ no se anula, como el anticonmutador de cualquier operador con su adjunto, éste se transforma como (1/2, 1/2) bajo una transformación de Lorentz. El teorema de Coleman Mandula [8] permite la conservación de un operador que se transforma como una representación (1/2, 1/2). Haag Lopuzanski

y Sohnius [9] mostraron que el álgebra supersimétrica es un álgebra de Lie de grado consistente con el álgebra de la matriz S .

Definiendo el multiplete de SUSY como un conjunto de campos (B, ψ, \dots) , sobre los cuales se define una transformación infinitesimal

$$\delta_\eta B = (\eta Q + \bar{\eta} \bar{Q}) \times B, \tag{2}$$

ésta satisface el conmutador

$$(\delta_\zeta \delta_\eta - \delta_\eta \delta_\zeta) \times B = 2 (\eta \sigma^m \bar{\zeta} - \zeta \sigma^m \bar{\eta}) P_m B. \tag{3}$$

Estas transformaciones mapean los campos bosónicos en campos fermiónicos y viceversa, Q posee dimensión $1/2$, por lo que el campo de dimensión n se transforma en un campo de dimensión $n + (1/2)$ o dentro de derivadas del campo de más baja dimensión.

Se define el multiplete quirral formado por dos campos escalares A, F y un campo espinorial Ψ , los cuales se transforman como

$$\begin{aligned} \delta_\theta A &= \sqrt{2} \theta^\alpha \Psi_\alpha, \\ \delta_\theta \Psi_\alpha &= i \sqrt{2} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m A + \sqrt{2} \theta_\alpha F, \\ \delta_\theta F &= i \sqrt{2} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \partial_m \Psi_\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

En las anteriores transformaciones de dos componentes pueden generalizarse a cuatro componentes (para una mejor aclaración ver Ref. 10).

El multiplete quirral define un supercampo quirral:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= A(x) + i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m A(x) \\ &+ \frac{1}{4} \theta^\alpha \theta_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial^\mu \partial_\mu A(x) + \sqrt{2} \theta^\alpha \Psi_\alpha(x) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}} \theta^\beta \theta_\beta \partial_m \Psi^\alpha(x) \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha \theta_\alpha F(x), \end{aligned} \tag{5}$$

el cual satisface

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0, \quad D_\alpha \Phi^+ = 0,$$

donde las derivadas covariantes [11] se definen por

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m. \end{aligned}$$

El lagrangiano supersimétrico renormalizable más general que involucra solamente supercampos quirales es

$$\begin{aligned} L &= \Phi_i^+ \Phi_i |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) |_{\theta\theta} + h.c. \right], \end{aligned} \tag{6}$$

donde i indica los diferentes de supercampos. Las constantes de acoplamiento m_{ij} y g_{ijk} son simétricas en sus índices. El lagrangiano (6) se puede estudiar mediante el mecanismo de

supergráficas [1-2], pero para nuestros fines lo expresaremos en términos de los componentes de supercampo como

$$\begin{aligned} L &= i \partial_m \bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^m \Psi_i + A_i^* \square A_i \\ &+ F_i^* F_i + \left[m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \Psi_i \Psi_j \right) \right. \\ &\left. + g_{ijk} \left(A_i A_j F_k - \Psi_i \Psi_j A_k \right) + h.c. \right]. \end{aligned} \tag{7}$$

En este lagrangiano no aparecen términos cinéticos para los campos F , por lo tanto son sólo campos auxiliares que pueden ser eliminados mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial F_k^*} &= F_k + m_{ik}^* A_i^* + g_{ijk}^* A_i^* A_j^* = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial F_k} &= F_k^* + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo las Ecs. (8) en (7) se obtiene

$$\begin{aligned} L &= i \partial_m \bar{\Psi}_i \bar{\sigma}^m \Psi_i + A_i^* \square A_i - \frac{1}{2} m_{ij} \Psi_i \Psi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^* \bar{\Psi}_i \bar{\Psi}_j \\ &- g_{ijk} \Psi_i \Psi_j A_k - g_{ijk}^* \bar{\Psi}_i \bar{\Psi}_j A_k^* - V(A_i, A_k^*), \end{aligned} \tag{9}$$

donde el potencial escalar se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} V &= m_{ij}^* m_{lj} A_i^* A_l + m_{lk}^* g_{ijk} A_l^* A_i A_j \\ &+ m_{ik} g_{spk}^* A_i A_s^* A_p^* + g_{ijk}^* g_{lsk} A_i^* A_j^* A_l A_s. \end{aligned}$$

El lagrangiano contiene campos escalares y espinoriales de Weyl (dos-componentes). Sin embargo, en algunos casos conviene re-exresar los campos espinoriales en términos de espinores de Dirac (cuatro-componentes). Para efectuar este paso vamos a utilizar solo un supercampo chiral, es decir $i = j = k = l = s = p = 1$, y además expresamos A en su parte real e imaginaria (*i.e.*, tomar un solo tipo de campo):

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} (A' + iB'), \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (A' - iB').$$

Utilizando la definición del espinor de Majorana $\Psi_M = \Psi_M^c$, que se expresa como

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \Psi_\alpha \\ \bar{\Psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_M^T = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}^\beta \\ \Psi_{\dot{\beta}} \end{pmatrix},$$

que cumplen con

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_M \Psi_M &= \Psi \Psi + \bar{\Psi} \bar{\Psi}, \\ \bar{\Psi}_M \gamma_5 \Psi_M &= -\Psi \Psi + \bar{\Psi} \bar{\Psi} \\ \bar{\Psi}_M \gamma^m \partial_m \Psi_M &= \bar{\Psi} \bar{\sigma}^m \partial_m \Psi - \partial_m \bar{\Psi} \bar{\sigma}^m \Psi \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{m\alpha\beta} \\ \bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Renombrando $A', B' \rightarrow A, B$, se obtiene finalmente el lagrangiano del modelo supersimétrico de Wess-Zumino:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2 + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{1}{2}m^2(A^2 + B^2) - \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi - gmA(A^2 + B^2) - \frac{1}{2}g^2(A^2 + B^2)^2 - g\bar{\Psi}(A - iB\gamma_5)\Psi, \quad (10)$$

con A, B campos escalares reales, Ψ el espinor de Majorana de cuatro componentes y también hemos redefinido la constante de acoplamiento g . Como lo hemos mencionado en la introducción, las teorías supersimétricas no contienen divergencias cuadráticas a todos los ordenes en teoría de perturbación [13]. Las divergencias cuadráticas desaparecen por la cancelación exacta de gráficas que involucran loops de fermiones y bosones. Esto se ilustra para el modelo W-Z, en [14], donde también se presentan las reglas de Feynman que reproducimos en la Fig. 1.

3. Función de dos puntos utilizando ordenamiento normal

Enseguida se calcula la función de dos puntos [15] para los campos interactuantes $\tilde{A}(x_1)$ y $\tilde{A}(x_2)$ utilizando el modelo

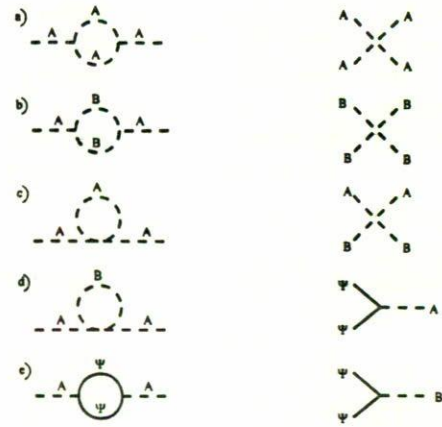


FIGURA 1. (Izq). Gráficas para el modelo W-Z. Las gráficas (c) y (d) contienen divergencias cuadráticas las cuales se cancelan exactamente con (e). (Der). Las correspondientes reglas de Feynman para el modelo W-Z.

supersimétrico de W-Z ordenado normalmente, esto es,

$$\langle 0|T[\tilde{A}(x_1)\tilde{A}(x_2)]|0\rangle = \langle 0|T[A(x_1)A(x_2)e^{-i\int:H_I:d^4x}]|0\rangle,$$

en donde $A(x_1), A(x_2)$ son campos libres y $:H_I:$ es el hamiltoniano de interacción ordenado normalmente. Haciendo la expansión de la exponencial hasta segundo orden

$$\langle 0|T[\tilde{A}(x_1)\tilde{A}(x_2)]|0\rangle = \langle 0|T[A(x_1)A(x_2)]|0\rangle - i \int \langle 0|T[A(x_1)A(x_2) : H_I(x) :]|0\rangle d^4x - \frac{1}{2} \int \langle 0|T[A(x_1)A(x_2) : H_I(x) :: H_I(y) :]|0\rangle d^4x d^4y + \dots \quad (11)$$

De la Ec. (10) notamos que el hamiltoniano de interacción es

$$H_I = gmA(A^2 + B^2) + \frac{1}{2}g^2(A^2 + B^2)^2 + g\bar{\Psi}(A - iB\gamma_5)\Psi. \quad (12)$$

Al sustituir la Ec. (12) en (11) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\tilde{A}(x_1)\tilde{A}(x_2)]|0\rangle &= \langle 0|T[A(x_1)A(x_2)]|0\rangle \\ &- i \int \langle 0|T\left\{A(x_1)A(x_2) : \left\{ gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)]^2 + g\bar{\Psi}(x)[A(x) - iB(x)\gamma_5]\Psi(x) \right\} : \right\}|0\rangle d^4x \\ &- \frac{1}{2} \int \langle 0|T\left\{A(x_1)A(x_2) : \left\{ gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)]^2 + \bar{\Psi}(x)[A(x) - iB(x)\gamma_5]\Psi(x) \right\} : \right. \\ &\quad \left. \times : \left\{ gmA(y)[A^2(y) + B^2(y)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(y) + B^2(y)]^2 + g\bar{\Psi}(y)[A(y) - iB(y)\gamma_5]\Psi(y) \right\} : \right\}|0\rangle d^4x d^4y. \end{aligned} \quad (13)$$

El término de orden cero nos da la contribución de la propagación libre. Para el cálculo de los demás términos utilizaremos el teorema de Wick [16], el cual expresa la relación existente entre el ordenamiento temporal y el ordenamiento normal:

$$\begin{aligned} T[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)] &= \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n) + \{ \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle : \phi(x_3)\dots\phi(x_n) : + \text{permutaciones} \} \\ &+ \{ \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \langle 0|T[\phi(x_3)\phi(x_4)]|0\rangle : \phi(x_5)\dots\phi(x_n) : + \text{permutaciones} \} \\ &+ \dots \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \dots \langle 0|T[\phi(x_{n-1})\phi(x_n)]|0\rangle + \text{permutaciones}(n \text{ par}) \\ &\langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle \dots \langle 0|T[\phi(x_{n-2})\phi(x_{n-1})]|0\rangle : \phi_n : + \text{permutaciones}(n \text{ impar}) \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

De aquí se observa tenerse en cuenta que si en el ordenamiento temporal existen un número impar de campos, al calcular el valor de expectación del vacío, éste desaparece; y además, debido a que se está efectuando ordenamiento normal en el hamiltoniano, no deben aparecer contracciones de dos campos en el mismo punto del espacio tiempo, es decir,

$$\langle 0|T[\phi'(x)\phi(x)]|0\rangle = 0.$$

Para facilitar el manejo algebraico renombraremos los campos como sigue:

$$\begin{aligned} A(x_1) &= A_1, & A(x_2) &= A_2, \\ A(x) &= A_x, & A(y) &= A_y, \\ B(x) &= B_x, & B(y) &= B_y, \\ \Psi(x) &= \Psi_x, & \Psi(y) &= \Psi_y, \\ \bar{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}_x, & \bar{\Psi}(y) &= \bar{\Psi}_y, \end{aligned}$$

y la función de dos puntos libre estará dada por

$$\langle 0|T[\phi(z)\phi(z')]|0\rangle = \widehat{\phi_z\phi_{z'}},$$

donde

$$\phi = A, B, \Psi, \bar{\Psi}, \quad z, z' = x, y.$$

Por simple inspección nos damos cuenta que el término

$$\int \langle 0|T\left(A(x_1)A(x_2) : \{gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)]^2 + g\bar{\Psi}(x)A(x)\Psi(x) - ig\bar{\Psi}(x)B(x)\gamma_5\Psi(x)\} : \right)|0\rangle d^4x,$$

se anula, debido a que varios de sus términos poseen ordenamientos temporales con un número impar de campos y al aplicarles el teorema de Wick a los restantes se presentarán contracciones de campos en el mismo punto del espacio, de lo cual se concluye que el término de primer orden no contribuye.

Respecto al término de segundo orden, obtenemos, una vez aplicado el teorema de Wick,

$$\begin{aligned} &\int \left(T\left(A(x_1)A(x_2) : \{gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)]^2 + g\bar{\Psi}(x)A(x)\Psi(x) - ig\bar{\Psi}(x)B(x)\gamma_5\Psi(x)\} : \right) \right. \\ &\quad \left. : \{gmA(y)[A^2(y) + B^2(y)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(y) + B^2(y)]^2 + g\bar{\Psi}(y)[A(y) - iB(y)\gamma_5]\Psi(y)\} : \right) d^4x d^4y \\ &= \int [g^2m^2(3!\widehat{A_1A_2A_xA_yA_xA_yA_xA_y} + 18\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yA_xA_y} + 18\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yA_xA_y} \\ &\quad + 2\widehat{A_1A_2A_xA_yB_xB_yB_xB_y} + 2\widehat{A_1A_xA_2A_yB_xB_yB_xB_y} + 2\widehat{A_1A_yA_2A_xB_xB_yB_xB_y}) \\ &\quad + \frac{1}{4}g^4(4!\widehat{A_1A_2A_xA_yA_xA_yA_xA_yA_xA_y} + 96\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yA_xA_yA_xA_y} + 96\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yA_xA_yA_xA_y} \\ &\quad + 4!\widehat{A_1A_2B_xB_yB_xB_yB_xB_yB_xB_y} + g^4(4\widehat{A_1A_2A_xA_yA_xA_yB_xB_yB_xB_y} + 8\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yB_xB_yB_xB_y} \\ &\quad + 8\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yB_xB_yB_xB_y}) + g^2(-\widehat{A_1A_2A_xA_y\Psi_{\mu x}\bar{\Psi}_y^\alpha\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_x^\mu} - \widehat{A_1A_xA_2A_y\Psi_{\mu x}\bar{\Psi}_y^\alpha\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_x^\mu} \\ &\quad - \widehat{A_1A_yA_2A_x\Psi_{\mu x}\bar{\Psi}_y^\alpha\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_x^\mu} + \widehat{A_1A_2B_xB_y\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_{\mu x}\Psi_{\beta x}\bar{\Psi}_{\theta y}\gamma_5^{\mu\beta}\gamma_5^{\theta\alpha}})] d^4x d^4y. \end{aligned} \tag{14}$$

Si nos concentramos sólo en las funciones conectadas obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \left(T\left(A(x_1)A(x_2) : \{gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)]^2 + g\bar{\Psi}(x)A(x)\Psi(x) - i\bar{\Psi}(x)B(x)\gamma_5\Psi(x)\} : \right) \right. \\ &\quad \left. : \{gmA(y)[A^2(y) + B^2(y)] + \frac{1}{2}g^2[A^2(y) + B^2(y)]^2 + g\bar{\Psi}(y)[A(y) - iB(y)\gamma_5]\Psi(y)\} : \right) d^4x d^4y \\ &= \int [g^2m^2(18\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yA_xA_y} + 18\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yA_xA_y} \\ &\quad + 2\widehat{A_1A_xA_2A_yB_xB_yB_xB_y} + 2\widehat{A_1A_yA_2A_xB_xB_yB_xB_y}) \\ &\quad + \frac{1}{4}g^4(96\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yA_xA_yA_xA_y} + 96\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yA_xA_yA_xA_y} \\ &\quad + g^4(8\widehat{A_1A_xA_2A_yA_xA_yB_xB_yB_xB_y} + 8\widehat{A_1A_yA_2A_xA_xA_yB_xB_yB_xB_y}) \\ &\quad - g^2(\widehat{A_1A_xA_2A_y\Psi_{\mu x}\bar{\Psi}_y^\alpha\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_x^\mu} + \widehat{A_1A_yA_2A_x\Psi_{\mu x}\bar{\Psi}_y^\alpha\Psi_{\alpha y}\bar{\Psi}_x^\mu})] d^4x d^4y. \end{aligned} \tag{15}$$

Este resultado para la función de dos puntos puede ser expresada en términos de diagramas de Feynman [17], que se muestran en la Fig. 2.

Para comparar H_I con : H_I :, evaluemos individualmente cada uno de sus términos. Para el primer término A^3 , descomponemos el campo A en A^+ y A^-

$$A^3 = (A^+ + A^-) (A^+ + A^-) (A^+ + A^-) \\ = A^{+3} + A^+ A^- A^+ + A^- A^{+2} + A^{-2} A^+ \\ + A^{+2} A^- + A^+ A^{-2} + A^- A^+ A^- + A^{-3},$$

poniendo del lado derecho A^+ por medio del uso de conmutadores

$$[A^+, A^-] = A^+ A^- - A^- A^+,$$

tenemos que A^3 se expresa como

$$A^3 = A^{+3} + A^- A^{+2} + [A^+, A^-] A^+ + A^- A^{+2} \\ + A^{-2} A^+ + A^- A^{+2} + [A^+, A^-] A^+ + A^{-2} A^+ \\ + 2 [A^+, A^-] A^- + A^{-2} A^+ + 2 [A^+, A^-] A^- + A^{-3}.$$

Bajo el ordenamiento normal de A^3 queda

$$: A^3 := A^{+3} + A^- A^{+2} + A^- A^{+2} + A^{-2} A^+ + A^- A^{+2} \\ + A^{-2} A^+ + A^{-2} A^+ + A^{-3}.$$

Restando : A^3 : a A^3 obtenemos

$$A^3 - : A^3 := 3 [A^+, A^-] : A ;,$$

es decir,

$$A^3 = : A^3 : + 3 [A^+, A^-] : A ;.$$

Similarmente para los demas términos del hamiltoniano se llega a las siguientes expresiones:

$$A^4 = : A^4 : + 6 [A^+, A^-] : A^2 : + 3 [A^+, A^-]^2,$$

$$AB^2 = : AB^2 : + [B^+, B^-] : A : + 2 [A^+, B^-] : B :$$

$$A^2 B^2 = : A^2 B^2 : + [B^+, B^-] : A^2 : + [A^+, A^-] : B^2 :$$

$$+ 4 [A^+, B^-] : AB :$$

$$+ [A^+, A^-] [B^+, B^-] + 2 [A^+, B^-],$$

$$B^4 = : B^4 : + 6 [B^+, B^-] : B^2 : + 3 [B^+, B^-]^2,$$

$$\bar{\Psi} A \Psi = : \bar{\Psi} A \Psi : + \{ \bar{\Psi}^+, \Psi^- \} : A :$$

$$- [A^+, \Psi^-] : \bar{\Psi} : + [\Psi^+, A^-] : \Psi ;,$$

$$\bar{\Psi} B \gamma_5 \Psi = \gamma_5^{\alpha\beta} (: \bar{\Psi}_\alpha B \Psi_\beta : + \{ \bar{\Psi}_\alpha^+, \Psi_\beta^- \} : B :$$

$$- [B^+, \Psi_\beta^-] : \bar{\Psi}_\alpha : + [\bar{\Psi}_\alpha^+, B^-] : \Psi_\beta ;),$$

con

$$[A^+, \Psi^-] = [\Psi^-, A^-] = [B^+, \Psi_\beta^-] = [\bar{\Psi}_\alpha^+, B^-] = 0.$$

Sustituyendo en el hamiltoniano de interacción

$$H = : H : + 3gm [A^+, A^-] : A : + gm [B^+, B^-] : A : \\ + 3g^2 [A^+, A^-] : A^2 : + \frac{3}{2} g^2 [A^+, A^-]^2 \\ + 3g^2 [B^+, B^-] : B^2 : + \frac{3}{2} g^2 [B^+, B^-]^2 \\ + g^2 [B^+, B^-] : A^2 : + g^2 [A^+, A^-] : B^2 : \\ + g^2 [A^+, A^-] [B^+, B^-] + g \{ \bar{\Psi}^+, \Psi^- \} : A : \\ - ig\gamma_5^{\alpha\beta} \{ \bar{\Psi}_\alpha^+, \Psi_\beta^- \} : B ;,$$

y factorizando obtenemos

$$H = : H : + (3gm [A^+, A^-] + gm [B^+, B^-] \\ + g \{ \bar{\Psi}^+, \Psi^- \}) : A : + (3g^2 [A^+, A^-] \\ + g^2 [B^+, B^-]) : A^2 : - ig\gamma_5^{\alpha\beta} \{ \bar{\Psi}_\alpha^+, \Psi_\beta^- \} : B : \\ + (3g^2 [B^+, B^-] + g^2 [A^+, A^-]) : B^2 : \\ + \frac{3}{2} g^2 ([A^+, A^-]^2 + [B^+, B^-]^2 + \frac{2}{3} [A^+, A^-] [B^+, B^-])$$

De esta manera se encuentran los términos bajo los cuales los hamiltonianos son iguales, pudiéndose expresar la relación entre ellos como

$$H_I = : H_I : + C_1 : A : + C_2 : A^2 : + C_3 : B : \\ + C_4 : B^2 : + C_5,$$

donde hemos renombrado

$$C_1 = 3gm [A^+, A^-] + gm [B^+, B^-] + g \{ \bar{\Psi}^+, \Psi^- \},$$

$$C_2 = 3g^2 [A^+, A^-] + g^2 [B^+, B^-],$$

$$C_3 = -ig\gamma_5^{\alpha\beta} \{ \bar{\Psi}_\alpha^+, \Psi_\beta^- \},$$

$$C_4 = 3g^2 [B^+, B^-] + g^2 [A^+, A^-],$$

$$C_5 = \frac{3}{2} g^2 ([A^+, A^-]^2 + [B^+, B^-]^2 \\ + \frac{2}{3} [A^+, A^-] [B^+, B^-]),$$

con

$$[B^+, B^-] = [A^+, A^-] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 (2\omega_k)}.$$

Procedamos a calcular la función de dos puntos, empleando el hamiltoniano sin ordenamiento normal:

$$\langle 0|T (\tilde{A}_1 \tilde{A}_2) |0\rangle = \langle 0|T (A_1 A_2 e^{-i \int H_I d^4 x}) |0\rangle,$$

haciendo la expansión de la exponencial hasta primer orden

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\tilde{A}_1\tilde{A}_2)|0\rangle &= \langle 0|T[A_1A_2(1 - i \int H_{Ix} d^4x + \dots)]|0\rangle \\ &= \langle 0|T(A_1A_2)|0\rangle \\ &\quad - i \int \langle 0|T(A_1A_2H_{Ix})|0\rangle d^4x + \dots, \end{aligned}$$

sustituyendo el hamiltoniano

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\tilde{A}_1\tilde{A}_2)|0\rangle &= \langle 0|T(A_1A_2)|0\rangle \\ &\quad - i \int \langle 0|\{T[A_1A_2(:H_{Ix} + C_1 : A_x : \\ &\quad + C_2 : A^2 : + C_3 : B_x : + C_4 : B_x^2 : + C_5)]\}|0\rangle d^4x. \end{aligned}$$

La contribución de la propagación libre de los campos A_1 y A_2 está dada por el término de orden cero. Por lo que respecta al término de primer orden, la parte que posee el hamiltoniano ordenado normalmente como ya se ha demostrado, no contribuye, los coeficientes de los términos C_1 y C_3 poseen un número impar de campos, por lo que al momento de aplicar el teorema de Wick se anulan al igual que el coeficiente de C_4 debido a que éste presentará contracciones de campos diferentes. Por esto, el cálculo de los demás términos es

$$\begin{aligned} C_2 \langle 0|T(A_1A_2 : A_x^2 :)|0\rangle &= 2C_2 \widehat{A_1 A_x A_2 A_x}, \\ \langle 0|T(A_1A_2)|0\rangle C_5 &= C_5 \widehat{A_1 A_2}, \end{aligned}$$

Antes de continuar notemos que

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_x A_y)|0\rangle &= \langle 0|\theta(x_0 - y_0)A(x)A(y) \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0)A(y)A(x)|0\rangle, \end{aligned}$$

Descomponiendo los campos en sus frecuencias positivas y negativas obtenemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_x A_y)|0\rangle &= \langle 0|(\theta(x_0 - y_0)A^+(x)A(y)^- \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0)A^+(y)A^-(x))|0\rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0)\langle 0|[A^+(x), A^-(y)]|0\rangle \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0)\langle 0|[A^+(y), A^-(x)]|0\rangle, \end{aligned}$$

tomando $y = x + \Delta x$, donde $1 > \Delta x > 0$ se obtiene que el conmutador $[A^+(y), A^-(x)]$ se transforma como

$$\begin{aligned} [A^+(y), A^-(x)] &= [A^+(x), A^-(y)] \\ &\quad - F_\alpha(A^+(y), A^-(x), \partial_\alpha A^+(y), \partial_\alpha A^-(x))\Delta x^\alpha, \end{aligned}$$

teniendo así

$$\begin{aligned} \langle 0|T(A_x A_y)|0\rangle &= [\theta(x_0 - y_0) + \theta(y_0 - x_0)] \\ &\quad \times \langle 0|[A^+(y), A^-(x)]|0\rangle - \langle 0|G_\alpha(x, y)|0\rangle\Delta x^\alpha, \end{aligned}$$

ya que

$$\theta(x_0 - y_0) + \theta(y_0 - x_0) = 1,$$

y tomando el límite $\Delta x \rightarrow 0$ ($y \rightarrow x$), obtenemos

$$\langle 0|T(A_x A_x)|0\rangle = \langle 0|[A^+(x), A^-(x)]|0\rangle,$$

siendo

$$[A^+(x), A^-(x)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2\omega_k)}.$$

Tenemos finalmente que

$$\langle 0|T(A_x A_x)|0\rangle = [A^+(x), A^-(x)].$$

De esto último podemos expresar C_2 y C_5 como

$$\begin{aligned} C_2 &= 4g^2 \langle 0|T(A_x A_x)|0\rangle = 4g^2 \widehat{A_x A_x}, \\ C_5 &= 4g^2 (\langle 0|T(A_x A_x)|0\rangle)^2 = 4g^2 (\widehat{A_x A_x})^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} C_2 \langle 0|T(A_1 A_2 : A_x^2 :)|0\rangle &= 8g^2 \widehat{A_x A_x A_1 A_x A_2 A_x}, \\ \langle 0|T(A_1 A_2)|0\rangle C_5 &= 4g^2 (\widehat{A_x A_x})^2 A_1 A_2. \end{aligned}$$

Sustituyendo todo esto en la función de dos puntos obtenemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\tilde{A}_1\tilde{A}_2)|0\rangle &= \widehat{A_1 A_2} - i \int d^4x (4g^2 (\widehat{A_x A_x})^2 \widehat{A_1 A_2} \\ &\quad + 8g^2 \widehat{A_x A_x A_1 A_x A_2 A_x}). \end{aligned}$$

Como ya se mencionó con anterioridad, el término de orden cero nos da la propagación libre, por lo que no se considera, al igual que el primer término de la integral que sólo contribuye a los diagramas de Feynman desconectados. El único término de la expresión anterior que contribuye, expresado en el espacio de los momentos, es



$$8g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4(k^2 - m^2)}.$$

Comparando este valor con el término de los fermiones de la Ec. (15) (la cual da la contribución de la divergencia cuadrática), vemos que son exactamente iguales, con la única diferencia de signo. En consecuencia, al calcular la función de Green de dos puntos utilizando el hamiltoniano ordenado normalmente junto con los términos de compensación, encontramos que las divergencias cuadráticas se cancelan, como lo esperaríamos de una teoría supersimétrica.

4. Conclusiones

Como se puede observar en teorías SUSY, el cálculo de la función de dos puntos está exento de divergencias cuadráticas gracias a la cancelación entre los *loops* de los bosones y fermiones. En este trabajo se encuentra que al realizar ordenamiento normal en el modelo supersimétrico de W-Z, los *loops* de la auto-energía de los campos escalares necesarios para cancelar las divergencias cuadráticas aportadas por el campo espinorial han desaparecido, manteniéndose de esta forma dichas divergencias. Sin embargo, al calcular la función de dos puntos con el hamiltoniano expresado en término de su ordenamiento normal más términos de compensación (dados por relaciones de conmutación (bosónicos) y anticonmutación (fermiónicos) de las las frecuencias positivas y ne-

gativas de los campos), es decir, desarrollando la relación $H = :H: + X$, se encuentra que la teoría una vez más está exenta de divergencias cuadráticas, como consecuencia de los términos de compensación mencionadas anteriormente. Por lo que, si en algún momento deseamos emplear ordenamiento normal en teorías supersimétricas, debemos ser cuidadosos, ya que la teoría podría presentar divergencias cuadráticas aparentando un rompimiento de la supersimetría, implicando así la necesidad de introducir términos de compensación para eliminar tales divergencias.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. J. Lorenzo Diaz quien sugirió el problema, y al Dr. Cupatitzio Ramírez por sus discusiones interesantes.

-
1. S. Weinberg, *The Theory Quantum Fields*, Vol. I, (Cambridge University Press, New York, 1996).
 2. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, New York, 1987).
 3. Y.A. Gol'fand and E.P. Likhtman, *JETP Lett.* **13** (1971) 323.
 4. D.V. Volkov and V.P. Akulov, *JETP Lett.* **16** (1972) 438.
 5. Howard E. Heber and G.L. Kane, *Phys. Reports* **117** No2. 2-4 (1985).
 6. S. Ferrara, J. Wess, and B. Zumino, *Phys. Lett.* **51B** (1974) 239.
 7. A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477.
 8. S. Coleman and Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.
 9. R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
 10. J. Wess and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.
 11. J. Wess, *Lectures Notes Phys.* **37**, edited by H. Rollnik and Dietz (Springer Verlag, New York, 1975) p. 352.
 12. M.T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 429.
 13. B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B89** (1975) 535.
 14. J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, (Princeton University Press, New Jersey, 1992).
 15. H. Lehmann, K. Symanzik, y W. Zimmerman, *Nuovo Cimento* **I** (1955) 205.
 16. G.C. Wick, *Phys. Rev.* **80** (1950) 286.
 17. R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 367; *Phys. Rev.* **74** (1948) 939; *Phys. Rev.* **74** (1948) 1430.