

## COMENTARIOS / COMMENTS

Los *Comentarios* son artículos cortos que critican o corrigen artículos de otros autores publicados previamente en la Revista Mexicana de Física. Cada *Comentario* debe establecer claramente a que artículo se refiere y debe ser acompañado de un pequeño resumen (en inglés y en español). Se seguirá el mismo procedimiento de publicación que para un artículo regular y se enviarán pruebas de galera a los autores.

*Comments* are short papers which criticize or correct papers of other authors previously published in Revista Mexicana de Física. Each comment should state clearly to which paper it refers and must be accompanied by a brief abstract (in both english and spanish). The same publication schedule as for regular article is followed, and page proofs are sent to authors.

## Comentarios sobre el artículo de D. Mendoza y E. Carvajal, "Ecuación de transporte de Boltzmann: más allá de la ley de Ohm"

Yu.G. Gurevich

*Departamento de Física, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politecnico Nacional  
Apartado postal 14-740, 07000 México, D.F., Mexico*

Recibido el 23 de junio de 2000; aceptado el 2 de octubre de 2000

Se muestra que los resultados del artículo [*Rev. Mex. Fís.* 46 (2000) 85] son erróneos.

*Descriptores:* Ley de Ohm; Ecuación de transporte de Boltzman

It is shown that the results of a recent paper [*Rev. Mex. Fís.* 46 (2000) 85] are erroneous.

*Keywords:* Ohm Law; Boltzmann transport equation

PACS: 72.10.-d; 72.20.-i; 72.20.Ht

El artículo de D. Mendoza y E. Carvajal publicado en la Revista Mexicana de Física, *Rev. Mex. Fís.* 46 (2000) 85, en el área de enseñanza está dedicado a un tema de gran interés: determinación de la magnitud del campo eléctrico a partir de la cual se manifiestan los efectos de transporte no lineales en un medio conductor (desviación de la ley de Ohm). Desafortunadamente, el artículo mencionado contiene una serie de errores, tanto físicos como matemáticos.

Como puede verse de la bibliografía indicada al final del artículo, los autores no están familiarizados con la inmensa literatura dedicada a problemas sobre la desviación de la ley de Ohm. Los libros citados en el artículo son excelentes, pero en ninguno de ellos se discuten dichos problemas. De lo contrario, los autores hubieran podido evitar muchos de los errores que tiene su artículo.

La historia del estudio sobre la aplicación de la ley de Ohm y sus posibles mecanismos de desviación se remontan a los trabajos teóricos [1, 2] y experimentales [3, 4]. A la fecha se han publicado varios miles de artículos científicos dedicados a este tema, además hay una serie de artículos de revisión [5-9] y varias monografías [10-16] en los cuales se tratan con detalle varios aspectos del tema.

Lamentablemente, no existen libros de texto ni en español ni en inglés sobre este importante tema. Por esta razón, el

autor de estos comentarios junto con el Dr. Felipe Pérez Rodríguez están concluyendo la escritura de un libro de texto en español dedicado a fenómenos de transporte lineales y no lineales en medios conductores [17].

Comentemos ahora en esencia el artículo:

1. En el artículo los autores escriben la integral de colisiones en la así llamada aproximación  $\tau$ . Sin embargo, es bien sabido [5, 6, 8, 10] que esta aproximación es válida sólo para calcular la componente anisotrópica de la función de distribución. Si uno se limita únicamente al cálculo del término lineal con respecto al campo eléctrico en la expresión para la corriente (ley de Ohm), entonces la aproximación  $\tau$  es correcta. Sin embargo, cuando se calcula el término  $f_2$  [ver fórmula (4)] la aproximación  $\tau$  no es válida (ver Ref. 18, p. 259) y en lugar de ésta es necesario utilizar la aproximación de difusión para la integral de colisiones, o sea esta integral se escribe en la forma de un operador diferencial (con respecto a la energía) de segundo orden [6, 10, 13].

Físicamente es obvio que el término  $f_2 - f_1$  (usando la notación de los autores D. Mendoza y E. Carvajal) describe la redistribución de la energía entre los subsis-

temas de electrones y centros de dispersión (fonones, impurezas cargadas) mientras que el término  $f_1$  describe la redistribución del impulso. Por lo tanto, cuando la dispersión de los electrones tiene un carácter totalmente elástico (por ejemplo, con impurezas neutras) la parte correspondiente de la integral de colisiones debe anularse [5, 6, 8, 13]. Al mismo tiempo, la parte de la integral de colisiones que describe la redistribución del impulso permanece finita.

2. Los autores prestan atención, principalmente, al gas de electrones degenerado (metales y semiconductores degenerados). Pero en este caso debe aparecer en la Ec. (2) una integral de colisiones que describa los choques entre los electrones [7, 19]. Lo más importante aquí es que precisamente esta integral de colisiones es el término principal en la ecuación cinética (2), lo cual corresponde a  $\tau_{ee} \ll \tau$  ( $\tau_{ee}$  es el tiempo entre colisiones de electrones). Si se tomara en cuenta este término y se calculara correctamente el término  $f_2$  (ver parágrafo 3) y después  $f_3$ , entonces el término cúbico con respecto al campo eléctrico en la expresión para la corriente se anularía [6, 7].

Este resultado es físicamente obvio. La aparición de términos no lineales con respecto al campo eléctrico en la expresión de la corriente está relacionada con el cambio de la energía térmica de los electrones a expensas del calentamiento Joule (electrones calientes [1–16]). En campos eléctricos débiles la energía térmica debe ser proporcional a  $E^2$ . Como el tiempo de vida  $\tau$  en la expresión para la conductividad eléctrica [ver Ec. (10)] depende de esta energía (energía cinética media de los electrones), la cual a su vez depende del campo eléctrico, entonces los efectos no lineales emergen.

Sin embargo, para el gas de electrones degenerado (metales) la energía cinética media de los electrones es igual a  $\varepsilon_F + (T/\varepsilon_F)^2 \psi$ . Aquí,  $\varepsilon_F$  es la energía de Fermi,  $T$  es la temperatura del gas de electrones en presencia del campo eléctrico,  $\psi$  es un parámetro del orden de la energía de Fermi. El segundo término en esta expresión es mucho menor que el primero ( $T \ll \varepsilon_F$ ) incluso cuando  $T$  tiende a cero. En campos eléctricos débiles  $T = T_0 + \beta E^2$ , en donde  $T_0$  es la temperatura del medio ambiente,  $\beta^{-1/2}$  es el campo de plasma [12]. Por lo tanto, la energía cinética media es igual a una constante (que depende de  $\varepsilon_F$ ) más un término proporcional a  $E^4$ . Por eso en la expresión para la corriente aparecerá un término que depende del campo eléctrico elevado a la quinta potencia ( $E^5$ ).

De esta forma, para tomar en cuenta los efectos no lineales es necesario resolver la ecuación cinética con una exactitud de hasta  $E^5$  y no hasta  $E^3$  (el término cúbico no contribuye a la corriente).

En el experimento (con excepción de ciertas situaciones exóticas) los conductores metálicos se funden de-

bido al calentamiento Joule antes de que los efectos no lineales aparezcan. Precisamente por esta razón efectos no lineales semejantes no se estudian en los metales. Esto explica también porque se utilizan materiales semiconductores (gas de electrones no degenerado) y no materiales metálicos en la electrónica del estado sólido, en los cuales la desviación de la ley de Ohm se observa en campos eléctricos del orden de 1–10 V/cm.

En realidad, en los metales los efectos no lineales sí ocurren pero su naturaleza es dinámica más no cinética [20, 21].

El mecanismo de no linealidad en el gas de electrones no degenerado analizado por los autores surge ya en campos eléctricos demasiado débiles. Para concentraciones de impurezas lo suficientemente bajas, cuando la concentración de los electrones (o huecos) libres es menor que  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ , la integral de colisiones electrónicas es despreciable [19]. Sin embargo, aún en este caso la aproximación  $\tau$  de la integral de colisiones no se puede aplicar para la descripción de los efectos no lineales [5–16].

3. Aunque nos olvidáramos de todo lo dicho anteriormente, la expresión para la corriente  $j_{z3}$  que obtuvieron los autores resulta ser incorrecta.

La razón es que cuando se calculó  $f_2$  se cometió un error matemático que consiste en lo siguiente: Para los autores era necesario calcular la expresión  $\partial V_z / \partial \varepsilon$ . Remitiéndose a la Ec. (6), la presentan como

$$\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{mV_z}. \quad (1)$$

Pero esta expresión sólo es válida en el caso en que la relación de dispersión es unidimensional (La energía  $\varepsilon$  depende sólo de  $V_z$ ).

En realidad [ver Ec. (5)] la energía del electrón depende de las tres componentes de la velocidad (a pesar de que en la ecuación cinética figura sólo  $V_z$  ya que el problema es unidimensional).

Luego,

$$\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} = \frac{\cos^2(\theta)}{mV_z}, \quad (2)$$

lo que naturalmente cambia la expresión para  $f_3$  y consecuentemente la de  $j_{z3}$ .

4. Quisiera llamar la atención del lector a una circunstancia más.

La Ec. (3) es una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden no homogénea. Por eso se puede resolver de manera exacta (para cualquier valor del campo eléctrico  $E$ ) [22]. Por tal motivo no hay ninguna necesidad de usar el método de iteración aplicado por

los autores para obtener la solución. Si el interés recae en el intervalo de los campos eléctricos débiles, entonces es correcto desarrollar la solución exacta en una serie con respecto al campo eléctrico. Este hecho es muy importante si se observa que la Ec. (3) en campos eléctricos débiles es una ecuación con un parámetro pequeño en la derivada de mayor orden. La solución, como es bien conocido [23], es la función de capa límite cuyas derivadas pueden tener singulari-

dades. Por lo tanto, cualquier método aproximado de solución se debe emplear con bastante cuidado. Luego, tomando en cuenta que  $f_0$  es una función escalonada el procedimiento de iteración es incorrecto.

Aprovecho la ocasión para agradecer al Dr. Felipe Pérez Rodríguez por las fructíferas discusiones sobre el tema y al M.C. Gabino Espejo por su ayuda en la preparación de este trabajo.

- 
1. L. Landau and A. Kompaneets, *Phys. Z. Sowjet* **6** (1934) 163.
  2. B.I. Davidov, *Phys. Z. Sowjet* **8** (1935) 59.
  3. E.J. Ryder and W. Shockley, *Phys. Rev.* **81** (1951) 139.
  4. E.J. Ryder, *Phys. Rev.* **90** (1953) 766.
  5. V.L. Ginzburg and A.V. Gurevich, *Sov. Phys.-Uspekhi* **3** (1960) 115 y 175.
  6. F.G. Bass and Yu.G. Gurevich, *Sov. Phys.-Uspekhi* **14** (1971) 113.
  7. F.G. Bass, V.S. Bochkov, and Yu.G. Gurevich, *Sov. Phys.-Semicond.* **7** (1973) 1.
  8. Yu.G. Gurevich and O.L. Mashkevich, *Phys. Reports* **181** (1989) 327.
  9. Z.S. Gribnikov, K. Hess, and G.A. Kosinovsky, *Journal of Appl. Phys.* **77** (1995) 1337.
  10. V.L. Ginzburg, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, (Gordon and Breach, New York, 1961).
  11. I.P. Shkarovsky, T.W. Johnston, and M.P. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, (Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, Palo Alto, London, Don Mills, Ontario, 1966).
  12. E.M. Conwell, *High Field Transport in Semiconductors*, (Academic Press, New York and London, 1967).
  13. B.R. Nag, *Theory of Electrical Transport in Semiconductors*, (Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sydney-Braunschweig, 1972).
  14. V.L. Bonch-Bruevich, A.G. Mironov, and I.P. Zvyagin, *Domain Electrical Instabilities in Semiconductors*, (Consultant Bureau, New York, 1975).
  15. *Hot Electron Transport in Semiconductors*, edited by L. Reggiani, (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, Tokyo, 1985).
  16. C.S. Ting, *Physics of Hot Electron Transport in Semiconductors*, (World Scientific, New Jersey-London-Hong Kong, 1992).
  17. Yu.G. Gurevich and F. Pérez-Rodríguez, *Fenómenos de Transporte en Semiconductores*, (en preparación).
  18. John Sheffield, *Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation*, (Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975).
  19. H. Frutlich and B.V. Paranjape, *Proc. Phys. Soc.* **B69** (1956) 21.
  20. V.T. Dolgoplov, *Sov. Phys.-Uspekhi* **23** (1980) 134.
  21. N.M. Makarov and V.A. Yampolskii, *Sov. J. Low Temp. Phys.*, **17** (1991) 285.
  22. Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, (International Thomson Editores, New York, 1997).
  23. W. Wasow, *Linear Turning Point Theory*, (Springer-Verlag, W. Wlasow, Linear Turning Point Theory, (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1985).