Un nuevo método general para transformar canónicamente una hamiltoniana en otra de forma dada

Alberto Gómez Trapote
Departamento de Física Teórica, Atómica y Molecular, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid
Prado de la Magdalena s/n, 47011 Valladolid, España

Recibido el 27 de junio de 2001; aceptado el 13 de septiembre de 2001

El método de mayor generalidad para transformar canónicamente una hamiltoniana en otra de forma dada se fundamenta en el uso reiterado de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Es una técnica normalmente laboriosa y sólo ofrece soluciones particulares del problema. Exponemos un nuevo método general que sin acudir a ecuaciones de Hamilton-Jacobi resuelve más cómodamente el problema y proporciona además todas sus posibles soluciones.

Descriptores: Mecánica analítica; hamiltoniana; transformación canónica; ecuación de Hamilton-Jacobi

The more general method to perform a cononical transformation of a Hamiltonian into another one of a given form is based on the repeated use of the Hamilton-Jacobi equation. This is usually a tedious technique which leads to some particular solutions of the problem. We present a new general method which does not rely on the Hamilton-Jacobi equation and moreover it gives all the possible solutions.

Keywords: Analytical mechanics; hamiltonian; canonical transformation; Hamilton-Jacobi equation

PACS: 03.20.+i

1. Introducción

Sabemos que cuando un sistema mecánico posee naturaleza hamiltoniana ésta queda preservada bajo la acción de transformaciones canónicas. Por tanto si

$$q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n \leftrightarrow Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n$$

es una transformación canónica (TC) que actúa sobre un sistema de hamiltoniana $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ el correspondiente sistema transformado poseerá también una hamiltoniana $K(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n, t)$. Dada H así como la TC el problema de determinar K está bien estudiado [1] y en general no ofrece dificultad.

Hay sin embargo otro problema al que llamaremos problema de intercambio (PI) cuya posible resolución ya no es tan simple: se trata de encontrar las TC que cambian una hamiltoniana arbitraria $H_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ en otra $H_2(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n, t)$ cuya forma ha sido previamente fijada. El PI se dirá intemporal cuando $\delta H_1/\delta t = \partial H_2/\partial t = 0$ y temporal en caso contrario. Se debe a Glass y Scanio [2] una primera investigación —muy limitada— sobre el citado PI. Por integración de una clásica ecuación de Hamilton-Jacobi (Ec. HJ) los autores encuentran una TC que cambia la hamiltoniana $H_1 = (p^2 + m^2w^2q^2)/2m$ (*i.e.* oscilador armónico) en otra de la forma $H_2 = f(P)$ con f arbitraria. Aplican luego tal transformación al caso $f(P) = P^2/2m$ (*i.e.*, partícula libre). Seguidamente cabe mencionar la referencia [3] en la que se propone una interesante conexión entre el ámbito cuántico (*i.e.*, observables de "no demolición") y el PI. En efecto: al formalizar la interacción entre un oscilador cuántico y una típica señal de excitación se recae en un planteamiento —con analogía clásica— que conlleva un PI intemporal. R. Lynch ha estudiado este tipo de analogía clásico-cuántica [4] y en relación con ella ha obtenido una TC que cambia la hamiltoniana $H_1 = (p^2 - m^2w^2q^2)/2m$ (*i.e.*, "oscilador armónico negativo") en otra de la forma $H_2 = wQP$. Posteriormente las ideas expuestas en la Ref. 4 han sido ampliadas y sistematizadas por el propio Lynch [5] dando lugar a un método que en principio es aplicable a la eventual resolución de cualquier PI. El que desde ahora denominaremos método de Lynch (ML) consiste básicamente en la utilización reiterada de la Ec. HJ con el acompañamiento de una serie de sustituciones algebraicas.

Siendo así que el ML parece válido para cualquier número n de grados de libertad y también para todo par de hamiltonianas H_1 y H_2 cabe pensar que el PI queda prácticamente cerrado. De hecho no hemos encontrado trabajos posteriores que aporten verdaderas novedades al tema.

2. Una opción alternativa al método de Lynch; comparación crítica

La finalidad de este artículo es ofrecer un nuevo método de resolución del PI tal que con el mismo ya no sea necesario utilizar ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Pensamos que la técnica aquí propugnada posee un cierto interés y que en determinados aspectos puede mejorar al citado método de Lynch. Veamos algunas de las posibles ventajas a destacar:

i) El aporte teórico que requiere el nuevo método es sensiblemente más exiguo que el exigido por el ML: sólo fundamentos básicos de TC y constantes de movimiento en el primer caso frente a sólido conocimiento de la teoría de HJ en el segundo [6].

ii) Como la Ec. HJ es no lineal su manejo puede llegar a ser algo laborioso en especial cuando sea $n > 1$ y el tiempo aparezca explícitamente; en el nuevo método sólo se consideran ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y tipo lineal lo cual implica una mayor simplicidad matemática.

iii) Aun en la situación más sencilla (*i.e.*, intemporalidad y $n = 1$) el ML requiere la integración de dos ecuaciones de HJ así como la realización de cálculos complementarios no triviales; a este respecto el propio Lynch reconoce una aparente complicación en su técnica [5]. Con el nuevo método y para la misma situación elemental basta integrar una sola ecuación lineal y realizar dos sustituciones algebraicas.

iv) Es sabido que existen múltiples sistemas de integrales completas para una ecuación en derivadas parciales de primer orden y no lineal [7]. Ahora bien como en el ML es necesario obtener integrales completas de ecuaciones HJ las TC encontradas sólo serán una "muestra" del conjunto de posibles soluciones del PI. Contrariamente dado que el nuevo método utiliza soluciones generales de ecuaciones lineales esta técnica suministrará todas las TC resolventes.

En la Ref. 5 Lynch expone su método sólo para el PI con $n = 1$ (temporal e intemporal) en tanto que omite detalles para el caso $n > 1$ al que contempla como una *"straightforward generalization;"* a título de ejemplo vuelve sobre el oscilador negativo que ya estudió en la Ref. 4. Por nuestra parte organizaremos la continuación de este artículo conforme al siguiente programa:

a) En la Sec. 3 desarrollaremos el nuevo método para el PI intemporal y con sólo un grado de libertad.

b) La Sec. 4 se dedicará a ilustrar la teoría precedente con casos concretos. A efectos comparativos presentaremos los problemas mencionados en las Refs. 2 y 5 (ver Introducción) pero resolviéndolos ahora por el nuevo método.

c) En la Sec. 5 explicaremos de manera resumida cómo se adapta la teoría de la Sec. 3 al caso de la temporalidad y a $n > 1$; para centrar ideas nos referiremos al PI intemporal con $n = 2$ y al PI temporal cuando $n = 1$.

d) En un Apéndice final nos referiremos a las perspectivas de aplicación del PI.

3. El problema de intercambio intemporal con un solo grado de libertad

Consideremos dos sistemas autónomos y hamiltonianos elegidos arbitrariamente pero con un solo grado de libertad cada uno de ellos; denotemos por (q, p) y (Q, P) sus respectivas variables canónicas de descripción y sean $H_1(q, p)$ y $H_2(Q, P)$ sus correspondientes funciones hamiltonianas. Para determinar el movimiento de estos sistemas dispondremos de los dos grupos de ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H_1}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial q}, \tag{1}$$

y

$$\dot{Q} = \frac{\partial H_2}{\partial P}, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H_2}{\partial Q}. \tag{2}$$

El problema que aquí se propone consiste en determinar todas las posibles TC,

$$q = q(Q, P), \qquad p = p(Q, P), \tag{3}$$

que intercambian $H_1(q, p)$ y $H_2(Q, P)$.

Comencemos por elegir una de las dos ecuaciones del conjunto (3). Sea, por ejemplo la $q = q(Q, P)$. Derivando esta relación con respecto al tiempo y teniendo en cuenta (1) y (2) resultará

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial H_2}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial H_2}{\partial Q}. \tag{4}$$

Enseguida nos va a interesar expresar p en función de q, Q y P. Para ello observemos primero que al ser $\partial H_1/\partial t = \partial H_2/\partial t = 0$ (como cumple a la autonomía) ambas hamiltonianas serán constantes de movimiento de sus respectivos sistemas; por tanto si (q_0, p_0) representa cualquier estado dinámico particular del "sistema H_1" se verificará la conservación

$$H_1(q, p) = H_1(q_0, p_0). \tag{5}$$

Por otra parte como en (3) no aparece explícitamente el tiempo la hamiltoniana H_2 será simplemente la transformada de H_1 por el cambio canónico; tendremos pues

$$H_2(Q, P) = H_1[q(Q, P), p(Q, P)]. \tag{6}$$

Denotemos por (Q_0, P_0) el transformado de (q_0, p_0) por las Ecs (3) reversibilizadas; entonces de acuerdo con (6) deduciremos la nueva conservación:

$$H_2(Q, P) = H_1[q(Q_0, P_0), p(Q_0, P_0)] = H_1(q_0, p_0). \tag{7}$$

Bastará ahora identificar (5) y (7) para obtener la igualdad de hamiltonianas:

$$H_1(q, p) = H_2(Q, P). \tag{8}$$

Esta ecuación (liberada ya de estados dinámicos particulares) quedará satisfecha por todos los pares $(q, p), (Q, P)$ que se correspondan "vía (3);" despejando p en (8) hallaremos finalmente la relación de dependencia

$$p = p[q, H_2(Q, P)] \equiv f(q, Q, P), \tag{9}$$

que constituye la expresión de p que nos interesaba encontrar. Nótese que esencialmente (6) y (8) son una misma ecuación; las etapas intermedias (5) y (7) —que podrían parecer innecesarias— han sido introducidas por conveniencia del desarrollo posterior.

Conseguido el resultado (9) llamemos

$$\frac{\partial H_2}{\partial P} \equiv A(Q,P),$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial Q} \equiv -B(Q,P),$$

y

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} \equiv D(q,p) = D(q, f(q,Q,P)) \equiv E(q,Q,P);$$

con estas notaciones la Ec. (4) adoptará la forma

$$A(Q,P)\frac{\partial q}{\partial Q} + B(Q,P)\frac{\partial p}{\partial P} = E(q,Q,P). \tag{10}$$

Estamos así ante una ecuación en derivadas parciales de primer orden lineal e inhomogénea con variables independientes Q y P y función incógnita q.

Cara a la resolución de (10) consideraremos su correspondiente sistema diferencial asociado

$$\frac{dQ}{A(Q,P)} = \frac{dP}{B(Q,P)} = \frac{dq}{E(q,Q,P)}; \tag{11}$$

operando en el mismo podremos obtener el par de integrales primeras independientes

$$f_1(q,Q,P) = C_1$$

y

$$f_2(q,Q,P) = C_2, \tag{12}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. No es difícil demostrar que la obtención de f_1 y f_2 está ciertamente asegurada. En efecto, como

$$\begin{aligned} A(Q,P)dP - B(Q,P)dQ =& \frac{\partial H_2}{\partial P}dP + \frac{\partial H_2}{\partial Q}dQ \\ =& dH_2(Q,P) = 0, \end{aligned}$$

ya disponemos de una primera integral $H_2(Q,P) = C_1$ con $C_1 \equiv H_1(q_0,p_0)$ [ver Ec. (7)]. Despejando ahora P en esta conservación tendremos $P = g(Q,C_1)$; asimismo despejando p en $H_1(q,p) = C_1$ [ver Ec. (5)] resultará $p = h(q,C_1)$. Escribiremos entonces

$$A(Q,P) = A(Q, g(Q,C_1)) \equiv A^*(Q,C_1)$$

y

$$E(q,Q,P) = D(q, h(Q,C_1)) \equiv D^*(q,C_1),$$

con lo cual a la vista de (11) nos quedará

$$\frac{dQ}{A^*(Q,C_1)} = \frac{dq}{D^*(q,C_1)}, \tag{13}$$

integrando (13) deduciremos

$$F(q,Q,C_1) = F[q,Q,H_2(Q,P)] \equiv G(q,Q,P) = C_2,$$

que es una nueva integral primera del sistema diferencial (11). Naturalmente hemos admitido en esta prueba que $B \neq 0$ (si $B = 0$ tenemos $P = C_1$) y también que las integraciones de los dos miembros de (13) son expresables de modo exacto o analítico. Es de observar que la demostración realizada se asienta básicamente en el hecho de que todos los sistemas hamiltonianos y autónomos con $n = 1$ son integrables (*i.e.*, aplicación del teorema de integrabilidad de Liouville a $n = 1$ [8].)

Reconsiderando las dos integrales primeras (12) la solución general de la Ec. (10) poseerá entonces la forma

$$\varphi[f_1(q,Q,P), f_2(q,Q,P)] = 0, \tag{14}$$

donde φ es una función arbitraria. En conclusión el conjunto formado por (9) y (14) suministrará todas las posibles TC que cambian H_1 en H_2 y recíprocamente. Ha quedado así resuelto el PI intemporal para $n = 1$.

Como una observación notar que si en (3) hubiésemos elegido la ecuación $p = p(Q,P)$, nuestro PI se resolvería de modo análogo al ya expuesto. Caso de suponer por ejemplo que q no fuese cíclica (*i.e.*, $\partial H_1/\partial q \neq 0$), deduciríamos de (8) la relación $q = q[p, H_2(Q,P)] \equiv f^*(p,Q,P)$; denotando seguidamente

$$\frac{\partial H_1}{\partial q} \equiv -L(q,p) = -L[f^*(p,Q,P),p] \equiv -M(p,Q,P),$$

la Ec. (10) se vería sustituida por

$$A(Q,P)\frac{\partial p}{\partial Q} + B(Q,P)\frac{\partial p}{\partial P} = M(p,Q,P),$$

y a partir de aquí todo sería repetición de la técnica precedente.

4. Dos ejemplos de problemas intemporales de intercambio con $n = 1$

I. Proponemos las hamiltonianas

$$H_1 = \frac{p^2 + m^2 w^2 q^2}{2m}$$

y

$$H_2 = \frac{P^2}{2m},$$

ya mencionadas en relación con la Ref. 2 (ver Sec. 2b e Introducción). La Ec. (9) tomará entonces la forma concreta

$$p = (P^2 - m^2 w^2 q^2)^{1/2}, \tag{15}$$

en tanto que la ecuación lineal (10) se escribirá

$$P\frac{\partial q}{\partial Q} = (P^2 - m^2w^2q^2)^{1/2}. \tag{16}$$

El sistema diferencial (11) asociado a (10) será

$$\frac{dQ}{P} = \frac{dP}{0} = \frac{dq}{(P^2 - m^2w^2q^2)^{1/2}}. \tag{17}$$

Obviamente tenemos $P = C_1$ lo cual —sustituido en la misma (17)— conducirá a la ecuación diferencial ordinaria

$$dQ = \frac{C_1}{mw}\frac{\dfrac{mwdq}{C_1}}{\left[1-\left(\dfrac{mwq}{C_1}\right)^2\right]^{1/2}},$$

integrando esta ecuación obtendremos

$$Q + C_2 = \frac{C_1}{mw}\operatorname{arcsen}\left(\frac{mwq}{C_1}\right),$$

de donde

$$q = \frac{C_1}{mw}\operatorname{sen}\left(\frac{mwQ}{C_1} + \frac{mwC_2}{C_1}\right). \tag{18}$$

Para conseguir la solución general de (16) pondremos $C_2 = \varphi(C_1) = \varphi(P)$, siendo φ una función arbitraria [ver Ec. (14)]. Reconsiderando la Ec. (18), sustituyamos en ella C_1 por P y C_2 por $\varphi(P)$ y, a continuación reemplacemos la ecuación resultante en la relación (15). Como consecuencia de este proceso deduciremos

$$q = \frac{P}{mw}\operatorname{sen}\left[\frac{mwQ}{P} + \frac{mw\varphi(P)}{P}\right],$$

$$p = P\cos\left[\frac{mwQ}{P} + \frac{mw\varphi(P)}{P}\right]. \tag{19}$$

Estas ecuaciones constituirán el conjunto de todas las TC que realizan el intercambio $H_1 \leftrightarrow H_2$. Si en particular realizamos la elección, $\varphi(P) = 2\pi lP/mw$, con $l = 1, 2, 3, \ldots$, las ecuaciones (19) pasarán a ser

$$q = \frac{P}{mw}\operatorname{sen}\left(mw\frac{Q}{P}\right)$$

y

$$p = P\cos\left(mw\frac{Q}{P}\right)$$

y estaremos entonces justamente ante la solución ofrecida en la Ref. 2.

II. Consideremos ahora las hamiltonianas

$$H_1 = (p^2 - m^2w^2q^2)/2m,$$

y

$$H_2 = wQP,$$

ya citadas con respecto a las Refs. 4 y 5 (ver Sec. 2b e Introducción).

En el presente caso (9) tomará la forma

$$p = (m^2w^2q^2 + 2mwQP)^{1/2}, \tag{20}$$

por su parte la Ec. (10) será

$$wQ\frac{\partial q}{\partial Q} = -wP\frac{\partial q}{\partial P} = \frac{1}{m}(m^2w^2q^2 + 2mwQP)^{1/2}. \tag{21}$$

El sistema diferencial (11) quedará entonces

$$\frac{dQ}{wQ} = -\frac{dP}{wP} = \frac{mdq}{(m^2w^2q^2 + 2mwQP)^{1/2}}. \tag{22}$$

Por simple observación se deduce la integral primera $QP = C_1$, la cual —reemplazada en la misma (22)— dará lugar a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\left(\dfrac{mw}{2C_1}\right)^{1/2}dq}{\left[1+\left(\sqrt{\dfrac{mw}{2C_1}}\,q\right)^2\right]};$$

esta ecuación es inmediatamente integrable y obtenemos

$$\begin{aligned} Q &= C_2\left[\left(\frac{mw}{2C_1}\right)^{1/2}q + \frac{(2C_1 + mwq^2)^{1/2}}{\sqrt{2C_1}}\right] \\ &= \frac{C_2}{(2C_1mw)^{1/2}}\left[mwq + (m^2w^2q^2 + 2mwC_1)^{1/2}\right] \\ &= \frac{C_2}{\sqrt{C_1}\sqrt{2mw}}(mwq + p), \end{aligned} \tag{23}$$

habiendo usado $QP = C_1$, así como la relación (20). Para determinar la solución general de (21) pondremos $C_2 = \varphi(C_1) = \varphi(QP)$; sustituyendo esto en (23) resultará

$$Q = \frac{\Psi(QP)}{\sqrt{2mw}}(mwq + p), \tag{24}$$

donde hemos denotado $\Psi(QP) = \varphi(QP)/\sqrt{QP}$. Todavía llevando (24) a la Ec. (20) encontraremos

$$p^2 - m^2w^2q^2 = 2mwP\frac{\Psi(QP)}{\sqrt{2mwq}}(p + mwq),$$

o sea,

$$P = \frac{\sqrt{2mw}}{\Psi(QP)}\left(\frac{p}{2mw} - \frac{q}{2}\right). \tag{25}$$

Las Ecs. (24) y (25) expresan el conjunto de todas las TC que resuelven este problema de intercambio.

Si ahora realizamos la elección particular,

$$\varphi(QP) = \sqrt{2mw}\sqrt{QP},$$

las Ecs. (24) y (25) presentarán la forma concreta

$$Q = mwq + p,$$

$$P = -\frac{q}{2} + \frac{p}{2mw}; \tag{26}$$

pero estas ecuaciones constituyen precisamente la TC particular que propone Lynch como solución del problema [5].

Notar que:

1) Haciendo abstracción tanto del ML como del nuevo método la TC (26) podría haberse obtenido por simple inspección de H_1 y H_2. En efecto como

$$H_1 = (p + mwq)\frac{p - mwq}{2m},$$

parece natural introducir las nuevas variables

$$Q = mwq + p$$

y

$$P = \frac{(p - mwq)}{2mw},$$

con lo cual $H_1 = wQP = H_2$. Pero este cambio de variables lineal y reversible (determinante de coeficientes unitario) es típicamente canónico.

2) Se ha demostrado que las hamiltonianas cuadráticas autónomas y con $n = 1$, son clasificables mediante tres tipos de representantes canónicos: la hamiltoniana del oscilador armónico la del “oscilador armónico negativo” y la de la partícula libre [9]. Es de observar que estos tipos canónicos coinciden, precisamente, con tres de las hamiltonianas consideradas en los ejemplos de esta Sección.

5. Problemas de intercambio temporales y con más de un grado de libertad

5.1. El PI temporal con $n = 1$

Supongamos, para generalizar, que $\partial H_1/\partial t \neq 0$ y $\partial H_2/\partial t \neq 0$; admitamos asimismo que, los correspondientes sistemas son integrables analíticamente. Incluiremos también el tiempo en las Ecs. (3) y elegiremos, por ejemplo, la relación de cambio $q = q(Q, P, t)$. El primer miembro de la ecuación lineal (10) comportará entonces el término adicional $\partial q/\partial t$ y, por su parte, los coeficientes A y B dependerán de Q, P y t.

Ahora bien, la presencia explícita del tiempo nos impide aquí plantear la igualdad (6) entre las hamiltonianas (*i.e.*, habría que añadir la derivada parcial en t de una función generatriz); consecuentemente, necesitaremos una alternativa que proporcione la dependencia de p con q, Q, y P. A tal fin, calcularemos una constante de movimiento (dependiente del tiempo) en cada uno de los dos sistemas y, seguidamente eliminaremos t entre las mismas; quedará así la expresión deseada $p = f(q, Q, P; K_1, K_2)$, pero habremos introducido las incómodas constantes arbitrarias K_1 y K_2.

El sistema diferencial (11) se escribirá pues

$$\frac{dQ}{A(Q, P, t)} = \frac{dP}{B(Q, P, t)} = dt = \frac{dq}{E(q, Q, P, t; K_1, K_2)}, \qquad (27)$$

donde

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} \equiv D(q, f(q, Q, P; K_1, K_2), t) \equiv E(q, Q, P, t; K_1, K_2).$$

Al resolver (27) obtendremos tres integrales primeras independientes $G_i(q, Q, P, t; K_1, K_2) = C_i, i = 1, 2, 3$ y la solución general de la ecuación lineal adquirirá entonces la forma

$$\varphi\big[G_1(q, Q, P, t; K_1, K_2), \dots, G_3(q, Q, P, t; K_1, K_2)\big] = 0.$$

Recordando la arbitrariedad de φ escojamos ahora tres soluciones particulares e independientes

$$\varphi_i(G_1, G_2, G_3) \equiv \Psi_i(q, Q, P, t; K_1, K_2) = 0,$$

para $i = 1, 2, 3$; dos de ellas servirán para deducir $K_i = K_i(q, Q, P, t)$, $i = 1, 2$, y estas relaciones sustituidas en la tercera solución nos proporcionarán

$$q = R(Q, P, t). \qquad (28)$$

Teniendo en cuenta (28) denotaremos

$$K_i = K_i[R(Q, P, t), Q, P, t] \equiv K_i^*(Q, P, t),$$

para $i = 1, 2$, y finalmente quedará la nueva ecuación

$$p = f[R(Q, P, t), Q, P, K_1^*(Q, P, t), K_2^*(Q, P, t)] \equiv S(Q, P, t). \qquad (29)$$

El conjunto formado por (28) y (29) constituye una TC particular que intercambia $H_1(q, p, y)$ y $H_2(Q, P, t)$; en cuanto a las restantes TC su proceso de construcción ya es obvio a tenor de lo expuesto.

5.2. EL PI intemporal con $n > 1$

Para centrar ideas imaginemos que $n = 2$. Sean pues $H_1(q_1, q_2, p_1, p_2)$ y $H_2(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ las hamiltonianas consideradas y volvamos a admitir la integrabilidad analítica de los sistemas. Las relaciones (3) se escribirán ahora $q_i = q_i(Q_1, \dots, P_2)$, $p_i = p_i(Q_1, \dots, P_2)$, $i = 1, 2$ y, si elegimos $q_1 = q_1(Q_1, \dots, P_2)$, la Ec. (4) quedará en la forma

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_1} = \sum_{i=1}^{2} A_i(Q_1, \dots, P_2)\frac{\partial q_1}{\partial Q_i} + \sum_{i=1}^{2} B_i(Q_1, \dots, P_2)\frac{\partial q_1}{\partial P_i}, \qquad (30)$$

donde $A_i \equiv \partial H_2/\partial P_i$ y $B_i \equiv -\partial H_2/\partial Q_i$, $i = 1, 2$.

Lo mismo que en (8), propondremos la igualdad de hamiltonianas y, por ejemplo, se deducirá

$$p_2 = f(q_1, q_2, p_1, Q_1, \dots, P_2).$$

Seguidamente pasaremos a calcular dos constantes de movimiento del primer sistema, distintas ambas de H_1 y tales que sean independientes entre sí y también del tiempo. Representando esas constantes por $g_i(q_1, q_2, p_1, p_2) = c_i$, $i = 1, 2$, reemplazaremos en ellas p_2 por $f(q_1, q_2, p_1, Q_1, \ldots, P_2)$ y se obtendrán las expresiones de dependencia

$$\begin{aligned} q_2 =& u(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2), \\ p_1 =& v_1(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2), \\ p_2 =& f[q_1, u(q_1, \ldots, c_2), v_1(q_1, \ldots, c_2), Q_1, \ldots, P_2], \\ \equiv& v_2(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2). \end{aligned} \tag{31}$$

El sistema diferencial asociado a (30) será por tanto

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{A_1(Q_1, \ldots, P_2)} =& \frac{dQ_2}{A_2(Q_1, \ldots, P_2)} \\ \frac{dP_1}{B_1(Q_1, \ldots, P_2)} =& \frac{dP_2}{B_2(Q_1, \ldots, P_2)} \\ =& \frac{dq_1}{E(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2)}, \end{aligned} \tag{32}$$

siendo $E(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2)$ el resultado de sustituir (31) en $\partial H_1/\partial p_1 \equiv D(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Al resolver (32) determinaremos cuatro integrales primeras

$$F_i(q_1; Q_1, \ldots, P_2, c_1, c_2) = C_i,$$

para $i = 1, \ldots, 4$ y entonces la solución general de (30) tendrá la estructura

$$\varphi[F_i(q_1; Q_1, \ldots, c_2), \ldots, F_4(q_1; Q_1, \ldots, c_2)] = 0.$$

Realizando ahora tres elecciones particulares e independientes de la función arbitraria φ y actuando de la misma manera que en 5.1 deduciremos las relaciones $c_i = c_i(q_1, Q_1, \ldots, P_2)$, $i = 1, 2$ así como la ecuación

$$q_1 = R_1(Q_1, Q_2, P_1, P_2). \tag{33}$$

Denotemos aún

$$c_i = c_i[R_1(Q_1, \ldots, P_2), Q_1, \ldots, P_2] \equiv c_i^*(Q_1, \ldots, P_2),$$

para $i = 1, 2$ y, finalmente llevemos las funciones c_1^*, c_2^* y R_1 a las expresiones (31). Como resultado de esto concluimos que

$$q_2 = R_2(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$$

y

$$p_i = S_i(Q_1, Q_2, P_1, P_2), \tag{34}$$

para $i = 1, 2$.

El conjunto constituido por (33) y (34) es la representación de una TC particular para el intercambio entre H_1 y H_2. Pensamos que ya queda bastante claro cómo construir nuevas TC y cómo generalizar el método a $n > 2$.

Cabe imaginar otras opciones resolutivas (y menos laboriosas) para 5.1 y 5.2; no obstante la que aquí exponemos es posiblemente la prolongación más natural de la Sec. 3.

Apéndice

Al revisar la Ref. 5 se comprueba que el autor omite ejemplos de PI tanto en el caso $n > 1$ como en el caso temporal; además, tampoco nos informa sobre las posibles repercusiones del PI en otros ámbitos de la mecánica. Estos hechos podrían hacernos pensar que el problema de intercambio es una simple çuriosidad académica"sin trascendencia práctica. En nuestra opinión tal punto de vista sería rechazable.

En primer lugar, creemos que la citada omisión de ejemplos no se debe tanto a una eventual carencia de interés en los mismos sino más bien a la excesiva complicación de cálculo que exigiría el ML para resolverlos. Con el nuevo método, tales ejemplos resultarían manejables en razón de una operatividad que, aunque laboriosa, sería más simple que la exigida por el ML.

En segundo lugar como consecuencia de recientes investigaciones (aún no comunicadas), hemos encontrado que la resolución del PI intemporal con $n = 2$ ofrece aplicaciones destacables en relación con sistemas de fuerzas centrales elásticas (tipo Hooke) y de dirección constante. Asimismo el PI se manifiesta útil como instrumento de conexión e interpretación entre las constantes de movimiento de los sistemas hamiltonianos. En el curso de las citadas investigaciones hemos tenido ocasión de aplicar el nuevo método a PI temporales (con $n = 1$) e intemporales (con $n = 2$). Sería interesante presentarlos aquí como ilustración de 5.1 y 5.2, pero, a fin no alargar más este artículo, hemos decidido reservarlos para posibles trabajos posteriores.

Pretendemos que estas ideas, con las que concluimos el artículo, sirvan para que el problema de intercambio sea merecedor de un más detenido y avanzado estudio.

1. H. Goldstein *Mecánica Clásica*, 2a edición, (Reverté, Barcelona, 1988), p.466.
2. E.N. Glass y J.J.G. Scanio, *Am. J. Phys.* **45** (1977) 344.
3. C.M. Caves *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **52** (1980) 364.
4. R. Lynch, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1405.
5. R. Lynch, *Amer. J. Phys.* **53** (1985) 176.
6. Consultar por ejemplo Ref. 1 ahora en p. 533.
7. P.P. Adam, *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales*, 15a edición, (Nuevas Gráficas, Madrid, 1978), p. 221.
8. A. Rañada, *Dinámica Clásica*, (Alianza Editorial, Madrid, 1990), p. 570.
9. M. Moshinsky y Winternitz *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1667.