

# Comportamiento asintótico para el periodo del péndulo simple

F. Chaos Urdampilleta

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas  
Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.  
chaos@gina.esfm.ipn.mx*

L. Chaos Cador

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apdo. Post. 20-364, 01000 México, D.F.  
lorea@fisica.unam.mx*

Recibido el 29 de abril de 2002; aceptado el 20 de agosto de 2002

We investigate the asymptotic behaviors of the period for a simple pendulum with arbitrary initial conditions. The study of the vibrational and rotational solutions for the simple pendulum shows that in the asymptotic limit the behavior is of the same type for both motions, when the energy tends to  $mgl$ . Here we present a logical deduction for the behavior in both cases. We obtain that the asymptotic behavior of the period goes to infinity logarithmically for the two solutions of the pendulum.

*Keywords:* Asymptotics behaviors; period; simple pendulum.

Se estudia el comportamiento asintótico del periodo para un péndulo simple sometido a condiciones iniciales arbitrarias, analizando las soluciones vibracional y rotacional, las cuales muestran, en el límite asintótico, el mismo comportamiento cuando la energía tiende a  $mgl$ . Se presentan gráficamente resultados numéricos de las soluciones concluyendo que el comportamiento asintótico del periodo tiende a infinito de forma logarítmica.

*Descriptores:* Comportamientos asintóticos; periodo; péndulo simple.

PACS: 01.55.+b; 02.30.Hq

## 1. Introducción

En mecánica clásica uno de los problemas más estudiados y conocidos es el del péndulo simple. La solución de la ecuación de movimiento se puede encontrar resolviendo numéricamente dicha ecuación sujeta a condiciones iniciales dadas. El interés principal de este trabajo recae en estudiar los comportamientos asintóticos del periodo para el péndulo simple [1].

En el presente artículo se escribe el periodo del péndulo simple como función de la energía considerando los siguientes casos: movimiento vibracional y movimiento rotacional obteniendo el comportamiento asintótico del periodo para estos casos. Además, se presenta otro caso en el cual el péndulo tiende asintóticamente a la posición vertical donde permanece indefinidamente y por supuesto no es periódico su movimiento.

En la Sec. II se resuelve el movimiento vibracional y se deduce el comportamiento asintótico para el periodo como función de la energía. En la Sec. III se presenta el mismo formalismo para el movimiento rotacional.

## 2. Movimiento vibracional

Para un péndulo de masa  $m$  y longitud  $l$ , se tiene la ecuación de movimiento bien conocida

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

donde  $\omega_0^2 = g/l$ , con  $l$  la longitud del péndulo y  $g$  la aceleración local de la gravedad. Al realizar una primera integración de la Ec. (1) como función de la energía  $E$ , se obtiene

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta, \quad (2)$$

donde se ha escogido el nivel de referencia en  $\theta = \pi/2$  (energía potencial cero); es decir, el plano de donde cuelga el péndulo. Esta expresión se puede reescribir como

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l}k^2 \left[ 1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{k^2} \right], \quad (3)$$

con

$$k^2 = \frac{1 + \frac{E}{mgl}}{2}, \quad k < 1. \quad (4)$$

Para integrar (3) se hace el cambio de variable

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{k}, \quad (5)$$

con lo que se obtiene

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}(k, \varphi). \quad (6)$$

Esta integral es una integral elíptica incompleta de primera clase. Para obtener el periodo del movimiento vibracional es conveniente partir del reposo ( $\dot{\theta} = 0 ; \theta = \theta_0$ ). Con estas condiciones iniciales se obtiene de (5) que  $\varphi = \pi/2$  para la amplitud inicial, ya que  $k = \sin \theta_0/2$ . Por consiguiente, el péndulo tarda un cuarto del periodo para llegar a la base y al tomar  $t_0 = 0$ , la cual es una constante de integración irrelevante en (6), el periodo queda dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K} \left( k, \frac{\pi}{2} \right), \quad (7)$$

donde la función  $\mathbf{K}(k, \pi/2)$  es la integral elíptica completa de primera clase. Para obtener un comportamiento asintótico de la expresión (7), se desarrolla el denominador término a término y usando el teorema de Wallis [2], se obtiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]. \quad (8)$$

Para  $k \ll 1$  el comportamiento asintótico del periodo es

$$T = T_0 \left[ 1 + \left(\frac{1}{4}\right) k^2 \right]. \quad (9)$$

Para  $k \sim 0$  se obtiene el comportamiento armónico del péndulo. Este comportamiento deja de ser válido cuando la desviación angular es de 9 grados aproximadamente. El resultado se observa en la Fig. 1 (parte izquierda), pues el periodo es independiente de la amplitud y el periodo es  $T = T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Cuando la energía aumenta aproximándose a  $mgl$ ,  $k$  tiende a la unidad como se puede observar de (4), y la integral elíptica diverge conforme a [3]

$$\mathbf{K} \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left( \frac{16}{1 - k^2} \right). \quad (10)$$

Por lo tanto, se ha obtenido que el periodo diverge logarítmicamente como

$$T = T_0 \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{16}{1 - k^2} \right). \quad (11)$$

Este resultado puede observarse gráficamente al resolver numéricamente la expresión (7), la cual se muestra en la Fig. 1. Esta gráfica se obtuvo mediante un programa numérico realizado en Fortran. El lado izquierdo de la gráfica ( $E' < 1$ ) corresponde a este, hecho donde la singularidad está en  $E' = 1$ , es decir

$$E' = \frac{E}{mgl} = 1. \quad (12)$$

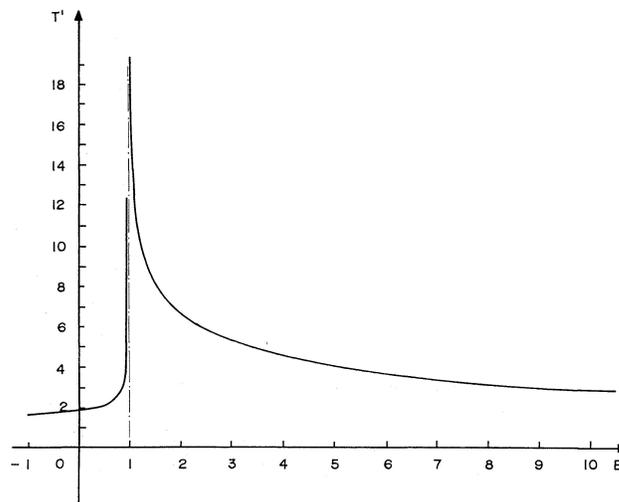


FIGURA 1. El periodo del péndulo simple como función de la energía para condiciones iniciales arbitrarias.  $E' = E/mgl$  and  $t' = \omega_0 t$ .

### 3. Movimiento rotacional

Ahora se considera que el péndulo rota y el cálculo es análogo al caso descrito en la sección anterior. En este caso se escribe la expresión (2) como

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l} \frac{1}{k^2} \left[ 1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (13)$$

lo que implica que se ha cambiado  $k \rightarrow 1/k$  y por consiguiente (4) se convierte en

$$k^2 = \frac{2}{1 + \frac{E}{mgl}}. \quad (14)$$

Al tomar el cambio de variable  $\varphi = \theta/2$ , se llega a una expresión similar a la Ec. (6), dada por

$$t - t_0 = k\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} = k\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}(k, \varphi), \quad (15)$$

la cual también es una integral elíptica incompleta de primera clase. Para el caso del movimiento rotacional, el péndulo cumple un periodo completo en  $2\pi$ , de forma que ahora el periodo es dos veces el tiempo que el péndulo tarda en ir de 0 a  $\pi$ . Por lo tanto, al tomar  $t_0 = 0$  como en el caso anterior, se tiene

$$T = 2k\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1 - k^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}} = 2k\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K} \left( k, \frac{\pi}{2} \right). \quad (16)$$

De modo que se ha obtenido una integral elíptica completa de primera clase análoga a (7) pero multiplicada por  $k$ . El comportamiento asintótico de la integral elíptica involucrada en (16) es del mismo tipo que el caso anterior cuando  $k \rightarrow 1$  y por consiguiente el periodo también diverge logarítmicamente como en el análisis hecho en la sección anterior para el movimiento vibracional. Para el caso en que  $k \rightarrow 0$  se tiene que  $\mathbf{K}(k, \pi/2)$  tiende a  $\pi/2$  y por lo tanto el periodo tiende a

$$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_0 \frac{k}{2}. \quad (17)$$

Este comportamiento se muestra en la parte derecha de la gráfica que corresponde al comportamiento del periodo cuando  $E \rightarrow \infty$  es decir, cuando  $k \rightarrow 0$  y por lo tanto  $\mathbf{T} \rightarrow 0$ , como se puede apreciar de (17), lo cual es razonable puesto que el tiempo que toma el péndulo en cruzar un punto fijo de la circunferencia descrita por la masa  $m$  decrece si la velocidad angular crece. El comportamiento asintótico cuando  $E' \rightarrow 1$  ó  $k \rightarrow 1$  es el mismo que en la parte izquierda de la gráfica, es decir, tiende a infinito logarítmicamente, con el mismo tipo de función (10), excepto por el factor multiplicativo que tiende a 1 cuando  $E$  crece.

Para completar este análisis se incluye el caso en el cual el péndulo se encuentra en la separatriz entre los movimientos oscilatorio y rotatorio, cuya solución se puede encontrar exactamente. Para ello se parte de las Ecs. (3) y (4) cuando  $E = mgl$  o sea  $k \rightarrow [4]$ . Entonces

$$\frac{l}{2g} \dot{\theta}^2 = 2k^2 \left[ 1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{k^2} \right]. \quad (18)$$

Haciendo el cambio de variable

$$y = \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

se obtiene

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{g}{l}} (1 - y^2), \quad (20)$$

cuya integral es

$$y = \tanh \left[ \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0) \right], \quad (21)$$

de donde finalmente se obtiene que

$$\theta = 2 \sin^{-1} \left[ \tanh \left[ \sqrt{\frac{g}{l}} T \right] \right]. \quad (22)$$

Cuando  $\theta = \pi$  se concluye que el periodo  $T \rightarrow \infty$ , es decir el péndulo queda vertical.

Para el caso rotacional se procede en la misma forma partiendo de las Ecs. (13) y (14). El resultado que se obtiene es el mismo que en el caso descrito anteriormente, es decir se obtiene la Ec. (19) y por consiguiente se obtiene la misma conclusión, para la parte derecha de la gráfica cuando  $k = 1$ .

La manera en que se llega a estas situaciones asintóticas es aumentando la amplitud del péndulo en el movimiento oscilatorio o disminuyendo la velocidad angular en el caso rotacional.

1. G.R. Fowles, G.L. Lissiday, *Analytical Mechanics*, 6ª edición, (Saunders College Publishing, Nueva York, 1999).
2. A.G. Greenhill, *The Applications of Elliptic Functions*, (Dover Publications, Inc. Nueva York, 1959).
3. L.M. Milne Thomson "Elliptic Integrals" en M. Abramowitz

and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications, Inc, New York, 1964), p.591.

4. E.T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, (Dover Publications, Nueva York, 1944), p.72.