Fórmulas y teoremas de adición de las funciones elípticas de Jacobi

G. Bautista, E. Piña y E. Soto
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa,
P. O. Box 55 534
México, D. F., 09340 México
e-mail: pge@xanum.uam.mx

Recibido el 19 de julio de 2002; aceptado el 9 de octubre de 2002

Este trabajo está dedicado al estudio sistemático de las fórmulas y teoremas de adición de las funciones elípticas de Jacobi. Demostramos a partir de las propiedades fundamentales todas las ecuaciones conocidas y, al mismo tiempo, clasificamos las ecuaciones y las ordenamos en la forma de mayor utilidad, de manera que se puede disponer de un formulario satisfactorio. Se expresan los teoremas de adición con lenguaje vectorial, como 5 vectores paralelos de dimensión 4, y se descubren con estructura muy simple a 16 vectores ortogonales a la dirección anterior de los 5 vectores. Se agrupan los 16 en conjuntos de cuatro vectores, ortogonales también a un vector de la base estándar. Cada grupo de los cuatro vectores es linealmente dependiente de dos vectores, con lo cual asociamos un tensor antisimétrico a cada cuarteto.

Descriptores: Teoremas de adición, funciones de Jacobi, relaciones de ortogonalidad.

This paper is dedicated to the systematic study of the formulae and addition theorems of the Jacobi's functions. Starting from fundamental properties, we show most known equations and, at the same time, we classify and sort them in the most useful form, in order to get a satisfactory formulary. The addition theorems are expressed in vectorial language, as five parallel vectors in four dimensions. We also discover 16 orthogonal vectors to the above mentioned direction, with a very simple structure, notwithstanding only three of them are linearly independent. We group them in sets of four vectors, also orthogonal to one different vector of the standard basis. In each group of four vectors, only two of them are linearly independent, therefore we associate an antisymmetric tensor to each quartet.

Keywords: Addition theorems, Jacobi's functions, orthogonaly relations.

PACS: 45.40.Cc; 02.30.Gp

1. Introducción

Las funciones elípticas de Jacobi permiten obtener la solución de muchos problemas de la física. Entre los más conocidos se pueden mencionar la descripción del movimiento del péndulo simple [1], la dependencia en el tiempo del momento angular y la velocidad angular del trompo asimétrico libre, atribuido a Euler [2]; el movimiento del ángulo entre las direcciones de la fuerza y del eje de simetría en el movimiento del trompo pesado, acreditado a Lagrange [3]. También es de ayuda en la descripción de la forma que toma una varilla elástica que se encuentra en equilibrio doblada por la acción de dos fuerzas iguales aplicadas en sus extremos [4]. Recientemente hemos encontrado su uso asociado a problemas eléctricos [5], en la descripción del oscilador de Duffing [6]; y en el movimiento espiral de Seiffert con velocidades lineal y angular constantes sobre la superficie de una esfera [7]. También se han usado en la solución de las ecuaciones de Ginzburg-Landau en superconductividad.

Al estudiar las propiedades de las funciones de Jacobi nos encontramos con la sorpresa de que los formularios de propiedades de las funciones de Jacobi son excesivamente pobres cuando se buscan las fórmulas asociadas a los teoremas de adición y otras expresiones similares, ya que una gran cantidad de manuales accesibles usados con frecuencia $[8, 9, 10, 11]$ se reducen a incluir tres ecuaciones que escribimos a continuación:

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha)\,\mathrm{sn}^2(\beta)}\,, \quad (1)$$

$$\mathrm{cn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)-\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha)\,\mathrm{sn}^2(\beta)}\,, \quad (2)$$

$$\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)-k^2\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha)\mathrm{sn}^2(\beta)}\,, \quad (3)$$

donde k es el módulo de las funciones elípticas de Jacobi, que en algunas notaciones modernas se reemplaza por $m = k^2$.

Con este trabajo pretendemos llenar el vacío existente en estos manuales y aportar un formulario de muchas propiedades que pueden ser de gran utilidad, pero no están accesibles. Seguimos en esto la filosofía elemental de que sólo se puede usar lo que se conoce.

Por supuesto que muchas de estas ecuaciones fueron conocidas por los matemáticos del siglo antepasado, pero se expresaron en notaciones menos conocidas hoy, y se encuentran en libros que no existen en las bibliotecas de nuestro mundo. Por ejemplo el teorema de adición para la función $\mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ viene en tres formas en un ejercicio del libro de análisis de Whittaker y Watson [12] atribuido a Cayley en su libro de funciones elípticas de 1876. Nosotros recuperamos la demostración de esas formas y otras más.

Para la demostración de estos teoremas usamos propiedades elementales de las funciones de Jacobi, sus derivadas y propiedades algebraicas que resultan de las anteriores cuando se agregan ciertos valores particulares. Las derivadas de las funciones de Jacobi son

$$\frac{d\,\mathrm{sn}(\gamma)}{d\gamma} = \mathrm{cn}(\gamma)\,\mathrm{dn}(\gamma)\,, \quad (4)$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}(\gamma)}{d\gamma} = -\mathrm{sn}(\gamma)\,\mathrm{dn}(\gamma) \tag{5}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}(\gamma)}{d\gamma} = -k^2\,\mathrm{sn}(\gamma)\,\mathrm{cn}(\gamma)\,, \tag{6}$$

las cuales tienen las constantes de integración

$$\mathrm{sn}^2\gamma + \mathrm{cn}^2\gamma = 1\,, \tag{7}$$

$$k^2\,\mathrm{sn}^2\gamma + \mathrm{dn}^2\gamma = 1 \quad \text{y} \tag{8}$$

$$\mathrm{dn}^2\gamma - k^2\,\mathrm{cn}^2\gamma = 1 - k^2\,, \tag{9}$$

que resultan de las derivadas anteriores y de las condiciones iniciales, que también serán usadas en lo que sigue:

$$\mathrm{sn}(0) = 0\,, \tag{10}$$

$$\mathrm{cn}(0) = 1 \quad \text{y} \tag{11}$$

$$\mathrm{dn}(0) = 1\,. \tag{12}$$

2. Método elemental de Abel para obtener fórmulas de adición

El gran matemático H. Abel escribió en 1827 una memoria sobre muchas propiedades de las funciones elípticas, referida por Whittaker [12], donde se describe un método geométrico, en el cual se interseca una curva algebraica, parametrizada con funciones elípticas, con una recta, y resultan de ahí los teoremas de adición. Esta idea de Abel es muy hermosa, pero no nos parece la más adecuada para un artículo de enseñanza. En la misma memoria introduce Abel otro método mucho más simple para encontrar las mismas propiedades; método que según el mismo Whittaker [12] fue redescubierto por Cayley en 1885. Estos resultados los pone Whittaker como ejercicios, lo cual restringe su aplicación porque esconde la magnitud de los resultados. Para la demostración de ellos se usan exclusivamente las Ecs. (4) a (12) de la introducción.

Se calcula la derivada parcial respecto a α de la función simétrica

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) + \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) + \mathrm{cn}(\beta)},$$

y mediante el uso de las relaciones cuadráticas entre las funciones elípticas se encuentra dicha derivada en la forma simétrica

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha)+\mathrm{cn}(\beta)} = \frac{\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)(\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)-k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta))+(1-k^2)\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)}{(\mathrm{cn}(\alpha)+\mathrm{cn}(\beta))^2}, \tag{13}$$

cuya simetría nos dice que también es igual a la derivada

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) + \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) + \mathrm{cn}(\beta)},$$

por lo que dicha función que se deriva es función únicamente del argumento $\alpha + \beta$

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) + \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) + \mathrm{cn}(\beta)} = f(\alpha+\beta)\,, \tag{14}$$

y esta función se encuentra fácilmente haciendo en ambos miembros $\beta = 0$. Con lo cual resulta

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) + \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) + \mathrm{cn}(\beta)} = \frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha+\beta)+1}\,. \tag{15}$$

Este procedimiento se repite con la función simétrica

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) - \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) - \mathrm{cn}(\beta)}$$

para encontrar

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) - \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha) - \mathrm{cn}(\beta)} = \frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha+\beta)-1}\,. \tag{16}$$

Las Ecs. (15) y (16) se escriben en las formas

$$\begin{aligned}[\mathrm{cn}(\alpha+\beta)+1][\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) + \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)] \\ = [\mathrm{cn}(\alpha)+\mathrm{cn}(\beta)]\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{cn}(\alpha+\beta)-1][\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) - \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)] \\ = [\mathrm{cn}(\alpha)-\mathrm{cn}(\beta)]\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,,\end{aligned}$$

cuya semisuma y semidiferencia nos dan las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta) - \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha+\beta) \\ = \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta) - \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\alpha+\beta) \\ = \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Cada una de estas ecuaciones ya no es simétrica en α y β, pero una se transforma en la otra al intercambiar estas variables. Además forman un sistema de dos ecuaciones, de las cuales se pueden despejar las funciones $\mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ y $\mathrm{cn}(\alpha+\beta)$, en las formas

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{sn}^2(\beta)\mathrm{dn}^2(\alpha)-\mathrm{sn}^2(\alpha)\mathrm{dn}^2(\beta)}{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\beta)} \tag{19}$$

$$\mathrm{cn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)}{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\beta)}, \tag{20}$$

las cuales no son de la forma más conocida (1) y (2). La Ec. (19) por medio de la identidad (8) se puede simplificar a la forma

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{sn}^2(\beta)-\mathrm{sn}^2(\alpha)}{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\beta)}. \tag{21}$$

Repitiendo el tratamiento anterior para las funciones simétricas

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)+\mathrm{dn}(\beta)}\,,\,\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{dn}(\beta)}\,,$$

se encuentran las propiedades

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)+\mathrm{dn}(\beta)}=\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{dn}(\alpha+\beta)+1} \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{dn}(\beta)}=\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{dn}(\alpha+\beta)-1}\,. \tag{23}$$

Y de ellas vienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}&[\mathrm{dn}(\alpha+\beta)+1]\,[\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)]\\&\qquad=[\mathrm{dn}(\alpha)+\mathrm{dn}(\beta)]\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta).\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&[\mathrm{dn}(\alpha+\beta)-1]\,[\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)]\\&\qquad=[\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{dn}(\beta)]\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,,\end{aligned} \tag{25}$$

cuya suma y diferencia nos dan las ecuaciones

$$\begin{aligned}&\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)-\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\\&\qquad=\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{dn}(\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\\&\qquad=\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,,\end{aligned} \tag{27}$$

de las cuales podemos despejar $\mathrm{sn}(\alpha+\beta)$ y $\mathrm{dn}(\alpha+\beta)$. Pero la forma de la primera es equivalente a (21), por lo cual escribimos solamente

$$\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\beta)}. \tag{28}$$

Aprovechando la ventaja de que las tres ecuaciones (20), (21) y (28) tienen el mismo denominador, demostramos fácilmente las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}&-\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha+\beta)\\&\qquad+\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=0\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}&-\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha+\beta)\\&\qquad+\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=0.\end{aligned} \tag{30}$$

También hemos encontrado tres ecuaciones simétricas que se encuentran de las Ecs. (20) y (28), después de cancelar el denominador común

$$k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta)+\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta)=\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&k^2\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha+\beta)-\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\\&\qquad=-(1-k^2)\end{aligned} \tag{32}$$

$$\mathrm{cn}(\alpha+\beta)+\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta). \tag{33}$$

Obsérvese que las Ecs. (2) y (3), que no fueron demostradas, se pueden deducir de las Ecs. (31) y (33), resolviendo el sistema para las funciones $\mathrm{cn}(\alpha+\beta)$ y $\mathrm{dn}(\alpha+\beta)$. Una vez conocida una de ellas, por ejemplo la (2), la Ec. (1) se puede demostrar al sustituirla en la Ec. (17). Por lo tanto desde ahora se pueden considerar demostradas las Ecs. (1)-(3).

Y de estas ecuaciones se pueden encontrar otras identidades entre funciones de Jacobi. De las Ecs. (2) y (3) se encuentra

$$\begin{aligned}&\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha+\beta)-\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\\&\qquad=-(1-k^2)\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta).\end{aligned} \tag{34}$$

Las Ecs. (20), (21) y (28) son la solución del sistema de ecuaciones (29-31) y aportan otra forma diferente de aquélla que aparece en las ecuaciones más conocidas (1-3). Pero otras expresiones, igualmente válidas, se presentan más adelante.

Nuevas expresiones simétricas similares a las funciones con las cuales iniciamos esta sección se pueden obtener de la pareja de Ecs. (29) y (30), cuya suma y diferencia nos producen las ecuaciones

$$\frac{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{sn}(\alpha){+}\mathrm{sn}(\beta)}=\frac{\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta){+}\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta)} \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){-}\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{sn}(\alpha){-}\mathrm{sn}(\beta)}=\frac{\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta){-}\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta)}. \tag{36}$$

Para que estas ecuaciones nos produzcan otras ecuaciones que no están demostradas, usamos ahora la identidad que viene de las relaciones cuadráticas (7) y (8):

$$\mathrm{dn}^2(\gamma)-\mathrm{cn}^2(\gamma)=(1-k^2)\,\mathrm{sn}^2(\gamma) \tag{37}$$

que usamos en la forma

$$\frac{\mathrm{dn}(\gamma)+\mathrm{cn}(\gamma)}{\mathrm{sn}(\gamma)}=(1-k^2)\,\frac{\mathrm{sn}(\gamma)}{\mathrm{dn}(\gamma)-\mathrm{cn}(\gamma)} \tag{38}$$

Las Ecs. (35) y (36) se convierten de esta forma en

$$[\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta){-}\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta)][\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)] = (1{-}k^2)[\mathrm{sn}(\alpha){+}\mathrm{sn}(\beta)]\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta) \tag{39}$$

$$[\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta){+}\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta)][\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){-}\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)] ={-}(1{-}k^2)[\mathrm{sn}(\alpha){-}\mathrm{sn}(\beta)]\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta), \tag{40}$$

cuyas semisuma y semidiferencia miembro a miembro nos da las ecuaciones

$$(1-k^2)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha+\beta) -\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=0 \tag{41}$$

$$(1-k^2)\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha+\beta) -\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha+\beta)=0. \tag{42}$$

Si resolvemos el sistema de tres Ecs. (29), (32) y (41) se encuentran los teoremas de adición en la forma

$$\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta){=}\frac{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\beta)}, \tag{43}$$

$$\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta) {=}\frac{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\beta){-}(1{-}k^2)\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)}{\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\beta)} \tag{44}$$

$$\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta){=}\frac{(1{-}k^2)\mathrm{sn}^2(\beta){+}\mathrm{cn}^2(\beta)\mathrm{dn}^2(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\beta)}. \tag{45}$$

La misma idea permite escribir las siguientes ecuaciones entre funciones simétricas

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha)+\mathrm{cn}(\beta)}=\frac{1-\mathrm{cn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)} \tag{46}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha)-\mathrm{cn}(\beta)}=\frac{1+\mathrm{dn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}, \tag{47}$$

de las cuales vienen las ecuaciones

$$\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha+\beta)=\mathrm{cn}(\alpha) \text{ y} \tag{48}$$

$$\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{sn}(\alpha+\beta)+\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha+\beta)=\mathrm{cn}(\beta). \tag{49}$$

Tenemos también las ecuaciones simétricas

$$k^2\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)}{\mathrm{dn}(\alpha)+\mathrm{dn}(\beta)}=\frac{1-\mathrm{dn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)} \tag{50}$$

$$k^2\frac{\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)}{\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{dn}(\beta)}=\frac{1+\mathrm{dn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}, \tag{51}$$

de las cuales vienen las ecuaciones

$$k^2\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta){+}\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta){=}\mathrm{dn}(\beta) \tag{52}$$

$$k^2\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta){+}\mathrm{dn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta){=}\mathrm{dn}(\alpha). \tag{53}$$

Finalmente resolvemos el sistema de Ecs. (29), (42) y (49) para obtener una cuarta forma de los teoremas de adición de las funciones elípticas de Jacobi:

$$\mathrm{sn}(\alpha{+}\beta){=}\frac{\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta){+}\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)}, \tag{54}$$

$$\mathrm{cn}(\alpha{+}\beta){=}\frac{\mathrm{cn}^2(\beta)\mathrm{dn}^2(\alpha){-}(1{-}k^2)\mathrm{sn}^2(\alpha)}{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta){+}\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)} \tag{55}$$

$$\mathrm{dn}(\alpha{+}\beta) {=}\frac{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta){+}(1{-}k^2)\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha)\mathrm{cn}(\beta){+}\mathrm{sn}(\alpha)\mathrm{sn}(\beta)\mathrm{dn}(\alpha)\mathrm{dn}(\beta)}. \tag{56}$$

Estos teoremas de adición, que se pueden escribir en cuatro formas diferentes, pueden parecer superfluos para quien no los haya utilizado, pero quien los necesite se encontrará fácilmente con la primera forma, pero generalmente ignorará las otras formas porque no las encontrará a primera mano. En algunos libros aparecen como ejercicios a resolver [12, 13], en otros [14] se encuentran inmersos en un cúmulo de información difícil de digerir. Finalmente en libros modernos [15] la información está disfrazada por la elegancia matemática y conviene digerirla más como se hace en la siguiente sección.

Otro asunto que puede discutirse es sobre la aplicación de estos teoremas en la física. La aplicación más notable que nosotros conocemos se encuentra en el teorema de Jacobi [16] que permite escribir la matriz de rotación del movimiento del trompo simétrico de Lagrange como el producto de dos rotaciones de trompos no simétricos sin torcas; en ese caso los teoremas de adición relacionan los parámetros de dichos trompos. Otra aplicación más trivial es en el cálculo y el dibujo de los movimientos del péndulo simple y del trompo sin torcas de Euler, en una dinámica estroboscópica exacta a intervalos iguales de tiempo.

3. Clasificación y análisis de las fórmulas de adición

Escribimos a continuación los teoremas de adición en una expresión matemática que se inspira en Du Val [15], pero con un lenguaje que nos parece más accesible.

Obsérvese que el conjunto de las cuatro formas en que se expresan los teoremas de adición de las tres funciones de Jacobi, por tener cada terna el mismo denominador, se puede dar en lenguaje vectorial afirmando que los cinco vectores siguientes de 4 dimensiones son todos paralelos, para todos los valores permitidos de las variables α y β:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\alpha+\beta) \\ \mathrm{cn}(\alpha+\beta) \\ \mathrm{dn}(\alpha+\beta) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}^2(\alpha)-\mathrm{sn}^2(\beta) \\ \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\beta)-\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ \mathrm{cn}^2(\beta)\,\mathrm{dn}^2(\alpha)-(1-k^2)\,\mathrm{sn}^2(\alpha) \\ \mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)+(1-k^2)\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta) \\ \mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)+\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ \mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)-(1-k^2)\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta) \\ (1-k^2)\,\mathrm{sn}^2(\beta)+\mathrm{cn}^2(\beta)\,\mathrm{dn}^2(\alpha) \\ \mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)+k^2\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\beta)+\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ \mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta)-\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ \mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta)-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ 1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha)\,\mathrm{sn}^2(\beta) \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Las ecuaciones para el argumento $\alpha-\beta$ se deducen con facilidad de las anteriores al tomar en cuenta que las funciones $\mathrm{cn}(\beta)$ y $\mathrm{dn}(\beta)$ son funciones pares de su argumento, mientras que la función $\mathrm{sn}(\beta)$ cambia de signo al cambiar el signo de β.

Du Val [15] agrupa los cuatro últimos vectores en una matriz en notación compacta inventada por Glaisher en 1881

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} s_1^2-s_2^2 & s_1c_1d_2+s_2c_2d_1 & s_1c_2d_1+s_2c_1d_2 & s_1c_2d_2+s_2c_1d_1 \\ s_1c_1d_2-s_2c_2d_1 & c_2^2d_1^2-(1-k^2)s_1^2 & c_1c_2d_1d_2-(1-k^2)s_1s_2 & c_1c_2-s_1s_2d_1d_2 \\ s_1c_2d_1-s_2c_1d_2 & c_1c_2d_1d_2+(1-k^2)s_1s_2 & (1-k^2)s_2^2+c_2^2d_1^2 & d_1d_2-k^2s_1s_2c_1c_2 \\ s_1c_2d_2-s_2c_1d_1 & c_1c_2+s_1s_2d_1d_2 & d_1d_2+k^2s_1s_2c_1c_2 & 1-k^2s_1^2s_2^2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

y nos dice que el rango de la matriz $\mathcal{A}$ es igual a uno.

También es interesante observar que como función de α y β, la matriz de Du Val se traspone al cambiar el signo de β:

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)=\mathcal{A}(\alpha,-\beta). \tag{59}$$

Pero ahora muchas de las ecuaciones escritas en la sección precedente adquieren un significado vectorial. Tenemos 16 vectores perpendiculares a la dirección (57), por lo cual a lo más tres de ellos pueden ser linealmente independientes.

Cuando se estudian estos vectores, se encuentran 4 simétricos respecto a un intercambio de α por β y seis parejas de no simétricos que se intercambian por esta transformación.

Dada una de estas relaciones de ortogonalidad entre vectores, podemos hacerles la transformación $\alpha\ \rightarrow\ \alpha-\beta$, $\alpha+\beta\ \rightarrow\ \alpha$ y posteriormente cambiar el signo de β, tomando en cuenta que la función $\mathrm{sn}(\beta)$ es impar. Se recuperan así las mismas dieciséis relaciones. Se encuentra que una de las simétricas es invariante ante esta transformación, las otras tres simétricas se transforman en tres de las parejas no simétricas y tres de las parejas no simétricas se permutan entre ellas.

Por otra parte, los 16 vectores se descomponen en 4 cuartetos de vectores que tienen nula una componente. Es decir que además de ser perpendiculares al vector (57), también son perpendiculares a uno de los vectores de la base estándar. De esos cuatro, entonces, solo dos de ellos son linealmente independientes.

Pero ante una transformación lineal de dos vectores independientes de componentes a_j y b_k, el tensor antisimétrico $F_{jk}=a_jb_k-a_kb_j$, resulta ser multiplicado por el determinante de la transformación. De hecho al separar los cuartetos en dos parejas, en varios casos cada pareja da lugar al mismo tensor antisimétrico. Los 6 tensores antisimétricos formados por la selección de dos parejas de cada cuarteto, resultan todos proporcionales entre sí y de hecho, salvo por un factor que se presenta en pocos casos, como veremos en seguida, sus componentes son iguales a las componentes de los vectores paralelos (57). Se tiene la ecuación tensorial

$$F_{kl}=m\epsilon_{klpq}\mathcal{A}_{qr}, \tag{60}$$

donde m es un factor de magnitud igual a 1, k^2, o $1-k^2$, ϵ_{klpq} es el tensor unitario completamente antisimétrico de Levi Civita, q es un índice que se suma de 1 a 4, r es una de las tres columnas de la matriz $\mathcal{A}$ que va a corresponder curiosamente a la división en dos parejas del cuarteto de vectores, y p es la componente nula de los vectores del cuarteto.

Consideramos primero el cuarteto de cuatro vectores ortogonales a la dirección (57) con $p=1$, en las Ecs. (31-34)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ -\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ (1-k^2)\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k^2\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta) \\ 1 \\ -\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k^2\,\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ -\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ 1-k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{sn}(\beta) \\ -\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \end{pmatrix} \tag{61}$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con la primera o segunda pareja de vectores se encuentra el mismo resultado para ambas parejas:

$$F_{23}{=}\mathcal{A}_{43}, F_{24}{=}{-}\mathcal{A}_{33}, F_{34}{=}\mathcal{A}_{23}, F_{12}{=}F_{13}{=}F_{14}{=}0. \quad (62)$$

Si consideramos el tensor antisimétrico formado por el primer y el tercer vector se tiene

$$F_{23}{=}{-}(1{-}k^2)\mathcal{A}_{44}, F_{24}{=}(1{-}k^2)\mathcal{A}_{34},$$
$$F_{34}{=}{-}(1{-}k^2)\mathcal{A}_{24}, F_{12}{=}F_{13}{=}F_{14}{=}0. \quad (63)$$

Mientras que el tensor antisimétrico formado por el segundo y el cuarto vectores difiere del anterior por la desaparición del factor $1-k^2$

$$F_{23}{=}{-}\mathcal{A}_{44}, F_{24}{=}\mathcal{A}_{34}, F_{34}{=}{-}\mathcal{A}_{24},$$
$$F_{12}{=}F_{13}{=}F_{14}{=}0. \quad (64)$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con la pareja formada por el primer vector con el cuarto se encuentra

$$F_{23}{=}\mathcal{A}_{42}, F_{24}{=}{-}\mathcal{A}_{32}, F_{34}{=}\mathcal{A}_{22}, F_{12}{=}F_{13}{=}F_{14}{=}0. \quad (65)$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con los dos de enmedio, se encuentra el mismo resultado excepto por el factor $-k^2$ que no tiene la pareja previa

$$F_{23}{=}-k^2\mathcal{A}_{42}, F_{24}{=}k^2\mathcal{A}_{32}, F_{34}{=}-k^2\mathcal{A}_{22},$$
$$F_{12}{=}F_{13}{=}F_{14}{=}0. \quad (66)$$

Vamos a estudiar ahora las cuatro relaciones de ortogonalidad con $p=2$ que se encuentran en las Ecs. (26) y (27), y (52) y (53). Los vectores ortogonales a la dirección (57) son

$$\begin{pmatrix} \mathrm{dn}(\alpha) \\ 0 \\ -\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ -\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dn}(\beta) \\ 0 \\ -\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha) \\ -\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^2\,\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ 0 \\ \mathrm{dn}(\alpha) \\ -\mathrm{dn}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^2\,\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha) \\ 0 \\ \mathrm{dn}(\beta) \\ -\mathrm{dn}(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Si se considera al tensor antisimétrico formado por la primera pareja de vectores se tiene

$$F_{13}{=}\mathcal{A}_{41}, F_{14}{=}{-}\mathcal{A}_{31}, F_{34}{=}\mathcal{A}_{11}, F_{12}{=}F_{23}{=}F_{24}{=}0. \quad (68)$$

Pero el tensor antisimétrico formado por la segunda pareja de vectores tiene un factor extra de k^2:

$$F_{13}{=}k^2\mathcal{A}_{41}, F_{14}{=}{-}k^2\mathcal{A}_{31}, F_{34}{=}k^2\mathcal{A}_{11},$$
$$F_{12}{=}F_{23}{=}F_{24}{=}0. \quad (69)$$

El tensor formado con el primer y tercer vectores coincide con el formado con el segundo y cuarto vectores:

$$F_{13}{=}\mathcal{A}_{44}, F_{14}{=}{-}\mathcal{A}_{34}, F_{34}{=}\mathcal{A}_{14}, F_{12}{=}F_{23}{=}F_{24}{=}0. \quad (70)$$

También coincide el tensor formado con los vectores primero y cuarto, con el tensor formado con los dos vectores de enmedio:

$$F_{13}{=}\mathcal{A}_{43}, F_{14}{=}{-}\mathcal{A}_{33}, F_{34}{=}\mathcal{A}_{13}, F_{12}{=}F_{23}{=}F_{24}{=}0. \quad (71)$$

En seguida consideramos las cuatro relaciones de ortogonalidad (17) y (18), y (48) y (49), asociadas a los cuatro vectores perpendiculares al vector (57), con $p=3$. Éste es un caso excepcional en que los tres factores m son iguales a uno:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ \mathrm{cn}(\alpha) \\ 0 \\ -\mathrm{cn}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ \mathrm{cn}(\beta) \\ 0 \\ -\mathrm{cn}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{cn}(\alpha) \\ -\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ 0 \\ -\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{cn}(\beta) \\ -\mathrm{sn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ 0 \\ -\mathrm{sn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con la primera o la segunda pareja de vectores se encuentran

$$F_{12}{=}\mathcal{A}_{41}, F_{14}{=}{-}\mathcal{A}_{21}, F_{24}{=}\mathcal{A}_{11}, F_{13}{=}F_{23}{=}F_{34}{=}0. \quad (73)$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con la pareja formada por el primer vector con el cuarto o con los dos de enmedio se encuentra

$$F_{12}{=}{-}\mathcal{A}_{42}, F_{14}{=}\mathcal{A}_{22}, F_{24}{=}{-}\mathcal{A}_{12},$$
$$F_{13}{=}F_{23}{=}F_{34}{=}0. \quad (74)$$

Si calculamos el tensor antisimétrico con la separación en parejas que falta encontramos

$$F_{12}{=}-\mathcal{A}_{44}, F_{14}{=}\mathcal{A}_{24}, F_{24}{=}-\mathcal{A}_{14},$$
$$F_{13}{=}F_{23}{=}F_{34}{=}0. \qquad (75)$$

Para terminar nuestra lista se analiza el cuarteto de vectores que tiene nula su última componente ($p = 4$) y son perpendiculares a la dirección (57), de acuerdo a las Ecs. (29) y (30), y a las Ecs. (41) y (42)

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{dn}(\alpha)\,\mathrm{cn}(\beta) \\ \mathrm{sn}(\beta) \\ \mathrm{sn}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{dn}(\beta)\,\mathrm{cn}(\alpha) \\ \mathrm{sn}(\alpha) \\ \mathrm{sn}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-k^2)\,\mathrm{sn}(\beta) \\ \mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ -\mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-k^2)\,\mathrm{sn}(\alpha) \\ \mathrm{cn}(\alpha)\,\mathrm{dn}(\beta) \\ -\mathrm{cn}(\beta)\,\mathrm{dn}(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (76)$$

Si se considera el tensor antisimétrico formado por la primer pareja de vectores se tiene

$$F_{12} = -\mathcal{A}_{31}, F_{13} = \mathcal{A}_{21}, F_{23} = -\mathcal{A}_{11},$$
$$F_{14} = F_{24} = F_{34} = 0. \qquad (77)$$

En este caso el tensor antisimétrico formado por la segunda pareja de vectores tiene un factor extra de $1 - k^2$:

$$F_{12} = -(1-k^2)\mathcal{A}_{31}, F_{13} = (1-k^2)\mathcal{A}_{21},$$
$$F_{23} = -(1-k^2)\mathcal{A}_{11}, F_{14} = F_{24} = F_{34} = 0. \qquad (78)$$

Las otras dos elecciones de dos parejas de vectores de este cuarteto da como resultado el mismo tensor antisimétrico. El tensor de los vectores uno y tres o de los vectores dos y cuatro es

$$F_{12} = -\mathcal{A}_{33}, F_{13} = \mathcal{A}_{23}, F_{23} = -\mathcal{A}_{13},$$
$$F_{14} = F_{24} = F_{34} = 0. \qquad (79)$$

Mientras que el tensor de los vectores uno y cuatro o de los vectores dos y tres del cuarteto es

$$F_{12} = -\mathcal{A}_{32}, F_{13} = \mathcal{A}_{22}, F_{23} = -\mathcal{A}_{12},$$
$$F_{14} = F_{24} = F_{34} = 0. \qquad (80)$$

Hemos insistido en estas propiedades de ortogonalidad porque son mucho menos conocidas que otras propiedades de las funciones elípticas de Jacobi. Pese a que los diciseis vectores de los cuatro cuartetos son linealmente dependientes de tres direcciones en este espacio de cuatro dimensiones, no parece evidente que lo sean. Aún es poco trivial que sólo dos vectores de cada cuarteto son linealmente independientes. Aquí lo difícil no es formar vectores que sean perpendiculares a la dirección (57), sino encontrar tantos que lo sean de una forma tan poco trivial. Por supuesto que viene a cuestión la utilidad de dichas ecuaciones. Somos optimistas en la importancia de su uso futuro y uno de nosotros las ha usado en la solución del trompo libre asimétrico de Euler [17].

1. M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (J. Wiley, New York, 1966) p. 422.
2. L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1976).
3. J.V. José and E.J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach* (Cambridge University Press, 1998).
4. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison Wesley, Reading, 1964): Vol II.
5. R.H. Good, *European Journal of Physics* **22** (2001) 119.
6. J.P. Baltanás, J.L. Trueba and M.A.F. Sanjuán, *Physica D* **159** (2001) 22.
7. P. Erdös, *American Journal of Physics* **68** (2000) 888.
8. L.M. Milne Thomson en M. Abramowitz y I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).
9. Ph.M. Morse and H. Feshback, *Methods of Theoretical Physics* (Mc. Graw Hill, New York, 1953).
10. I.S. Gradshtein and I.M. Rhyshyk, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).
11. W. Magnus and F. Oberhettinger, *Functions of Mathematical Physics* (Chelsea, New York, 1954).
12. E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1965).
13. D.F. Lawden, *Elliptic functions and applications* (Springer Verlag, New York, 1989). p. 43.
14. A.G. Greenhill, *The Application of Elliptic Functions* (Dover, New York, 1959).
15. P. du Val *Elliptic functions and elliptic curves* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973). p. 66.
16. C.G.J. Jacobi, *Gesamelte Werke*, Vol. II, (Chelsea, New York, 1969). p. 476.
17. E. Piña *Rev. Mex. Fís.* **48** (1997) 205.