

# El análisis de Fourier de las trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar

J.A. Peralta

*Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional,  
Edificio 9, UP ALM, Zacatenco, 07738 México, D.F.*

A. Calles y E. Yépez

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado Postal 70-646, 04510 México, D.F.*

Recibido el 30 de julio de 2002; aceptado el 21 de octubre de 2002

Los dos modelos más importantes del sistema solar que preceden a la mecánica de Newton y a su teoría de la gravitación universal, son los elaborados por Kepler y por Copérnico. La relación entre el modelo de Kepler y el trabajo de Newton es ampliamente discutida en todos los libros de texto; sin embargo, la relación entre el modelo de Copérnico, que define la posición de los planetas en función del tiempo a partir de una superposición de movimientos circulares y la mecánica de Newton usualmente se evita. En este trabajo usamos dos técnicas numéricas, sencillas y útiles, para mostrar cómo esto es fácilmente realizable: con el algoritmo de Verlet resolvemos las ecuaciones diferenciales no en coordenadas polares, como es lo usual, sino en coordenadas cartesianas y aplicando el método de la transformada rápida de Fourier hacemos el análisis de los términos de la serie de tiempo, que de una manera natural generan el deferente y epiciclos del modelo copernicano para el movimiento de cada planeta.

*Descriptores:* Mecánica celeste; métodos numéricos.

The most important models before newtonian mechanics and the law of gravitation were established by Kepler and Copernicus. The relation between Newton's theory and Kepler's laws of planetary motion is widely discussed in textbooks; however, the relation with the model of Copernicus, where the position of a planet as a function of time is described as combination of circular motions, is usually avoided. In this work we use two simple and useful numerical techniques to show that this relation is easily performed. We use the algorithm of Verlet to solve the differential equations, not in polar coordinates as is usually done, but in cartesian coordinates, we also use the fast Fourier transform method to analyse the time series that in a natural way generate the deferent and epicycles of the Copernicus' model.

*Keywords:* Celestial mechanics; numerical methods.

PACS: 02.30Nw; 02.60Jh; 95.10Ce

## 1. Introducción

Las observaciones del cielo han jugado un papel esencial en el desarrollo del pensamiento científico desde los griegos y hasta nuestros días. Aun cuando podemos suponer que inicialmente la observación del movimiento del Sol y de las estrellas estuvo orientada por motivos eminentemente prácticos, pronto los observadores de los cielos superaron estos límites para moverse en el plano del interés propiamente científico.

La primera impresión que suscita la observación del cielo a lo largo de toda una noche, es que las estrellas rotan en círculos manteniendo sus posiciones relativas. Esto dio lugar entre los griegos a la creación de un primer modelo del Universo, en el cual la Tierra se encuentra fija en el centro de una esfera en la que se encuentran adheridas las estrellas y que rota con un período de 24 horas aproximadamente. Este modelo habría bastado a los que buscaban representarse mentalmente el movimiento del cielo; sin embargo, siete astros no se comportaban de una manera tan simple, y éstos eran: el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno.

En efecto, con respecto al marco de referencia de las estrellas fijas aparentemente adheridas a la superficie de una es-

fera muy distante, el Sol se iba desplazando día con día sobre una trayectoria cerrada, la "eclíptica", transitándola en aproximadamente 365 días. En cuanto a Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno, éstos se comportaban de una forma extraña; por un lado parecían desplazarse sobre el cielo de una manera no tan regular como lo hacía el Sol, ya que de cuando en cuando su movimiento cambiaba de sentido, es decir "retrogradaban"; por otra parte los astros que presentaban este comportamiento anómalo se movían cerca de la eclíptica y presentaban cambios de brillo: Mercurio y Venus en el momento de su conjunción con el Sol, y Marte, Júpiter y Saturno cuando estaban en oposición.

¿Cómo modelar este comportamiento tan singular de los astros? A este respecto Platón supo formular con precisión la pregunta en cuya respuesta trabajarían arduamente durante siglos algunas de las mentes más brillantes dedicadas al estudio de la astronomía: ¿Cuál es la composición de movimientos que nos puede reproducir los movimientos observados de los planetas? Pregunta que en el contexto de sus creencias sobre el carácter divino de la esfera y el círculo se convertía en esta otra: ¿Cuáles son los movimientos circulares cuya superposición reproduce el movimiento observado de los planetas?.

Eudoxo y Calipo, discípulos de Platón, propusieron un modelo de esferas concéntricas y transparentes, en el cual las esferas interiores rotaban alrededor de ejes inclinados con respecto al eje norte-sur, pivoteando sobre puntos fijos de la esfera exterior más inmediata. Así, por ejemplo, la eclíptica estaba situada sobre una esfera, cuyo eje de rotación formaba un ángulo de 23.5 grados con respecto al eje sur-norte y éste pivoteaba sobre la esfera que contiene a las estrellas fijas.

Estos modelos, con velocidades y ejes de giro adecuados, daban muy bien cuenta de la órbita cerrada del Sol a lo largo de un año, con menor precisión reproducían el movimiento de la Luna y también podían generar el movimiento retrogrado de los planetas, pero al mantener en todo momento a la Tierra equidistante de la superficie de estas esferas, no podían explicar el fenómeno de las estaciones y eran intrínsecamente incapaces de explicar los cambios de brillo de los planetas. Con todo, éste es el modelo básico que, a pesar de sus deficiencias, fue adoptado por Aristóteles [1].

Los astrónomos alejandrinos propusieron otro tipo de modelación que superaba las deficiencias anteriores. Un modelo elemental de este nuevo tipo consistía de un círculo centrado en la Tierra sobre cuyo perímetro se movía el centro de otro círculo, ambos con velocidad angular uniforme. Al primer círculo se le llamaba *deferente*, al segundo *epiciclo*. Cualitativamente éste nuevo tipo de combinación reproducía las propiedades de las esferas concéntricas, pero además superaba sus deficiencias. Por un lado permitía acercarse al planeta a la Tierra y por tanto generar cambios en su luminosidad. Por otra parte, variando adecuadamente sus radios y velocidades angulares se podían generar las órbitas -cerradas o no- de los planetas, así como que sus cambios de brillo ocurrieran en oposición o conjunción con el Sol. El ajuste de modelos de este tipo, a las tablas de datos acumuladas a lo largo de muchos años de observaciones sobre la posición angular de los diferentes planetas, exigió hacerlos más y más complejos, si bien siguiendo la misma lógica de combinar movimientos circulares uniformes (Fig. 1). Se agregaron epiciclos sobre los epiciclos, se propusieron deferentes con centros que no coincidían en rigor con la Tierra, sino que poseían una cierta *excentricidad*, etc. Pero fue así que, con diferentes grados de aproximación numérica se pudo reproducir la fenomenología del movimiento planetario, es decir:

- 1) lograr que los planetas se movieran siempre dentro de unas trayectorias cercanas a la eclíptica,
- 2) que presentaran movimientos retrogradados,
- 3) que durante la retrogradación presentaran cambios de brillo, y
- 4) que estos cambios ocurrieran en conjunción o en oposición al Sol.

En suma, cumplían con todos los requisitos formales que se le puede exigir a un modelo de un fenómeno real. El apogeo de este sistema de modelación en la antigüedad llegó con Ptolomeo, el legendario astrónomo de Alejandría, quien en el

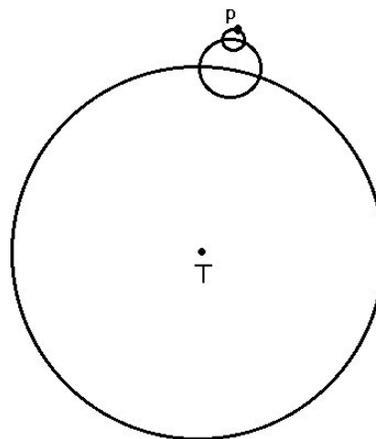


FIGURA 1. Mostramos a la Tierra en el centro del sistema, el círculo mayor es el deferente sobre cuyo perímetro se mueve el centro de un primer epiciclo, a su vez sobre este perímetro se mueve el centro de un segundo epiciclo, P representa al planeta.

Almagesto propuso un modelo para reproducir el movimiento de los astros que constaba de 84 círculos, y que fue de hecho el modelo básico que con algunas variantes se mantuvo durante toda la Edad Media.

### 1.1. Los modelos de Copérnico y Kepler

Como sabemos, durante el siglo XVI, cuando la era moderna comenzaba a despuntar, Copérnico, el gran astrónomo polaco, se atrevió a sacar a la Tierra del centro del Universo para colocar en su lugar al Sol [2, 3], proponiendo un modelo convincente por su extrema sencillez y su capacidad para explicar cualitativamente los movimientos de los planetas; en efecto, en este primer modelo, todos los planetas, incluyendo a la Tierra, giraban en órbitas circulares alrededor del Sol, con radios que se correspondían con la duración de sus respectivos períodos anuales. Sin embargo, aún para los limitados medios de observación de la época al confrontarse con las tablas de posiciones observadas el modelo presentaba discrepancias inaceptables, por lo cual Copérnico tuvo que recurrir a las técnicas tradicionales de montar círculos sobre círculos y desplazar al Sol del centro para alcanzar un ajuste entre su modelo y los datos experimentales, que cuando menos se equiparase al de Ptolomeo. De esta manera el modelo finalmente propuesto por Copérnico perdió la belleza de su sencillez original para volverse un intrincado modelo compuesto de 36 círculos (ver Fig. 2). Copérnico seguía operado así con las categorías de modelación de los antiguos griegos. Con todo y esto, el gran mérito de Copérnico fue que al poner al Sol en el centro del sistema solar y a los planetas en movimiento alrededor de él -incluyendo a la Tierra- inducía a crear una nueva física ya que la física aristotélica era incapaz de explicar hechos que si bien parecían naturales para una Tierra en reposo eran inconcebibles para un planeta cuyos seres y objetos en la superficie giraban con una velocidad tangencial de 450 m/s y que se desplazaba en el espacio a una velocidad de 31 Km/s (¿cómo es que con ese giro y esas velocidades nos manteníamos pegados al suelo, y cómo los

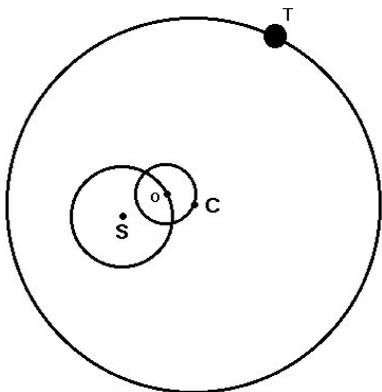


FIGURA 2. Modelo de Copérnico, la tierra T gira en torno al centro C, el cual a su vez gira en torno al centro O que se desplaza sobre el perímetro de un círculo centrado en el Sol.

objetos lanzados hacia arriba caían en el mismo lugar y no sentíamos el vértigo de viajar tan rápido?).

El rompimiento absoluto con el pasado vino con Kepler, quien, a pesar de enmarcar sus propuestas dentro de un marco conceptual sumamente esotérico y de marcado tinte medieval, formuló las tres leyes que en esencia determinan el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

- 1) Los planetas se mueven en elipses con el Sol en uno de sus focos.
- 2) El radio vector que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3) El cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor.

Así, una simple forma elíptica para la trayectoria de los planetas vino a sustituir las complejísimas combinaciones de movimientos circulares tanto de los antiguos sistemas geocéntricos como las del modelo heliocéntrico de Copérnico. La originalidad de Kepler fue introducir la representación del radio vector de los planetas en función del ángulo, mientras que los antiguos astrónomos, incluyendo a Copérnico, intentaban describir la posición de los planetas en función del tiempo. El trabajo de Kepler fue tan revolucionario como el de Copérnico, cambió la visión geométrica del problema, mostró que este movimiento tenía leyes generales que eran independientes de las características propias de cada planeta, y que estas regularidades debían obedecer una dinámica; quedaba solamente por encontrar estas leyes dinámicas.

El trabajo de los astrónomos, desde los antiguos hasta Kepler y Copérnico, fue conformando una concepción del movimiento celeste y en particular de los planetas, que fue la base para que se obtuviera una explicación suficientemente satisfactoria. Como es bien sabido, la explicación definitiva a este problema fue dada por el trabajo posterior de dos grandes sintetizadores, Galileo y Newton. Galileo establece el método experimental como aquel que proporciona la descripción válida de la naturaleza y gracias al uso del telescopio, construido por el propio Galileo, pudo aportar importantes observaciones astronómicas sobre los satélites jovianos, que cons-

tituían un sistema solar en miniatura. Junto a los datos de Galileo, las observaciones de Cassini y Borelli sobre los satélites de Saturno condujeron a Newton al establecimiento de la ley universal de la atracción gravitatoria.

## 2. La teoría de Newton

En esta sección describimos brevemente la aplicación de la teoría de Newton para obtener la descripción kepleriana, este tema -como lo hemos señalado- se encuentra en cualquier libro de texto [4, 5], sin embargo, aquí referiremos los hechos que consideramos relevantes para la discusión de la siguiente sección. El famoso problema mecánico-clásico de dos partículas interactuando por un campo central es posible resolverlo en el marco de la mecánica clásica, por lo menos hasta una expresión cerrada, gracias a que se tiene el número suficiente de constantes de movimiento: el ímpetu total del sistema, el momento angular y la energía. Una constante de movimiento (también llamada primera integral, integral de movimiento o simetría dinámica) es una función entre los grados de libertad del sistema de la siguiente forma:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = cte, \quad (1)$$

siendo  $q_i$  cualquier grado de libertad,  $t$  representa al tiempo y el punto arriba de cada variable significa su derivada con respecto del tiempo. Esta expresión permite en principio despejar un grado de libertad en términos de los restantes, eliminando así un grado de libertad. En el caso del campo central, donde la interacción sólo depende de la magnitud de la distancia entre las dos partículas, la conservación del ímpetu permite eliminar tres grados de libertad (el movimiento del centro de masa) y sólo queda el movimiento de la coordenada relativa. La conservación de la dirección del momento angular permite resolver este problema en el plano eliminando a la coordenada  $z$ , mientras la conservación de su magnitud reduce el problema a una dimensión. Finalmente, la conservación de la energía proporciona la última integral necesaria. En el marco de la teoría de Euler-Lagrange la función de Lagrange se escribe como sigue:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r), \quad (2)$$

$m$  es la masa reducida del sistema,  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas en el plano para el vector de posición relativo y  $V(r)$  es la interacción que sólo depende de la distancia entre las dos partículas,  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos conducen a

$$\frac{d}{dt}(m \dot{r}) - mr \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (4)$$

Esta última ecuación corresponde a la quinta integral de movimiento, la magnitud del momento angular,  $mr^2 \dot{\theta}$ , es una

constante ( $\theta$  es una variable ignorable y esta integral de movimiento corresponde a la simetría de la lagrangiana respecto a rotaciones, por cualquier ángulo, en torno a un eje perpendicular al plano de movimiento), de aquí es inmediato obtener la segunda ley de Kepler:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{l}{2m} = cte.$$

Las soluciones a las Ecs. (3) y (4) resuelven el problema del movimiento en un campo central, pero están acopladas. Para desacoplarlas usamos la Ec. (4):

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}, \tag{5}$$

donde  $l$  es la magnitud del momento angular constante, sustituyendo en la Ec. (3) obtenemos que

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Y para resolver esta última ecuación de segundo orden necesitamos una última integral de movimiento, la energía. Esta constante de movimiento corresponde a la simetría dinámica de la función de Lagrange (o la de Hamilton) con respecto a las translaciones del origen del tiempo, la cual escribimos como

$$\frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{7}$$

La solución inmediata es

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \tag{8}$$

en principio, de esta expresión se podría obtener  $t = t(r)$ , que al invertir proporcionaría  $r = r(t)$ , a su vez sustituida en la Ec. (4) proporcionaría  $\theta = \theta(t)$ , resolviendo el problema. Esta solución nos mantendría en la línea de estudio de los antiguos astrónomos, incluyendo a Copérnico, que buscaban calcular la posición de los planetas como una función del tiempo. Sin embargo las soluciones para  $t = t(r)$  no son analíticas haciendo impracticable la inversión, sólo es posible escribirlas como series infinitas cuyo contenido físico no es fácil de interpretar.

El gran mérito de Kepler consistió en cambiar la visión del problema y en lugar de buscar la solución temporal para  $r$  y  $\theta$  eliminó al tiempo estudiando directamente la geometría de la órbita  $r = r(\theta)$ . Con el advenimiento de la teoría de Newton esta descripción se pudo obtener formalmente. En efecto, de la Ec. (4) sustituimos las variaciones en el tiempo en términos de los incrementos infinitesimales en el ángulo polar:

$$d\theta = \frac{ldt}{mr^2}, \tag{9}$$

que al combinar con la Ec. (8) nos proporciona la llamada ecuación de la órbita para un campo central:

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}. \tag{10}$$

Para el potencial gravitacional  $V(r) = -\alpha/r$  la Ec. (10) se resuelve analíticamente en términos de funciones trigonométricas, resultando

$$r = \frac{\frac{l^2}{m\alpha}}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{11}$$

Ésta es la ecuación de una cónica con excentricidad

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}, \quad \text{si } E = \frac{-m\alpha^2}{2l^2}$$

se trata de un círculo, si la energía es negativa pero mayor que  $-m\alpha^2/2l^2$  la trayectoria es una elipse, para  $\epsilon \geq 0$  se trata respectivamente de hipérbola o parábola. El resultado de la Ec. (11) contiene la primera ley de Kepler; para obtener la faltante tercera ley de Kepler basta con integrar en un periodo la velocidad aerolar  $dA/dt = r^2 \dot{\theta} / 2$ . El éxito más grande de la teoría newtoniana se obtuvo al deducir las tres leyes de Kepler, que a su vez se obtuvieron de observaciones directas del comportamiento de la naturaleza, sin embargo, quedó pendiente el problema de describir el movimiento de los planetas en función del tiempo.

### 2.1. La descripción temporal del movimiento planetario

Los libros de texto usualmente omiten el hecho de que además de la existencia de las integrales de movimiento es necesario hacer un buen uso de estas simetrías dinámicas; por ejemplo, escribir las leyes de conservación en el plano cartesiano  $(x, y)$  del problema de dos cuerpos en un campo central no conduce a una solución equivalente a la de la sección anterior. La solución de Newton, en términos de la órbita, nos proporciona una buena descripción geométrica del problema además de muchas propiedades dinámicas, sin embargo, no resulta útil para describir completamente al movimiento planetario, es decir, para ello será necesario resolver las Ecs. (3) y (4). Una forma de hacerlo e interpretarlas se puede encontrar en el trabajo de F. Hoyle [2], ahí se sustituye la solución (11) en la Ec. (9) y se resuelve, sin embargo la solución para  $r = r(t)$  y  $\theta = \theta(t)$  sólo puede ser obtenida en términos de series infinitas.

Para describir la evolución temporal del movimiento de un planeta regresemos a la Ec. (2) pero ahora escribamos la función de Lagrange en el plano cartesiano:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{12}$$

con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m \ddot{x} + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \tag{13}$$

$$m \ddot{y} + \frac{\alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \tag{14}$$

En este sistema de coordenadas la conservación de la magnitud del momento angular y de la energía se escriben como sigue:

$$l = m(x \dot{y} - y \dot{x}) = cte., \tag{15}$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} = cte. \tag{16}$$

De estas ecuaciones no es posible ni eliminar al tiempo ni separar las variables de una forma que sea manejable, tal como sucede en el sistema polar de coordenadas. Esto se debe a que la simetría apropiada es la rotación sobre un eje perpendicular al plano del movimiento o bien a que la variable  $\theta$  es ignorable, sin embargo ni  $x$  ni  $y$  lo son. La solución a las Ecs. (13) y (14) debe practicarse de otra forma, por ejemplo integrando numéricamente. Hay diversos algoritmos para resolverlas, aquí presentaremos uno muy sencillo y apropiado para este tipo de ecuaciones, el algoritmo de Verlet [6, 7]. Este método permite, con muy buena aproximación y de forma simple, calcular las soluciones a ecuaciones diferenciales de segundo orden, haciendo directamente uso de la segunda ley de Newton. Desarrollando en serie de Taylor el vector de posición:

$$\mathbf{r}(t + \delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)(\delta t)^2 + \dots \tag{17}$$

$$\mathbf{r}(t - \delta t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}(t)\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)(\delta t)^2 - \dots, \tag{18}$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos hasta segundo orden,

$$\mathbf{r}(t + \delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \delta t) + \mathbf{a}(t)(\delta t)^2, \tag{19}$$

mientras que la velocidad se obtiene restando las ecuaciones, esto es,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t - \delta t)}{2\delta t}. \tag{20}$$

De las Ecs. (19) y (20) se puede calcular la posición avanzada  $\mathbf{r}(t + \delta t)$  y la velocidad  $\mathbf{v}(t)$ , si se conocen  $\mathbf{r}(t - \delta t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)/m$ , siendo  $\mathbf{F}$  la fuerza. El cálculo es correcto en  $\mathbf{r}(t + \delta t)$  hasta ordenes  $\delta t^4$  y para  $\mathbf{v}(t)$  hasta ordenes  $\delta t^2$ . Mayores aproximaciones pueden ser obtenidas si incluimos derivadas de orden superior en las ec. (17) y (18). El punto de partida  $\mathbf{r}(t - \delta t)$  se puede conocer de las condiciones iniciales  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t = 0)$  y  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t = 0)$  sustituidas en estas ecuaciones. Además de que el algoritmo resulta de fácil programación, el método resulta muy útil cuando: no son conocidas las integrales de movimiento, el sistema tiene muchas partículas o cuando las interacciones son complejas. Este algoritmo ha sido utilizado con gran éxito en cálculos de dinámica molecular; en computadores personales se pueden realizar cálculos para pocos miles de partículas en tiempos razonables [8]. El algoritmo de Verlet nos puede proporcionar muy aproximadamente la trayectoria de un satélite en presencia del campo gravitacional del Sol, la Tierra y un planeta

como Júpiter, es decir, una trayectoria como la del Voyager. A continuación ilustramos la bondad de este método con el cálculo de la órbita que seguiría un planeta de masa  $m_p$  en el campo gravitacional del Sol de masa  $M_s$ ; es decir, resolveremos las Ecs. (13) y (14) con el algoritmo representado por las Ecs. (19) y (20), por comodidad usaremos las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x(t = 0) &= r_0, & y(t = 0) &= 0, \\ \dot{x}(t = 0) &= 0, & \dot{y}(t = 0) &= v_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Aquí el eje polar está en la dirección del eje  $x$ ; con estas condiciones la energía, la magnitud del momento angular y la excentricidad quedan como sigue:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\alpha}{r_0}, \quad l = mv_0 r_0, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}; \tag{22}$$

recordemos que  $m$  es la masa reducida del sistema,  $\alpha = GM_s m_p$ , y  $G$  es la constante universal de la gravitación. El intervalo seleccionado para el cálculo fue  $\delta t = (1/2048)T_p = (1/2^n)T_p$ , con  $T_p$ , el periodo del planeta en unidades astronómicas, con  $n = 11$ , por razones que explicaremos más adelante.

Los resultados obtenidos con el algoritmo de Verlet son series discretas de tiempo para  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ , y  $\dot{y}(t)$ . Aunque estos resultados son más difíciles de interpretar y analizar, en principio una vez que se conoce la solución  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  todas las propiedades dinámicas del sistema pueden ser calculadas. A continuación mostraremos un análisis cualitativo y cuantitativo del cálculo numérico obtenido con el método de Verlet. Notemos primero que tanto las observaciones astronómicas como los resultados numéricos muestran inmediatamente que: a) el movimiento es periódico con periodo  $T_p$ , b) la trayectoria es cerrada sin lóbulos ( $x(t)$  y  $y(t)$  tienen el mismo periodo), y c) la trayectoria es simétrica con respecto a la inversión temporal (o con respecto al punto apsidal). La primera condición permite usar el teorema de Fourier para funciones periódicas y proponer las soluciones como sigue:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t), \tag{23}$$

$$y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t), \tag{24}$$

donde  $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T_p$ . En estas ecuaciones hemos usado la segunda condición, la frecuencia es la misma para  $x$  y  $y$  pues no hay lóbulos y la trayectoria es cerrada. La condición de simetría respecto del punto apsidal,  $x(t) = x(-t)$ ,  $y(t) = -y(-t)$  nos conduce a que

$$A_n = 0, \quad D_n = 0, \quad C_0 = 0. \tag{25}$$

Es decir, podemos escribir que

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t), \tag{26}$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t). \tag{27}$$

Haciendo la transformada de Fourier de las Ecs. (26) y (27) obtenemos que

$$F(x(t)) = A_0\delta(\omega) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta(\omega - n\omega_0), \tag{28}$$

$$F(y(t)) = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0). \tag{29}$$

Es decir, conocer los coeficientes  $A_0$ ,  $B_n$ , y  $C_n$  de estas dos ecuaciones es equivalente a conocer las soluciones para  $x(t)$  y  $y(t)$ . Para calcular estos coeficientes usamos el algoritmo de Cooley y Turkey [9] para la transformada rápida de Fourier (FFT), este algoritmo es muy rápido comparado con el cálculo numérico tradicional, requiere que  $N$ , el número de puntos de la serie de tiempo, sea una potencia entera de 2 ( $N = 2^n$ ). Su exactitud es comparable a la integración numérica pero su velocidad es mucho mayor, el tiempo de cómputo es proporcional a  $N \log_2 N$ , mientras que para la integración numérica es proporcional a  $N^2$ . La FFT, aun siendo antigua, ha venido cobrando gran popularidad gracias a la creciente capacidad y facilidad de cómputo, se ha usado cotidianamente para análisis de series de tiempo incluso en sistemas caóticos, hasta convertirse en una herramienta importante de análisis. Además de su rapidez, la FFT es de fácil programación y se encuentra como una herramienta de trabajo en varios paquetes computacionales. En este caso usamos la FFT de MATLAB, V5.1 y para el cálculo del espectro de frecuencias usamos la serie de tiempo  $x(t)$  y  $y(t)$  obtenidas por el algoritmo de Verlet descrito anteriormente, con  $N = 2048$  puntos ( $n = 11$ ).

En la Tabla I mostramos los valores de las amplitudes de las ecuaciones (28) y (29), para todos los planetas, cuyo valor absoluto es mayor a 1/1000 de la amplitud máxima de cada serie y en la Fig. 3 mostramos el espectro de frecuencias para dos casos, uno con gran excentricidad y el otro con pequeña, Venus y Plutón respectivamente. Estos dos planetas son los más representativos, pues el análisis espectral para el resto es muy similar y por lo tanto repetitivo.

El análisis de esta tabla nos muestra lo siguiente: El número de amplitudes mayores a 1/1000 de la máxima, es un número muy pequeño, para los casos de muy pequeña excentricidad como Venus, Tierra, Urano y Neptuno sólo son importantes los dos primeros armónicos y en el caso de excentricidades mayores como el caso de Plutón y Mercurio son importantes sólo 4 y 5 armónicos, respectivamente. La tabla muestra también que las amplitudes de los armónicos de  $x$  y  $y$  son muy parecidas, para el caso de pequeña excentricidad la diferencia está en la cuarta cifra significativa, mientras que para el caso de excentricidades mayores la diferencia puede aparecer en la segunda cifra significativa. En la Fig. 3 podemos observar que el espectro de frecuencias es muy puro, reflejando la exactitud del cálculo numérico tanto del método de Verlet como de la transformada rápida de Fourier. En el

TABLA I. Excentricidades y amplitudes de las componentes armónicas de  $x(t)$  y  $y(t)$  en unidades astronómicas para todos los planetas. Las casillas sin dato corresponden a amplitudes menores a 0.001 de la máxima amplitud de la serie de tiempo.

	$\epsilon$	$A_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
			$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
Mercurio	0.206	-0.1189	0.3802	0.0385	0.0058	0.0010	-
			0.3757	0.0380	0.0056	0.0009	-
Venus	0.007	-0.073	0.7212	0.0025	-	-	-
			0.7214	0.0026	-	-	-
Tierra	0.017	-0.0249	0.9972	0.0083	-	-	-
			0.9972	0.0083	-	-	-
Marte	0.093	-0.2124	1.5140	0.0705	0.0050	-	-
			1.5114	0.0707	0.0053	-	-
Jupiter	0.048	-0.3827	5.1915	0.1281	0.0053	-	-
			5.1935	0.1297	0.0065	-	-
Saturno	0.056	-0.7880	9.5092	0.2624	0.0107	-	-
			9.5042	0.2625	0.0113	-	-
Urano	0.047	-1.3469	19.1122	0.4472	-	-	-
			19.0996	0.4454	-	-	-
Neptuno	0.009	-0.3805	30.0000	0.1250	-	-	-
			29.9952	0.1213	-	-	-
Plutón	0.247	-14.758	38.4480	4.7184	0.8691	0.1901	0.0454
			37.8195	4.6652	0.8620	0.1884	0.0451

eje de las frecuencias usamos como unidad temporal el periodo de cada planeta de tal forma que los pocos armónicos que aparecen son múltiplos de la frecuencia natural del sistema, también se observa claramente que la primera amplitud es muy dominante. Por lo tanto, el movimiento de Venus que es representativo de los planetas de pequeña excentricidad se puede describir con muy buena aproximación como sigue:

$$x(t) = -0.073 + 0.7212 \cos(\omega_0 t) + 0.0025 \cos(2\omega_0 t), \tag{30}$$

$$y(t) = 0.7214 \sin(\omega_0 t) + 0.0026 \sin(2\omega_0 t). \tag{31}$$

El primer término en  $x$  es un corrimiento del origen de coordenadas (correspondiente a la distancia del centro de la elipse al origen, o foco de la elipse), el segundo y tercero corresponden a movimientos armónicos de frecuencia  $\omega_0$  y  $2\omega_0$ ; el movimiento en  $y$  contiene los dos mismos armónicos y amplitudes muy parecidas; es decir, el movimiento de Venus es la superposición de dos movimientos casi circulares. En términos de la concepción copernicana se trata de un círculo llamado deferente y un pequeño epiciclo. Los casos con excentricidad mayor requieren de tomar en cuenta, además del deferente y el primer epiciclo otros epiciclos superpuestos de muy pequeña amplitud. La trayectoria obtenida de esta forma correspondería a la Fig. 2 donde se intercambia

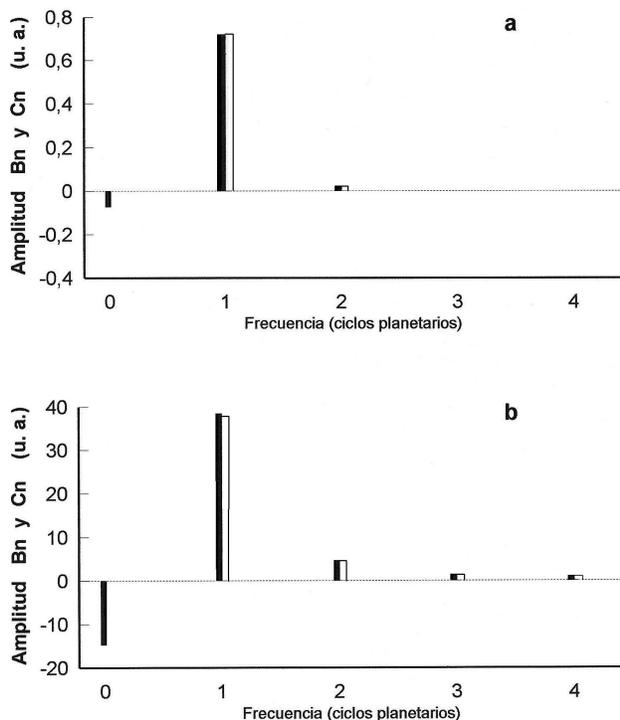


FIGURA 3. Espectro de frecuencias para las componentes reales de la posición  $x(t)$  (barra sólida) y componentes imaginarias de  $y(t)$  (barra clara), correspondientes al movimiento de a) Venus ( $\epsilon = 0,007$ ) y b) Plutón ( $\epsilon = 0,247$ ). El tiempo esta normalizado al periodo del planeta correspondiente.

el orden del deferente y los epiciclos. La diferencia entre la posición  $(x,y)$  obtenida de las Ecs. (30) y (31) con las posiciones calculadas con el metodo de Verlet es siempre menor que 0.005 UA. En otras palabras, desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, el método de modelación de Copérnico adquiere legitimidad tomando en cuenta la precisión de que se disponía hasta antes de las técnicas de medición de Tycho Brahe; y en efecto, la posición de los planetas en fun-

ción del tiempo se puede describir con buena aproximación -sobre todo para algunos de ellos- como una superposición de movimientos circulares uniformes, o, en todo caso, como una superposición de movimientos a lo largo de elipses de muy baja excentricidad. Una vez que es conocida la trayectoria, cualquier propiedad dinámica o cinemática puede ser calculada de forma directa.

### 3. Conclusiones

Hemos mostrado que la descripción temporal del movimiento planetario corresponde muy bien con la concepción de Copérnico, en términos de círculos deferentes y sus epiciclos, esta concepción es mucho más aproximada cuando el planeta tiene una excentricidad pequeña. Mostramos también que con muy buena aproximación es posible escribir la solución temporal en el sistema de ejes cartesianos como una pequeña serie de términos armónicos que permite calcular la posición de un planeta en cualquier instante del tiempo. Mostramos que técnicas numéricas simples, como el algoritmo de Verlet y la transformada rápida de Fourier, suelen ser muy poderosas y permiten hacer análisis muy completos de sistemas simples y complejos, que son de fácil acceso y programación. Por último, hacemos notar que estos sencillos métodos numéricos junto con la creciente capacidad de cómputo, son de gran ayuda en la enseñanza de la física pues permiten analizar los problemas solubles de otra forma y permiten resolver y analizar otros problemas interesantes que no se plantean usualmente en los libros de texto por no tener solución analítica.

### Agradecimientos

J. A. Peralta agradece a la Comisión de Operación y Fomento de las Actividades Académicas del I. P. N. el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

1. J.L.E. Dreyer, *A History of Astronomy from Tales to Kepler* (Dover Publications London, 1953).
2. F. Hoyle, *Nicolas Copernicus. An essay on his life and work* (Heinemann educational Books, London, 1973).
3. T.S. Kuhn, *La revolución copernicana*, (Ed. Ariel, Barcelona, 1978).
4. L. Landau and M. Lifshitz. *Mecánica* (2nd Ed. Reverte, Barcelona, 1991).
5. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Pu., Co. Massachusetts, 1980).
6. L. Verlet, *Phys. Rev.* **159** (1967) 98.
7. M.P. Allen, D.J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids* (Oxford Sc. Pu. Great Britain, 1987).
8. *Simulation of liquid and solids*, Ed G. Ciccotti and I.R. McDonald. (North Holland, Amsterdam, 1990)
9. E.O. Brigham, *The Fast Fourier Transform and its applications* (Prentice Hall New Jersey, 1988).