

¿Qué forma adquiere una membrana elástica circular al aplicarle una diferencia de presión?

A.I. Oliva^{a,b}, D.C. Valdés^b, E. Ley-Koo^c y H.G. Riveros^c

^a Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Unidad Mérida,
Departamento de Física Aplicada, Apartado Postal 73-Cordemex, 97310 Mérida, Yucatán, México.

^b Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Ingeniería, Ingeniería Física,
Av. Industrias No-contaminantes s/n, Apartado Postal 150-Cordemex, 97310 Mérida Yucatán, México.

^c Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Física,
Apartado Postal 20-364, 01000 México, D.F.

Recibido el 7 de febrero de 2003; aceptado el 12 de marzo de 2003

Se estudia teórica y experimentalmente una membrana circular elástica de densidad y espesor uniformes sujeta a una diferencia de presión constante. En este trabajo se analizan dos soluciones de la deformación que presenta una membrana elástica circular, así como su comparación con los valores reales de deformación medidos usando una membrana fabricada con guante de cirujano. La primera solución es un cálculo analógico utilizando la geometría de las pompas de jabón y la segunda es la solución analítica de la ecuación diferencial de la deformación elástica en la aproximación de módulo elástico constante. Ambas soluciones predicen una forma esférica que se confirma con los datos experimentales. También se hacen comparaciones con la solución de una placa deformada y con la forma paraboloidal deseada en la fabricación de espejos solares.

Descriptores: Membrana; deformación de membranas ; modelos de deformación; medidores.

An elastic circular membrane of uniform density and thickness and subjected to a constant pressure difference is studied theoretically and experimentally. Two solutions of the deformation of an elastic circular membrane and their comparisons with the numerical values of the measured deformations of a surgical rubber glove membrane. The first solution is an analogical calculations using the geometry of soap bubbles, and the second one is the analytical solution of the differential equation of the elastic deformation in the approximation of constant elastic modulus. Both solutions predict a spherical shape which is confirmed by the experimental data. Comparisons with the solution of a deformed plate and with the paraboloidal shape desirable for solar mirrors are also included.

Keywords: Membranes; membrane deformations; deformations models.

PACS: 01.50.K; 07.20; 46.30J

1. Introducción

Una membrana circular elástica puede ser utilizada en diferentes aplicaciones de nuestra vida diaria: como instrumento musical de percusión, como regulador de presión de gases, como medidor de flujo, como bomba de desplazamiento positivo, como elemento sensor de deformación, como sistema de control y como válvula para el manejo de diferentes fluidos. Una aplicación reciente es la de termoválvula, que utiliza la fuerza ejercida por la presión de un gas atrapado al calentarse con energía solar, para deformar la membrana elástica, empujar una válvula normalmente cerrada y permitir así el flujo de un fluido. La válvula se cierra cuando el gas se enfría y la membrana regresa a su posición inicial de no-deformación [1].

De manera similar, la medición de la deformación de una capa delgada sometida a una presión diferencial puede utilizarse para determinar las propiedades mecánicas (esfuerzos, módulo de Young) del material [2]. Un ejemplo claro de esta aplicación son las membranas de Si policristalino utilizadas por su alto esfuerzo a la fractura y su alta estabilidad dimensional [3].

Conocer la deformación de la membrana tanto en su geometría como en su valor, nos permite tener un mayor conoci-

miento y evaluar su capacidad para cumplir una acción determinada.

Una membrana puede diseñarse con diversas geometrías de su base-soporte: circular, cuadrada, elíptica o rectangular. Por sencillez en el cálculo, analizaremos únicamente la primera geometría bajo diferentes posibles valores de deformación.

En todos los casos se considera que las deformaciones de las membranas son elásticas y funcionan dentro de los límites elásticos, esto es, la membrana no sufre una deformación permanente.

2. Aspectos teóricos

Para efectos de análisis y comparación, suponemos que la membrana es de material homogéneo y consideramos diferentes geometrías de deformación. El caso que nos interesa es su uso en una válvula para controlar el flujo de agua caliente en un colector solar. El calor del sol calienta el agua del colector solar y el aire atrapado en un cilindro. Este cilindro tiene una tapa con una membrana elástica que se deforma al aumentar la presión interior, empujando la válvula que permite el flujo del agua caliente. Conocer su geometría real permite escoger la temperatura de disparo de la válvula. En particular, calcularemos la deformación de la misma usando:

- a) Una pompa de jabón, lo que equivale a un cálculo analógico suponiendo que la membrana tiene propiedades elásticas constantes independientes del tamaño de la deformación. Es conocido que las pompas de jabón tienen curvatura constante, y en este caso toman la forma de un casquete esférico.
- b) La ecuación diferencial de una membrana delgada elástica, en la que puede incluirse, de encontrarse experimentalmente necesario, el cambio en su elasticidad asociado a la deformación.
- c) Los resultados publicados para la placa elástica, por si el experimento muestra que no es adecuada la aproximación de membrana infinitamente delgada. En este caso habría que analizar la posible variación de la “constante” elástica con la deformación como explicación alternativa a los datos experimentales.
- d) Se ajusta una deformación paraboloidal, ya que se ha propuesto el uso de membranas elásticas deformadas por una presión uniforme como espejos concentradores solares. Un espejo paraboloidal produce la máxima concentración de la energía solar.

Dada la simetría, es conveniente utilizar coordenadas circulares cilíndricas (ρ, ϕ, z) de modo que el perímetro de la membrana corresponda al conjunto de puntos $(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0)$ y el eje z es el eje de la membrana. Llamamos δ , a la deformación máxima de la membrana localizada en el centro de la misma $z(\rho=0) = \delta$, y $z(\rho)$ es la función de deformación para cualquier valor ρ . Esta geometría tiene simetría de rotación alrededor del eje z .

Analícemos particularmente cada caso:

a) Solución de pompa de jabón

Suponiendo que la elasticidad de la membrana equivale a una tensión superficial constante como en una pompa de jabón, entonces la geometría de la deformación es un casquete esférico de radio R . Para las coordenadas utilizadas, la deformación $z(\rho)$ debe de cumplir la ecuación para la esfera $R^2 = (R - \delta + z)^2 + \rho^2$, con centro en $\rho_c = 0$ y $Z_c = \delta - R$:

$$z(\rho) = (R^2 - \rho^2)^{1/2} + \delta - R \tag{1}$$

donde

$$R = (\delta^2 + a^2)/2\delta, \tag{2}$$

representa el radio de la esfera.

Nótese que para deformaciones muy pequeñas de la membrana, el radio de curvatura tiende a un valor infinito, lo que dificulta medir con precisión estas deformaciones en forma sencilla.

b) Solución de la ecuación diferencial

En esta sección se analiza el problema de la forma que adquiere una membrana inicialmente circular al ser sometida a

una diferencia de presión constante entre sus dos caras. Se supone que la periferia de la membrana es una circunferencia de radio a que se mantiene fija durante el proceso de deformación, y que $P_i - P_e > 0$ es la diferencia de presiones entre las caras interna y externa. La base del análisis consiste en identificar las fuerzas que actúan sobre un elemento superficial de la membrana e imponer la condición de equilibrio.

Es conveniente utilizar coordenadas circulares cilíndricas (ρ, ϕ, z) de modo que el perímetro de la membrana corresponda al conjunto de puntos $(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, z = 0)$, y el eje z , al eje de la membrana. Suponiendo que la membrana se deforma manteniendo su simetría de rotación alrededor del eje, lo que nos interesa es la relación entre la coordenada de altura y la coordenada radial $z = z(\rho)$ para todos los puntos sujeta a la condición de frontera $z(\rho=a) = 0$.

En la Fig. 1.a se ilustra un elemento típico de superficie de la membrana, centrado en un punto $P(\rho, \phi, z)$ y con vértices

$$\begin{aligned} P_1(\rho - \Delta\rho/2, \phi - \Delta\phi/2, z + \Delta z/2), \\ P_2(\rho + \Delta\rho/2, \phi - \Delta\phi/2, z - \Delta z/2), \\ P_3(\rho + \Delta\rho/2, \phi + \Delta\phi/2, z - \Delta z/2) \end{aligned}$$

y

$$P_4(\rho - \Delta\rho/2, \phi + \Delta\phi/2, z + \Delta z/2)$$

como se muestra en la Fig. 1.b. Los desplazamientos entre vértices sucesivos son correspondientemente

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}_{12} &= \rho\Delta\rho + \mathbf{k}\Delta z \approx \mathbf{t}\Delta s, \\ \Delta\mathbf{r}_{23} &= \rho \Delta\phi\phi, \\ \Delta\mathbf{r}_{34} &= -\rho\Delta\rho - \mathbf{k}\Delta z \approx -\mathbf{t}\Delta s, \\ \Delta\mathbf{r}_{41} &= -\rho \Delta\phi\phi, \end{aligned} \tag{3}$$

usando los vectores unitarios ρ, ϕ y \mathbf{k} en la posición del punto P . Entonces el área del elemento de superficie es

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}_{12} \times \Delta\mathbf{r}_{23} &= -\rho\rho\Delta\phi\Delta z + \mathbf{k}\rho\Delta\phi\Delta\rho \\ &= \mathbf{n} \Delta a = \mathbf{n}\Delta s\rho\Delta\phi. \end{aligned} \tag{4}$$

También se necesitan los vectores tangentes a la superficie en cada uno de los puntos a la mitad de los lados del elemento de superficie, y sus diferencias que se ilustran en las Figs. 1.c y 1.d. La curva que conecta los puntos M_{12} y M_{34} es un arco de circunferencia de radio ρ que subtiende el ángulo $\Delta\phi$. Entonces la diferencia entre los vectores unitarios ϕ_{34} y ϕ_{12} tangentes en sus extremos es radial y hacia el eje Z y de magnitud $\Delta\phi$. Una construcción análoga para la curva que une a M_{41} con M_{23} involucra el elemento de arco Δs con radio de curvatura R y ángulo subtendido $\Delta\alpha$ de modo que

$$\Delta\alpha = \Delta s/R. \tag{5}$$

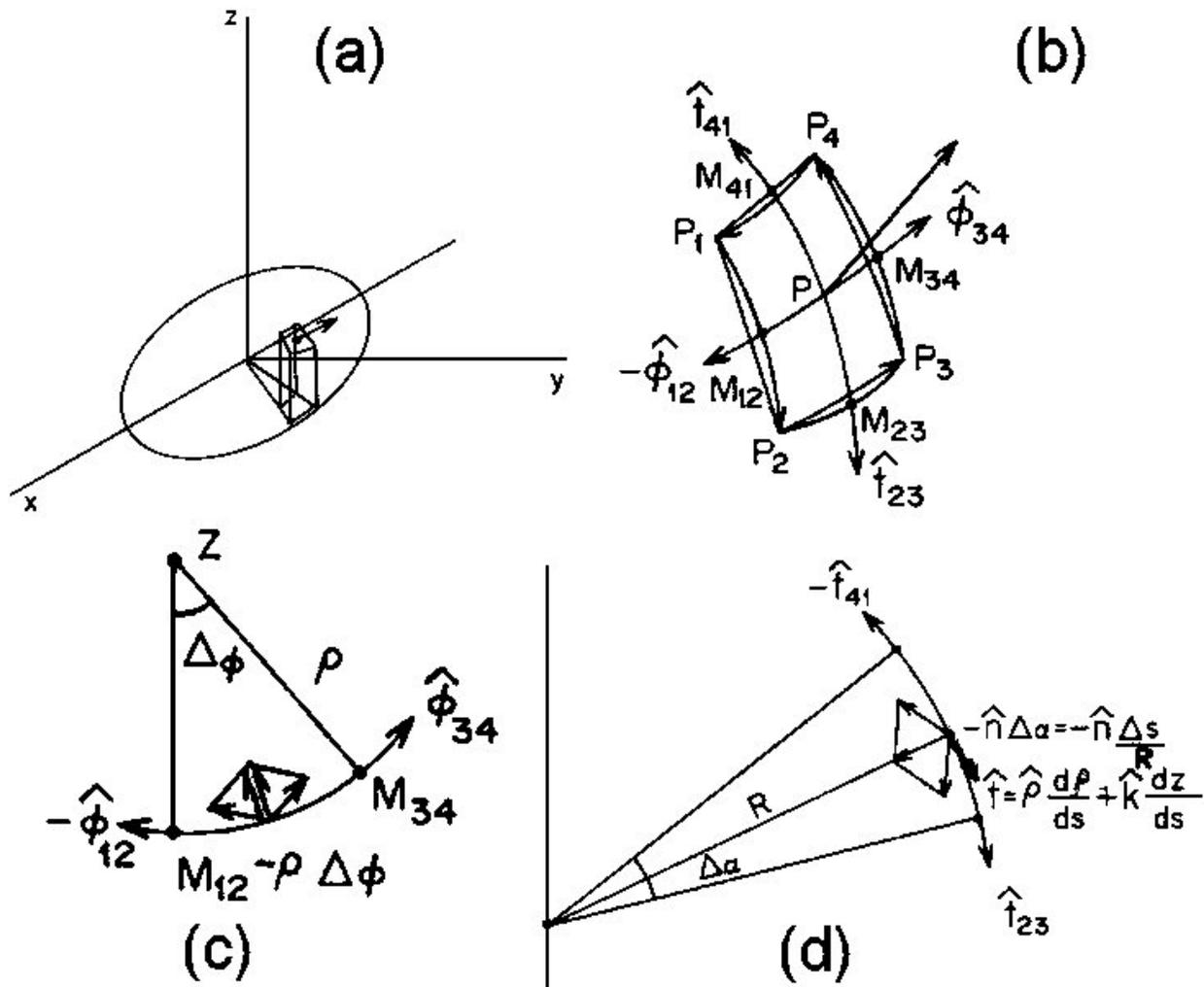


FIGURA 1. Membrana circular deformada: a) Posición de elemento de la membrana, b) Fuerzas sobre el elemento, c) Proyección en el plano x-y, y d) Proyección en el plano $\varphi = \text{constante}$.

Correspondientemente, la diferencia entre los vectores tangentes \mathbf{t}_{23} y \mathbf{t}_{41} es $-\mathbf{n}\Delta\alpha$ apuntando en dirección normal a la superficie pero hacia el interior y con magnitud $\Delta\alpha$. Adicionalmente de las Ecs. (3) y (4) se puede reconocer que el vector unitario radial se puede escribir en términos de los vectores normal y tangencial a la superficie en la forma

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{t}(d\rho/ds) - \mathbf{n}(dz/ds). \quad (6)$$

Ahora estamos en posición de identificar las fuerzas que actúan sobre el elemento de superficie que se originan en la presión neta sobre su superficie y en las tensiones sobre sus dos pares de lados casi paralelos:

$$\Delta\mathbf{F} = (P_i - P_e)\Delta\mathbf{a} + [(\tau\Delta s\boldsymbol{\phi})_{34} - (\tau\Delta s\boldsymbol{\phi})_{12}] + [(\tau\rho\Delta\boldsymbol{\phi})_{23} - (\tau\rho\Delta\boldsymbol{\phi})_{41}], \quad (7)$$

donde τ es la tensión entendida como fuerza por unidad de longitud. Con base en las Ecs. (3)-(6) para el elemento de área, sus aristas y las resultantes de las fuerzas de tensión, la fuerza neta se puede escribir en términos de sus componentes

en la dirección normal y tangencial:

$$\Delta\mathbf{F} = (P_i - P_e)\Delta s\rho\Delta\boldsymbol{\phi}\mathbf{n} + \tau\Delta s\Delta\boldsymbol{\phi}[(dz/ds)\mathbf{n} - (d\rho/ds)\mathbf{t}] + [d(\tau\rho)/ds]\Delta s\Delta\boldsymbol{\phi}\mathbf{t} - \tau\rho(\Delta s/R)\Delta\boldsymbol{\phi}\mathbf{n}. \quad (8)$$

La condición de equilibrio se da cuando la fuerza neta sobre el elemento de superficie se anula, lo que implica que sus componentes tangenciales y normales deben ser nulas:

$$\begin{aligned} -\tau(d\rho/ds) + d(\tau\rho)/ds &\equiv d\tau/ds = 0, \\ (P_i - P_e)\rho + \tau(dz/ds) - (\tau\rho)/R &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

La integral de la primera ecuación indica que la tensión τ es constante para todos los elementos de superficie de la membrana. En la segunda ecuación se observa que la pendiente dz/ds es negativa, de modo que ambos términos de tensión se combinan oponiéndose y equilibrando el término de presión, como se ilustra en las Figs. 1b, 1c y 1d. Usando la definición de radio de curvatura,

$$R = [1 + (dz/d\rho)^2]^{3/2} / (d^2z/d\rho^2), \quad (10)$$

entonces la segunda ecuación se identifica como una ecuación diferencial de cuya integración se puede obtener la relación buscada $z = z(\rho)$ que define la forma de la membrana. En el presente caso, es preferible mantener la ecuación en términos de R y re-escribirla en la forma

$$(P_i - P_e)/\tau + (dz/ds)/\rho - 1/R = 0. \quad (11)$$

El primer término es constante y el tercero sería constante si la forma de la membrana fuera esférica. Bajo esta última

suposición

$$(\rho - \rho_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2. \quad (12)$$

El segundo término se puede calcular como sigue:

$$(\rho - \rho_c) + (z - z_c)(dz/d\rho) = 0,$$

$$dz/d\rho = -(\rho - \rho_c)/(z - z_c)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dz}{ds} &= \frac{1}{\rho} \frac{dz}{d\rho} \frac{d\rho}{ds} = -\{(\rho - \rho_c)/\rho(z - z_c)\} \{d\rho/[(d\rho)^2 + (dz)^2]^{1/2}\} = -\{(\rho - \rho_c)/\rho(z - z_c)\} \{1/(1 + (dz/d\rho)^2)^{1/2}\} \\ &= -\{(\rho - \rho_c)/\rho(z - z_c)\} \{1/[1 + \{(\rho - \rho_c)/\rho(z - z_c)\}^2]^{1/2}\} = -[(\rho - \rho_c)/\rho](1/R). \end{aligned} \quad (13)$$

La simetría de rotación alrededor del eje Z requiere que el centro de la superficie esférica de la Ec (12) se encuentre sobre el eje mismo, es decir, que $\rho_c = 0$, con lo cual el segundo y tercer términos de la Ec.(11) son iguales. En conclusión, la curvatura de la membrana queda determinada por la razón de la diferencia de presión a la tensión:

$$1/R = (P_i - P_e)/2\tau. \quad (14)$$

c) Deformación tipo placa circular uniforme

Si suponemos que la membrana elástica se comporta como una placa circular sujeta a una presión constante y cuyos extremos se mantienen simplemente apoyados (esto es, con permiso de movimiento), la deformación correspondiente puede obtenerse mediante la expresión [5]

$$z(\rho) = \frac{pa^4}{64D} \left[\frac{\rho^4}{a^4} - 2 \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \right) \frac{r^2}{a^2} + \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right], \quad (15)$$

donde p es el valor de la presión ejercida sobre la membrana, ν la relación de Poisson, t el espesor de la misma y D la rigidez a la flexión definida por

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)},$$

siendo E el módulo de elasticidad de la membrana.

El valor máximo δ de la deformación se da cuando $r=0$, esto es,

$$\delta = \frac{pa^4}{64D} \left[\frac{5 + \nu}{1 + \nu} \right]. \quad (16)$$

Esta geometría de placa circular involucra las propiedades del material y las condiciones a las que está sujeta la membrana durante su deformación. Así, para un radio ρ fijo, la deformación de la membrana dependerá de la presión ejercida sobre ella y de las propiedades elásticas de la misma. Conociendo la deformación máxima δ y la relación de Poisson de la membrana, es posible determinar, de la Ec. (16),

la relación p/D para la membrana. Para bajos rangos, la presión p ejercida sobre la membrana puede ser medida mediante un manómetro en U de columna de agua. En nuestro caso particular, para una membrana formada con material de guante de cirujano (con $R=7.75$ cm), se han medido valores de $\nu=0.25$ y de $t=0.3$ mm (sin deformar), y un cambio de presión de 700 Pa, para una deformación máxima de $\delta=2$ cm. Esto nos arroja un valor de la relación $p/D= 8.4 \times 10^{-3}$ kg-cm [6].

d) Deformación paraboloidal

Asumiendo que la deformación sigue una geometría de paraboloides de revolución, de acuerdo a las coordenadas de referencia, la deformación $z(\rho)$ puede representarse como una parábola vertical con su vértice desplazado una distancia δ mediante la expresión

$$z(\rho) = \delta(1 - \rho^2/a^2) \quad (17)$$

3. Resultados

La deformación máxima que presenta la membrana bajo la acción de una fuerza puede simularse mediante las expresiones ya obtenidas para cada tipo de geometría analizada. En la Fig. 2 se muestra la deformación de la membrana como función del radio de la base-soporte, para un valor fijo de $a=7.75$ cm. Considerado una deformación máxima $\delta=2$ cm, se obtienen diferencias muy pequeñas en la geometrías entre la placa circular y la membrana circular y mayores respecto de las geometrías de paraboloides y casquete esférico (no mostrados). Incrementando la deformación máxima a 5 cm (Fig. 2), las diferencias entre las geometrías analizadas se incrementan entre sí y por consiguiente, los cambios de volumen alcanzados.

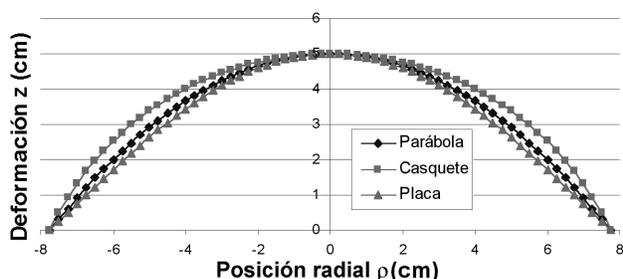


FIGURA 2. Gráficas de la deformación $z(\rho)$ considerando diferentes geometrías de una membrana elástica para una deformación máxima $\delta = 5$ cm.

El comportamiento del cambio de forma en la geometría de casquete esférico se incrementa, respecto de las otras geometrías propuestas, cuando la deformación es mayor de $\delta = 2$ cm. Para valores menores a este valor, las diferencias con la geometría paraboloides son muy pequeñas y pueden considerarse similares. Por ello, la fabricación de concentradores “parabólicos” usando el método de inflado de un material, puede estar muy lejos de dar buenos resultados como concentrador, si las deformaciones son mayores a cierto valor. Asimismo, el cambio de volumen para la geometría de membrana esférica es mayor, en comparación con las otras geometrías analizadas.

Con el objeto de medir la geometría real de la membrana elástica, se procedió a determinarla por medio de la sombra proyectada de la deformación de la membrana cuando los rayos solares inciden paralelamente a la base-soporte. Se procedió a obtener diferentes deformaciones producidas incrementando controladamente la presión del recipiente y dibujando la sombra proyectada sobre un papel milimétrico ubicado perpendicularmente a los rayos del Sol. Los resultados se muestran en la Fig. 3 para diferentes deformaciones producidas.

Comparando los resultados experimentales con los modelos de casquete esférico y paraboloides para las deformaciones de 2 y 5 cm (Fig. 4), se puede apreciar entre sí una gran similitud cuando las deformaciones son menores a 2 cm. Para deformaciones mayores, se encuentra una excelente aproximación de los datos medidos, con los calculados usando la

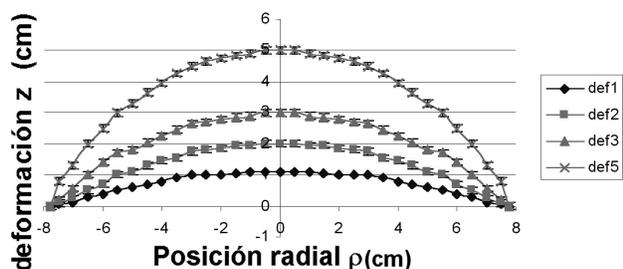


FIGURA 3. Deformaciones medidas en una membrana elástica fabricada con un guante de cirujano. $a=7.75$ cm.

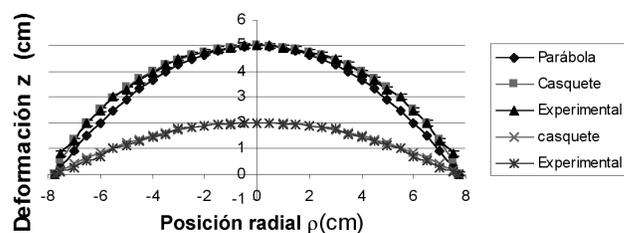


FIGURA 4. Comparación entre las deformaciones experimentales y los valores determinados a partir de las geometrías propuestas. Los valores de δ son 2 y 5 cm. $a=7.75$ cm.

geometría de casquete esférico, tal como se muestra en la Fig. 4 para una deformación de la membrana de 5 cm. La geometría conseguida con la deformación de una membrana elástica de base circular, es la correspondiente a un casquete esférico, aunque puede ser aproximada a una geometría de paraboloides para valores pequeños de deformación de la membrana. Para el caso analizado donde $a=7.75$ cm, esta aproximación es válida para valores de δ menores a 2 cm (*i.e.* relación $a/\delta=0.25$).

Se han desarrollado dispositivos ópticos de reflexión y transmisión, que se construyen usando como molde una superficie inflada a través de un recipiente sometido a presión constante y se suponen paraboloides. Nuestros resultados muestran claramente que hay un rango de la relación a/δ donde podemos hacer válida esta condición; de otra manera, se estaría cometiendo un error que puede incrementarse con la deformación producida.

4. Conclusiones

Se analizaron tres geometrías diferentes que podrían presentar una membrana elástica circular cuando ésta se deforma bajo la acción de una presión constante con simetría axial. Se determinaron las relaciones de las deformaciones producidas y los cambios de volúmenes involucrados. Del análisis y la comparación, se concluye que la geometría de la membrana correspondiente al casquete esférico, muestra un gran acuerdo con los datos experimentales medidos para diferentes valores de deformación. Sin embargo, para deformaciones pequeñas ($a/\delta < 0.25$), la geometría tipo paraboloides puede ser considerada con gran aproximación.

Los resultados de este trabajo pueden ser de gran interés en la fabricación de dispositivos ópticos que involucren reflexión, transmisión y concentración de energía, en virtud de la geometría que puede seleccionarse adecuadamente para los fines que se persiguen.

Agradecimientos

A.I. Oliva agradece a la Facultad de Ingeniería de la UADY, la oportunidad de realizar una estancia académica en la licenciatura en Ingeniería Física en el periodo Septiembre 2000-Agosto 2001.

-
1. D.C. Valdés, A.I. Oliva, J.E. Corona. "Caracterización de una válvula solar para destiladores de flujo continuo", *Memorias de la XXV Reunión Nacional de Energía Solar*, San Luis Potosí, SLP. (2001) p.347.
 2. M. Ohring, *Materials Science of Thin Films*, Segunda Edición (Academic Press, 2002).
 3. R.P. Keach y B. Lawrenson, *Microelectron. J.* **25** (1994) 393.
 4. E. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. 2, Tercera Edición (Limusa, 1981).
 5. A.C. Ugural, *Stresses in plates and shells* (McGraw Hill Co., 1981).
 6. D.C. Valdés Mújica, *Construcción y caracterización de una válvula solar para sistemas de destilación de flujo constante*, Tesis de Licenciatura en Ingeniería Física, Universidad Autónoma de Yucatán (2002). (En revisión).