

Obtención de estados tipo gato de Schrödinger mediante transformaciones canónicas en el espacio fase cuántico*

A. Zúñiga-Segundo

*Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Edificio 9, Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”,
07738 México, D.F., México*

Recibido el 5 de noviembre de 2002; aceptado el 9 de abril de 2003

Por medio de transformaciones canónicas definidas en la representación de estado-coherente de la mecánica cuántica en el espacio fase, obtenemos estados tipo gato de Schrödinger. Los estados comprimidos desplazados de número con parámetro de compresión real están contenidos en estos estados.

Descriptores: Espacio fase cuántico; estados comprimidos desplazados de número; estados tipo gato de Schrödinger; vector flujo de probabilidad.

Employing canonical transformations defined in the coherent-state representation of quantum mechanics, we introduce Schrödinger-Cat-Like-States. The squeezed displaced number states with real squeezing parameter are contained in these states.

Keywords: Quantum phase space; squeezed displaced number states; Schrödinger cat like states; probability flux vector.

PACS: 03.65.-w; 42.50.Dv

1. Introducción

La mecánica cuántica permite la preparación de sistemas físicos en una superposición de estados, o estados que estén “untados” entre dos o más distintos valores. Este curioso e importante principio de la mecánica cuántica [1] ha sido extremadamente exitoso en aplicaciones que van desde interacciones de átomos con fotones hasta las de nivel subnuclear. Los estados llamados “gato de Schrödinger” (GS) son una superposición de dos estados coherentes, es decir, de estados con mínima incertidumbre y varianzas de p y q iguales a las del estado base del oscilador armónico ($\hbar/2$) [2]. Los estados GS presentan propiedades no-clásicas muy marcadas, en particular presentan compresión [3]. La compresión está caracterizada por una reducción en las varianzas de p ó q por debajo del nivel asociado con el estado vacío o coherente. Como consecuencia de sus propiedades no-clásicas, los estados GS tienen una gran variedad de aplicaciones en óptica cuántica, donde su obtención [4] y comportamiento resultan ser muy importantes [5].

Las distribuciones de cuasi-probabilidad no sólo son una manera conveniente para representar un estado cuántico en términos de c -números, también proporcionan información sobre su carácter no-clásico. Para cada estado cuántico en particular, es posible definir un número infinito de distribuciones de cuasi-probabilidad, debido a las diferentes posibilidades de ordenamiento de los operadores [6]. Una de estas posibilidades es la función de Wigner, que siempre es bien definida para cualquier estado cuántico y ampliamente usada para el cálculo de densidades y valores esperados en el espacio fase [7-9]. Las reconstrucciones experimentales de la función de Wigner revelan sus valores negativos [10], que son el punto de referencia de los efectos cuánticos. A pesar de estos logros, su desventaja recae en la dificultad de resolver

problemas realistas directamente en términos de la función de Wigner, debido a la complejidad de su ecuación de evolución. Para superar esta dificultad, usamos la representación de estado-coherente de la mecánica cuántica en el espacio fase (REC) [11-14]; llamada de esta manera porque coincide con la totalidad de las representaciones de estado coherente para el grupo de Heisenberg-Weyl [14]. Encontramos esta representación particularmente útil, ya que por una parte nos permite el análisis de la dinámica cuántica en términos de una ecuación de Schrödinger y una función de onda, ambas definidas en el espacio fase; como consecuencia los valores esperados se calcularán de la misma forma que en la representación de coordenadas de la mecánica cuántica, simplificando considerablemente los cálculos en comparación con otros en la literatura [9]. Por otro lado el módulo al cuadrado de la función de onda es análoga a la densidad de Husimi [15] que es una herramienta que nos permite comparar la dinámica clásica y la cuántica.

De manera análoga que en la representación de coordenadas [16], los estados comprimidos desplazados de número (ECDN) en el espacio fase [17], se obtienen de la aplicación directa de los operadores de desplazamiento y compresión, sobre los estados de número (EN) del oscilador armónico definidos en el espacio fase [13]. También en el espacio fase, es posible obtener estados comprimidos por medio de transformaciones canónicas [18].

El objetivo principal de este trabajo es obtener estados tipo gato de Schrödinger sin utilizar el principio de superposición. Estos nuevos estados son obtenidos aplicando sobre los EN del oscilador armónico, la transformación canónica anteriormente mencionada y el operador de desplazamiento; mostramos también que contienen a los ECDN cuando su parámetro de compresión es real.

En la Sec. 2, mostramos la obtención de los estados tipo gato de Schrödinger y los comparamos con los ECDN. En la Sec. 3, describimos la superposición de estados coherentes para explicar las diferencias entre los GS de Wigner y los estados tipo GS en la REC, también mostramos que éstos últimos tienen incertidumbres menores que las obtenidas con ECDN. En la Sec. 4 por medio del vector flujo de probabilidad en el espacio fase, mostramos que las densidades de los estados tipo GS evolucionan igual que las de los ECDN en un sistema de oscilador armónico. Por último presentamos nuestras conclusiones.

2. Estados tipo “gato de Schrödinger” y ECDN

Los estados desplazados de número (EDN) [19,17] se encuentran aplicando el operador de desplazamiento de Glauber [2] sobre los EN [13], es decir, $|n, \beta\rangle = \hat{D}(\beta) |n\rangle$, siguiendo la notación de Nieto [16], donde

$$\hat{D}(\beta) = \exp(\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}) = \exp\left(-iq_o\hat{P} + ip_o\hat{Q}\right). \quad (1)$$

Aquí β es el parámetro de coherencia $\beta = (q_o + ip_o)/\sqrt{2}$, y los operadores \hat{P} y \hat{Q} son los de momento y coordenada respectivamente; cuyas definiciones en la REC son $\hat{P} = (p/2 - i\hbar\partial/\partial q)$, $\hat{Q} = (q/2 + i\hbar\partial/\partial p)$, además satisfacen la relación $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$. En lo sucesivo utilizaremos $\hbar = \omega = m = 1$.

Combinando la relación anterior y la formula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [20], encontramos que los EDN en el espacio fase son

$$\langle \Gamma, q_o, p_o | n \rangle = \mathcal{N} H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma(q-q_o)^2 - \frac{1}{2}\phi(p-p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o)\right], \quad (2)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización, $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$, $\phi = \frac{1}{2} - \alpha$, y α es un parámetro complejo con $|\alpha| < \frac{1}{2}$. Como sucede con la funciones de onda en la REC, éstas son una interpolación entre la representación de coordenadas ($\alpha = \frac{1}{2}$) y momentos ($\alpha = -\frac{1}{2}$), cuando $\alpha = 0$, tendrán igual peso en ambas coordenadas q y p . $H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$ son un conjunto de polinomios ortogonales definidos en el espacio fase con propiedades similares a los polinomios de Hermite, además satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$H_{n+1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = 2u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4n\alpha H_{n-1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha), \quad (3)$$

donde,

$$u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \gamma(q - q_o) - i\phi(p - p_o).$$

Algunos de estos polinomios son

$$\begin{aligned} H_0(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 1, \\ H_1(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 2u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha), \\ H_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 4u^2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4\alpha, \\ H_3(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) &= 8u^3(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 24u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

El estado comprimido con parámetro de compresión complejo $\xi = \eta \exp(i\theta)$, puede ser obtenido del estado vacío (EN con $n = 0$), reemplazando la coordenada q por qS y el momento p por p/S [8,18], donde $S^2 = (\frac{1}{2} - \alpha)/(\frac{1}{2} + \alpha)$, y $\alpha = -\frac{1}{2} \tanh(2\eta) \exp(-i\theta)$, con la restricción $|\alpha| < \frac{1}{2}$. Aplicando la transformación anterior a los estados de número, seguido del operador de desplazamiento (1), obtenemos los nuevos estados (a los cuales llamaremos estados-S):

$$\langle \Gamma, q_o, p_o, S | n \rangle = \mathcal{N} H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) \exp\left[-\frac{1}{2}\phi(q-q_o)^2 - \frac{1}{2}\gamma(p-p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o)\right], \quad (5)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización, $H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$ son los polinomios ortogonales (4) los cuales satisfacen la relación de recurrencia (3), con

$$u(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} [(q - q_o) - i(p - p_o)]. \quad (6)$$

Los ECDN $|n, \beta, \xi\rangle$ son obtenidos por la aplicación del operador general de compresión $\hat{S}(\xi)$, sobre los estados de número $|n\rangle$ seguido del operador de desplazamiento $\hat{D}(\beta)$ tal que $|n, \beta, \xi\rangle = \hat{D}(\beta)\hat{S}(\xi)|n\rangle$ (vea por ejemplo a Nieto [16]), donde $\hat{S}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^{\dagger 2} - \xi^*\hat{a}^2)$. Aquí $\xi = \eta \exp(i\theta)$ es el parámetro complejo de compresión. Los ECDN más generales en el espacio fase cuántico son [17]

$$\langle \Gamma, q_o, p_o, \xi | n \rangle = \mathcal{N} \tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) \exp\left[-\frac{1}{2}\phi(q-q_o)^2 - \frac{1}{2}\gamma(p-p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o)\right], \quad (7)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización y α es el parámetro complejo definido previamente. De la misma manera $\tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$, son otro conjunto de polinomios ortogonales definidos en el espacio fase, que satisfacen la relación de recurrencia

$$\tilde{H}_{n+1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = 2\tilde{u}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)\tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4n\alpha^* \tilde{H}_{n-1}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha), \quad (8)$$

donde

$$\tilde{u}(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \left(\frac{1}{4} - |\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}} [(q - q_o) - i(p - p_o)]. \quad (9)$$

Cuando α es un número real, debemos notar que las Ecs. (6) y (9) son las mismas; también las Ecs. (3) y (8). Entonces, cuando el parámetro de compresión sea real los ECDN están contenidos en los estados-S.

3. Incertidumbres

Teniendo los estados desplazados definidos por las Ecs. (2) y (7), lo más natural es pensar en una superposición par de estados coherentes, la cual se escribe como

$$\langle \Gamma | \psi \rangle_s = \mathcal{N}_s [\langle \Gamma, q_o, p_o, \alpha | \psi \rangle + \langle \Gamma, -q_o, -p_o, \alpha | \psi \rangle], \quad (10)$$

donde $\langle \Gamma, q_o, p_o, \alpha | \psi \rangle$ es el estado coherente normalizado ($n = 0$ en la Ec. (2)) y \mathcal{N}_s es una constante de normalización. En la Fig. 1, representamos el módulo al cuadrado de la Ec. (10) por medio de una gráfica de tonos de gris y su correspondiente imagen tridimensional en el espacio fase; los parámetros utilizados fueron: $(q_o, p_o) = (1.5, 0.0)$ y $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$. Los tonos cambian gradualmente desde, el negro correspondiente al valor máximo de la densidad, hasta llegar al blanco cuando la densidad es cero. Observe que en la superposición definida en la Ec. (10), es imposible factorizar los términos exponenciales generados por la Ec. (2). La diferencia importante entre la superposición definida en la Ec. (10) y la superposición utilizando funciones de Wigner es la forma y orientación de las densidades que la componen, ya que en el método de Wigner se utilizan estados coherentes cuyas densidades en el espacio fase están representados por círculos y no elipses como en nuestro caso. En la Fig. 2 mostramos el esquema utilizado por W. Schleich *et al.* [21], para la superposición de dos estados coherentes de Wigner.

Al observar las Figs. 1 y 2, nos obliga a preguntarnos si la “forma” de la densidad induce un cambio radical en las varianzas de \hat{P} y \hat{Q} . La respuesta a esta pregunta además de mostrar el “carácter estadístico” (sub-, super- o Poissoniano) de nuestra superposición definida en la Ec. (10), la proporciona el cálculo de la varianza normalizada $\sigma^2 \equiv \langle \hat{N}^2 \rangle / \langle \hat{N} \rangle - \langle \hat{N} \rangle$, donde \hat{N} es el operador de número. En el caso del oscilador armónico $\hat{N} = \hat{H} - \frac{1}{2} = \frac{(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2 - 1)}{2}$. El cálculo de los valores es-

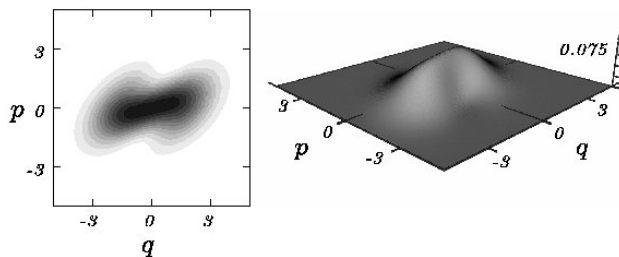


FIGURA 1. Módulo al cuadrado de una superposición par de estados coherentes en el espacio fase con $(q_o, p_o) = (1.5, 0.0)$ y $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$. Obsérvese que la densidad de los estados coherentes se representan por elipses.

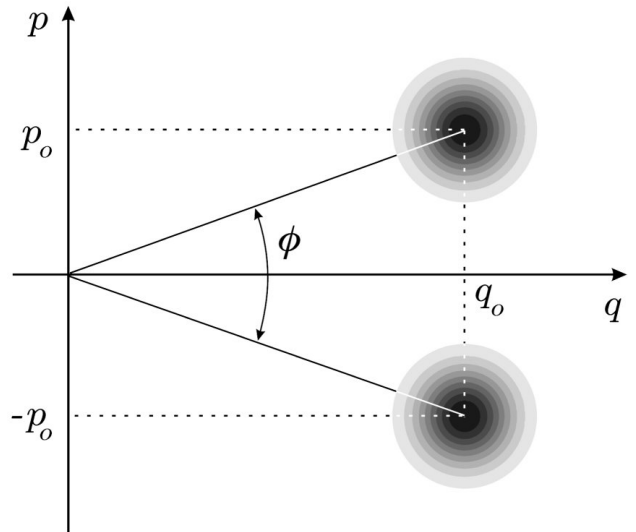


FIGURA 2. Esquema utilizado en la Ref. 21, para la superposición de dos estados coherentes de Wigner. Obsérvese que los estados coherentes se representan por círculos en el espacio fase.

perados en la REC, se realiza de la forma usual, por ejemplo para el operador \hat{N} escribimos

$$\langle \hat{N} \rangle = \int d\Gamma \psi^*(\Gamma) \hat{N} \psi(\Gamma), \quad (11)$$

donde la integración se lleva a cabo sobre todo el espacio fase. Observe que $d\Gamma = dqdp$, siendo $\Gamma = (q, p)$ un punto en el espacio fase y $\psi(\Gamma)$ es la función de onda bajo consideración. En la Fig. 3, mostramos la varianza normalizada en función de ángulo ϕ (ver Fig. 2), correspondiente a la superposición par mostrada en la Fig. 1. Los parámetros utilizados fueron: $\frac{1}{2}(q_o^2 + p_o^2) = 36$ y $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$. La Fig. 3, es idéntica a la mostrada en la Fig. 3 de la Ref. 21, cuya expresión analítica es la Ec. (2.9) de la misma referencia. Por lo tanto las varianzas \hat{P} y \hat{Q} no dependen de la forma de las densidades de los estados coherentes en el espacio fase. Lo anterior es debido a la sobre-completes de los estados coherentes [22], que en la REC se caracterizan por la forma de su densidad, es decir, no son necesariamente círculos. Podemos generalizar la idea anterior a los EDN definidos por la Ec. (2). Con ayuda de la Ec. (11) mostramos que:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{Q})^2 \rangle &= \langle (\Delta \hat{P})^2 \rangle = (1/2 + n), \quad y \\ \langle \hat{N} \rangle &= n + 1/2(p_o^2 + q_o^2), \\ \langle (\Delta \hat{N})^2 \rangle &= 1/2(p_o^2 + q_o^2)(2n + 1), \end{aligned}$$

dichos valores esperados son idénticos a los calculados previamente por De Oliveria *et al.* [19]. Observamos que estos valores no dependen del parámetro α , como consecuencia, tampoco dependerán de la forma de la densidad en el espacio fase.

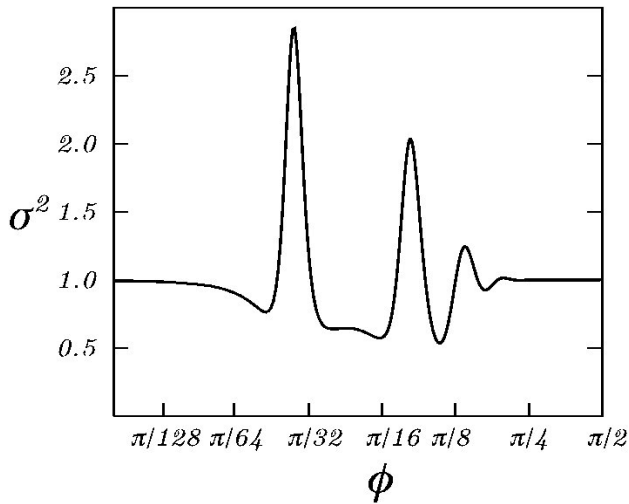


FIGURA 3. Varianza normalizada en función de ángulo ϕ (ver Fig. 2), correspondiente a la superposición par mostrada en la Fig. 1, con $\frac{1}{2}(q_o^2 + p_o^2) = 36$ y $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$.

En una superposición de estados coherentes, el parámetro que controla la interferencia es la separación entre los dos estados, es decir, depende de los parámetros q_o y p_o (ver Fig. 2). En el caso del estado-S el parámetro que controla tal interferencia es el argumento θ del parámetro α . Cabe mencionar que la densidad del estado-S cuando $\theta = 0, \pi$ (cuando α es real), tiene la misma forma que la densidad del ECDN, pero en el primer caso estará comprimida a lo largo del eje q y en el segundo caso a lo largo del eje p . En la Fig. 4(a)-(b), mostramos el módulo al cuadrado de las funciones de onda correspondientes al ECDN y al estado-S, definidos por las Ecs. (7) y (5), respectivamente. En ambos casos, $q_o = p_o = 0.0$,

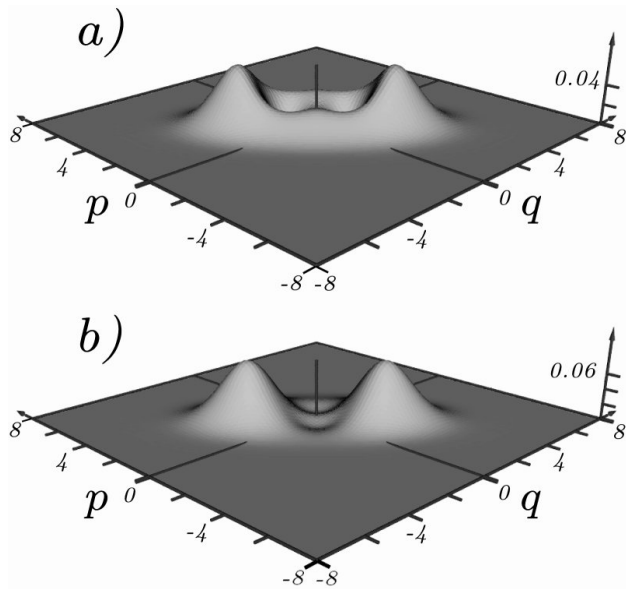


FIGURA 4. Módulo al cuadrado de las funciones de onda correspondiente a: (a) Estado comprimido desplazado de número. (b) Estado tipo “gato de Schrödinger”. En ambos casos $q_o = p_o = 0.0$, $n = 2$ y $\alpha = 0.25 \exp(-i\pi/2)$.

$n=2$ y $\alpha=0.25 \exp(-i\pi/2)$. Observamos que el estado-S se separa en dos partes semejando un gato de Schrödinger.

En la Fig. 5, mostramos las varianzas de \hat{P} (línea sólida gruesa) y \hat{Q} (línea sólida delgada) en función del tiempo, correspondientes al estado-S definido en la Ec. (5). Por simplicidad hemos utilizado un potencial de oscilador armónico en el método numérico [11]. La línea punteada corresponde a las varianzas calculadas con ECDN [17,23]. La línea horizontal corresponde a las varianzas del EDN. En todos los casos $q_o = p_o = 3.0$, $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$ y $n = 4$. Observe que la varianza correspondientes al estado-S tienen un mínimo, denotado por δ .

En la Fig. 6, mostramos para $n = 0, \dots, 5$ el mínimo valor δ , de las incertidumbres de \hat{Q} ó \hat{P} en función del argumento θ del parámetro α , correspondientes al estado-S. Observamos que se tiene el mínimo de compresión cuando

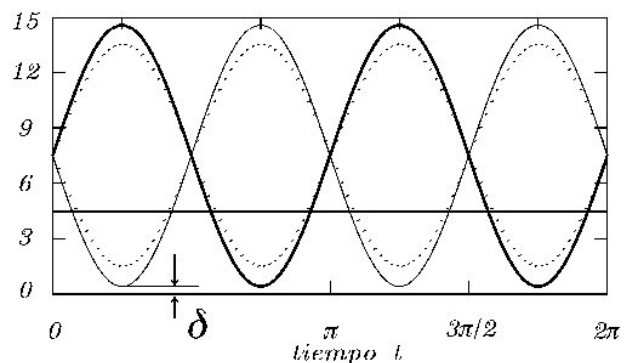


FIGURA 5. Varianzas de \hat{P} (línea sólida gruesa) y \hat{Q} (línea sólida delgada) en función del tiempo, correspondientes al estado tipo “gato de Schrödinger”. La línea punteada corresponde a las varianzas calculadas con estados comprimidos desplazados de número y la línea horizontal corresponde a las varianzas del estado desplazado de número. En todos los casos $q_o = p_o = 3.0$, $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$ y $n = 4$.

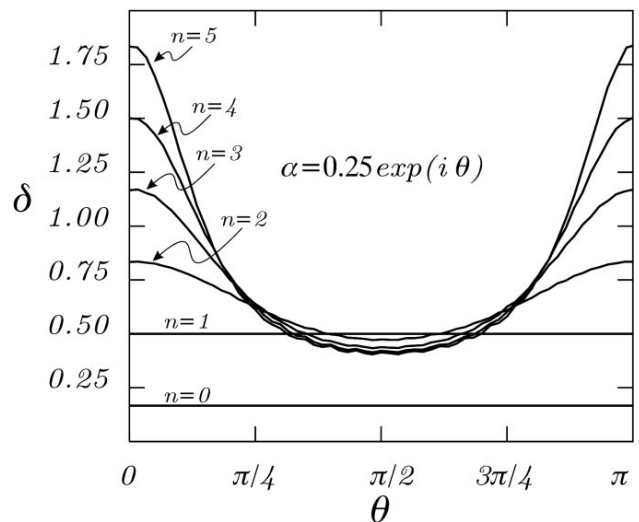


FIGURA 6. Valor mínimo de las incertidumbres correspondientes al estado tipo “gato de Schrödinger” (δ en la Fig. 5), en función del argumento θ , para $n = 0, \dots, 5$.

$\theta = \pi/2$. Ya que en los valores de $\theta = 0, \pi$ obtenemos los ECDN, las incertidumbres en los puntos inicial y final son las mismas y se mantienen constantes para todos los valores de θ [17,23], como se observa en las líneas rectas para $n = 0, 1$.

4. Vector de flujo de probabilidad

Siempre será posible escribir el polinomio $H_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$ como una suma de un polinomio $\tilde{H}_n(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$ más otras m funciones definidas en el espacio fase; $F(q, p, k)$. Por ejemplo para $n = 2$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ escribimos

$$H_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = \tilde{H}_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) - 4(2i\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2^2)[(q - q_o) - i(p - p_o)]^2 - 4(2i\alpha_2),$$

$$= \tilde{H}_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) + F(q, p, 1) + F(q, p, 2).$$

Observe se que cuando $\alpha_2 = 0$, las funciones

$$F(q, p, 1) = F(q, p, 2) = 0$$

y en este caso $\tilde{H}_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha) = H_2(\Gamma, q_o, p_o; \alpha)$. Observamos, que a diferencia de la Ec. (10), los términos exponenciales en los estados-S y ECDN son iguales, por lo tanto es posible escribir

$$\langle \Gamma, q_o, p_o, S | n \rangle = \mathcal{N} \{ \langle \Gamma, q_o, p_o, \xi | n \rangle + \sum_{k=1}^m F(q, p, k) \exp \left[-\frac{1}{2}\phi(q - q_o)^2 - \frac{1}{2}\gamma(p - p_o)^2 + i(\gamma p_o q - \phi p q_o - \alpha p q + \phi p_o q_o) \right] \}, \quad (12)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización. Esta expresión tiene la misma forma que la utilizada en ingeniería de estados [24], claramente ya no es una superposición discreta de estados coherentes, ya que el primer término es un ECDN; además tiene un sólo término exponencial “modulado” por un polinomio en el espacio fase, por lo tanto creemos que la formación del estado-S es debido a la “modulación”, o quizá el nombre más correcto sea el de “interferencia interna”.

Con toda razón se podrá pensar que esto es una casualidad, ya que podemos construir una función en el espacio fase, que “module” o divida en dos a la función exponencial mencionada anteriormente, lo cual semejaría un “gato” de Schrödinger.

Para mostrar que no cualquier función realiza el “trabajo” de las funciones $F(q, p, k)$, necesarias en la Ec. (12), por simplicidad calcularemos el vector de flujo de probabilidad para el estado-S en un potencial de oscilador armónico [17], el cual es mostrado en la Fig. 7(b). Los parámetros correspondientes a el estado-S fueron $q_o=p_o=0$, $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$ y $n = 4$. El vector flujo de probabilidad semeja un flujo no estacionario, es decir, tipo “rehilete” que forzará a la densidad a rotar alrededor del origen manteniendo su forma inicial. Entonces surge otra pregunta: ¿Cuántos estados evolucionan conservando la forma de su densidad en un potencial armóni-

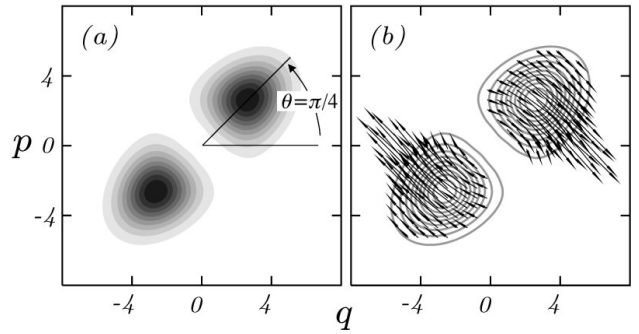


FIGURA 7. Densidad (a) y vector flujo de probabilidad (b); para el estado tipo “gato de Schrödinger”, con $q_o = p_o = 0.0$, $\alpha = 0.25 \exp(i\pi/2)$ y $n = 4$.

co? Los estados comprimidos desplazados de número, los desplazados de número y los estados-S, satisfacen esta propiedad, por lo tanto, considero que esta familia de estados ha sido aumentada en este trabajo. Observe que el estado-S está orientado en la dirección de la mitad del argumento de α en el espacio fase, a un ángulo de $\pi/4$ [ver Fig. 7(a)], de manera análoga a los estados comprimidos.

5. Conclusiones

Nos surge la pregunta sobre la existencia de una superposición más general que la utilizada para encontrar gatos de Schrödinger. Considero que este trabajo muestra tal posibilidad, ya que ninguna de las componentes del estado-S es un estado coherente ni comprimido; en el primer caso la superposición de dos estados coherentes no dependería del parámetro α , es decir de la forma de estado (por sobre-completes de los estados coherentes) situación que es falsa y lo probamos en la Fig. 6, en el segundo caso tendríamos efectos más pronunciados de compresión [25] y la Fig. 2, no sería simétrica.

Mostramos una vez más que la REC es una buena alternativa para resolver problemas cuánticos directamente en el espacio fase, en esta ocasión por medio de una simple transformación canónica hemos mostrado la obtención de ECDN para parámetros de compresión reales. Además obtenemos estados del tipo gato de Schrödinger sin realizar la superposición definida en la Ec. (10). Considero que lo anterior no sería posible y tan sencillo, por ejemplo en la representación de coordenadas o en la representación de Wigner.

Para obtener el análogo de estas funciones en el espacio de coordenadas, basta con calcular la transformada de Fourier del estado-S, tal como lo indica la Ec. (4) de la Ref. 18; teniendo esta función de onda, en principio, es posible obtener la función de Wigner, lo cual me gustaría hacer un futuro cercano.

Agradecimientos

Deseo agradecer al Dr. Héctor Moya Cessa sus enseñanzas y hospitalidad; a los Drs. Rocio Jáuregui, David Fernández Cabrera y Miguel Orzag sus valiosos comentarios y observaciones; al Departamento de Cómputo del CICESE su apoyo técnico. Trabajo financiado por CGPI-IPN-20030543.

- * Dedicado al Dr. Eduardo Piña Garza: mi maestro y formador. Trabajo presentado en la sección simultánea ISE Mecánica Cuántica I. XLV Congreso Nacional de Física SMF. León, Gto. Mex. octubre 2002.
1. P.A.M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics* (Clarendon, Oxford, ed. 4, 1984) p. 12.
 2. R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
 3. R. Loudon and P.L. Knight, *J. Mod. Opt.* **34** (1987) 709; R.W. Henry and S.C. Glotzer, *Am. J. Phys.* **56** (1988) 318.
 4. S. Hacyan, *Found. Phys. Lett.* **9** (1996) 225; E. Colavita and S. Hacyan, *Rev. Mex. Fis.* **49** (2003) 45.
 5. F.A.M. De Oliveira, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 5104.
 6. E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749; M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully, and E.P. Wigner, *Phys. Rep.* **106** (1984) 121; Y.S. Kim and M.E. Noz, *Phase Space Picture of Quantum Mechanics. Group Theoretical Approach*, Lecture Notes in Physics Series—Vol.40. (Singapore, World Scientific, 1991); H.-W. Lee, *Phys. Rep.* **256** (1995) 147.
 7. D. Han D, Y.S. Kim, and M.E. Noz, *Phys. Rev. A* **37** (1988) 807.
 8. D. Han D, Y.S. Kim, and M.E. Noz, *Phys. Rev. A* **40** (1988) 902.
 9. D. Leidfried, D.M. Meekhof, B.E. King, C. Monroe, W.M. Itano, and D.J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4281; O. Castaños, R. Jáuregui, R. López-Peña, J. Ricamier, and V.I. Man'ko, *Phys. Rev. A* **55** (1997) 1208; C. Monroe, D.M. Meekhof, B.E. King, and D.J. Wineland, *Science* **272** (1996) 1131.
 10. Go. Torres-Vega and J.H. Frederick, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2601.
 11. Go. Torres-Vega and J.H. Frederick, *J. Chem. Phys.* **93** (1990) 8862; **98** (1993) 3103; **98** (1993) 7040; **99** (1993) 1824.
 12. Go. Torres-Vega and J.D. Morales-Guzmán, *J. Chem. Phys.* **101** (1994) 5847.
 13. Klaus B. Møller, T.G. Jorgensen, and Go. Torres-Vega, *J. Chem. Phys.* **106** (1997) 7228.
 14. K. Husimi, *Proc. Math. Soc. Jpn.* **22** (1940) 749.
 15. M.M. Nieto, *Phys. Lett. A* **229** (1997) 135.
 16. A. Zúñiga-Segundo, *Chinese J. Phys.* **40** (2002) 223.
 17. A. Zúñiga-Segundo, *Rev. Mex. Fis.* **47** (2001) 411; A. Zúñiga-Segundo and J.L. López-Bonilla, *Chinese J. Phys.* **39** (2001) 565.
 18. F.A.M. De Oliveira, M.S. Kim, and P.L. Knight, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 2645.
 19. B. Mielnik and J. Plebanski, *Ann. Inst. H. Poincaré.* **12** (1970) 215 ; D.R. Truax, *Phys. Rev. D*, **31** (1985) 1988.
 20. W. Schleich, M. Pernigo, and F. Le Kim, *Phys. Rev. A* **44** (1991) 2172.
 21. M. Orszag, *Quantum Optics*, (Berlin, Springer-Verlag, 2000) p. 31.
 22. P. Král, *J. Mod. Opt.* **37** (1990) 889.
 23. J. Janszky, P. Domokos, S. Szabó, and P. Adam, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 4191.
 24. Z. Kaicheng, W. Qin and L. Xiangru, *J. Opt. Soc. Am. B* **10** (1993) 1287.