

# Existencia y perturbación de solitones “embebidos”, gobernados por una extensión de la ecuación NLS

A. Espinosa-Cerón  
*Facultad de Ciencias, UAEMEX,  
 Toluca 50000, Edo. de México, México*

J. Fujioka\* y A. Gómez-Rodríguez  
*Instituto de Física, UNAM,  
 Apartado Postal 20-364, México D.F., 01000, México*  
 \*fujioka@fisica.unam.mx

Recibido el 14 de febrero de 2002; aceptado el 13 de junio de 2003

En este trabajo se determinan las condiciones bajo las cuales existen “solitones embebidos” (SE), así como pulsos brillantes y oscuros convencionales, en una extensión de la ecuación no lineal de Schrödinger cúbica (NLS) con términos dispersivos y no lineales de orden superior. La estabilidad de estos SE se estudia numéricamente y se encuentra que estos solitones son semi-estables. Posteriormente, se analiza el comportamiento oscilatorio amortiguado de los SE perturbados mediante un procedimiento variacional, y se encuentra que el amortiguamiento es una consecuencia directa de la emisión de radiación. Finalmente, se muestra que la unicidad de estos SE es debida a un delicado balance entre no linealidad y dispersión.

*Descriptor:* Solitones; ecuación no lineal de Schrödinger; métodos variacionales; radiación.

We determine the conditions for the existence of “embedded solitons” (ES), and conventional bright and dark pulses, in an extension of the cubic nonlinear Schrödinger (NLS) equation with higher-order dispersive and nonlinear terms. The stability of these SE is studied numerically, and it is found that these solitons are semi-stable. The damped oscillatory behavior of the perturbed SE is then analyzed by a variational method, and it is shown that this damping is a consequence of the emission of radiation. Finally, it is shown that the uniqueness of these SE is due to a delicate balance between nonlinearity and dispersion.

*Keywords:* Solitons; nonlinear Schrödinger equation; variational methods; radiation.

PACS: 42.65.Tg; 02.30.Jr; 02.60.Cb

## 1. Introducción

Hasta 1996 no se había encontrado ninguna onda solitaria carente de radiación que fuera solución de alguna extensión de la ecuación no lineal de Schrödinger cúbica (NLS), cuya relación de dispersión lineal  $k(\omega)$  tuviera un rango  $R_k$  que incluyera al semi-eje positivo  $[0, \infty) = \{k \mid 0 \leq k \leq \infty\}$ . Es decir, no se conocía ningún ejemplo específico en el cual una ecuación de la forma

$$iu_z + \varepsilon_1 u_{tt} + \gamma_1 |u|^2 u + (\text{términos adicionales}) = 0, \quad (1)$$

cuya relación de dispersión fuera tal que  $[0, \infty) \subset R_k$ , tuviera soluciones semejantes a los solitones de la Ec. NLS cúbica, es decir, ondas solitarias que no emiten radiación de la forma

$$u(z, t) = A_1 \operatorname{sech} \left( \frac{t}{w_1} \right) e^{ik_1 z}, \quad (2)$$

donde  $k_1 > 0$ . Se consideraba que la ausencia de soluciones de este tipo era debida a que cualquier onda solitaria que fuera solución de (1), y cuya parte central se comportara de manera similar a la función (2), forzosamente entraría en resonancia con las ondas lineales de pequeña amplitud,  $u = \delta \exp(ikz - i\omega t)$  (con  $\delta \ll 1$ ), cuyas frecuencias fueran solución de la condición de resonancia  $k_1 = k(\omega)$ , y por lo tanto el pulso necesariamente tendría que emitir radiación a

estas frecuencias. Esta opinión estaba respaldada por los resultados obtenidos por Wai *et al.* [1,2] al estudiar la ecuación

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i\beta \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + |u|^2 u = 0, \quad (3)$$

la cual permite describir la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas, cuando la longitud de onda de la luz está cerca del punto de cero dispersión; y por los resultados encontrados por Höök y Karlsson [3] al estudiar la ecuación

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2 u = 0, \quad (4)$$

donde  $\varepsilon > 0$ , la cual es de utilidad para describir la propagación de pulsos luminosos muy rápidos (del orden de 1 ps de duración), cuando la frecuencia del pulso está cerca del valor en el cual la dispersión de tercer orden se anula. En ambos casos se encontró que una condición inicial de la forma  $u(0, t) = A_o \operatorname{sech}(A_o t)$  empieza inmediatamente a emitir trenes de radiación cuasi-monocromáticos. Los resultados numéricos corroboraron que en ambos casos las frecuencias de la radiación emitida coinciden, aproximadamente, con las frecuencias predichas por las condiciones de resonancia [4]:

$$k_0 = \beta \omega^3 - \frac{1}{2} \omega^2 \quad [\text{en el caso de la Ec. 3}], \quad (5)$$

$$k_0 = \varepsilon \omega^4 - \frac{1}{2} \omega^2 \quad [\text{en el caso de la Ec. 4}], \quad (6)$$

si se considera que  $k_o = A_o^2/2$ , que es el número de onda que le correspondería al pulso inicial considerado, si este pulso evolucionara de acuerdo a la ecuación NLS.

En 1997, sin embargo, se encontró que la ecuación (véase la Ref. 5)

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0, \quad (7)$$

la cual es de utilidad para describir la propagación de pulsos rápidos en fibras ópticas dopadas con semiconductores [6], tiene una solución exacta de la forma (2) si

$$\varepsilon_2/\gamma_2 = (24/49)\varepsilon_1^2/\gamma_1^2,$$

que no emite ninguna radiación, aún cuando su número de onda  $k_o$  está contenido en el rango de la relación de dispersión correspondiente a la Ec. (7). Éste fue un hallazgo de interés, ya que demostró la existencia de un nuevo tipo de pulsos ópticos, semejantes por su forma a los solitones de la Ec. NLS cúbica, pero que se pueden propagar sin radiar bajo condiciones en las cuales antes se pensaba que era inevitable la emisión de radiación. Aún cuando estos pulsos no son auténticos solitones, a partir de 1999 se les ha empezado a llamar *solitones embebidos* (SE), dado que su número de onda está inmerso o “embebido” en el rango de números de onda permitidos por la relación de dispersión del sistema [7-12].

Los SE son de particular importancia porque existen en condiciones donde los solitones usuales no pueden existir. Sin embargo, la potencial utilidad de estos pulsos en la tecnología óptica depende en gran medida de su capacidad para resistir perturbaciones sin desintegrarse. Este punto (*i.e.*, la estabilidad de los SE) es delicado, ya que el hecho mismo de que el número de onda de un SE esté inmerso en el rango de la relación de dispersión del sistema con el cual se esté tratando hace que un SE empiece a radiar inmediatamente si es perturbado, y si esta emisión de radiación continúa el pulso terminará por desintegrarse totalmente.

En el caso del SE de la Ec. (7) se ha observado que si perturbamos al pulso (ya sea aumentando o disminuyendo su altura o su anchura) éste empieza a radiar a la frecuencia esperada, y su altura comienza a oscilar [5]. Se ha observado también que estas oscilaciones se amortiguan rápidamente, y el pulso parece estabilizarse, alcanzando una nueva configuración de equilibrio. Sin embargo, el origen de este comportamiento oscilatorio amortiguado no ha sido explicado satisfactoriamente.

En el presente trabajo empezaremos (en la Sec. 2) por examinar qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la Ec. (7) para que esta ecuación tenga soluciones de la forma (2). Veremos bajo qué condiciones estos pulsos son auténticos SE, y mostraremos que la condición

$$\varepsilon_2/\gamma_2 = (24/49)\varepsilon_1^2/\gamma_1^2$$

no es en realidad una condición necesaria para la existencia de este tipo de solitones. En la Sec. 3 estudiaremos numéricamente la estabilidad de estos solitones. Posteriormente, en

la Sec. 4, usaremos un tratamiento variacional para entender mejor cómo se genera el comportamiento oscilatorio amortiguado que se observa al perturbar a estos SE. En la Sec. 5 estudiaremos por qué el SE de la Ec. (7) es único, a diferencia de lo que ocurre con la Ec. NLS cúbica, la cual tiene una infinidad de solitones. Veremos que la unicidad de este SE es consecuencia de un delicado balance entre no linealidad y dispersión. Finalmente, en la Sec. 6 presentamos nuestras conclusiones.

## 2. Solitones brillantes, oscuros y embebidos

Veamos qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la Ec. (7) para que esta ecuación tenga soluciones tipo solitón.

Sustituyendo directamente la expresión (2) en la Ec. (7) se puede ver que para que la ecuación se cumpla es necesario que los parámetros  $A_1$ ,  $w_1$  y  $k_1$  satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$A_1^2 = \frac{6}{5\gamma_2} \left[ \gamma_1 - 2\varepsilon_1 \left( \frac{\gamma_2}{24\varepsilon_2} \right)^{1/2} \right], \quad (8)$$

$$w_1^2 = \left( \frac{24\varepsilon_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} \frac{1}{A_1^2}, \quad (9)$$

$$k_1 = \left[ \gamma_1 - \varepsilon_1 \left( \frac{\gamma_2}{24\varepsilon_2} \right)^{1/2} \right] A_1^2 - \frac{19}{24}\gamma_2 A_1^4. \quad (10)$$

Debemos observar que para que la función (2), con los parámetros  $A_1$ ,  $w_1$  y  $k_1$  arriba indicados, sea realmente una solución semejante a un solitón brillante, es necesario que los coeficientes  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$  satisfagan las desigualdades  $\varepsilon_2\gamma_2 > 0$  y  $A_1^2 > 0$ , de lo contrario  $w_1$  resultaría compleja. Podemos también ver que si  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$  son positivas, y se satisface la condición

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \frac{24}{49} \frac{\varepsilon_1^2}{\gamma_1^2}, \quad (11)$$

entonces la solución definida por (2) y (8)-(10) se reduce a la solución reportada en la Ref. 5.

De manera similar, si sustituimos la expresión

$$u(z, t) = A_2 \tanh \left( \frac{t}{w_2} \right) \exp(ik_2 z) \quad (12)$$

en la Ec. (7), es fácil probar que esta función es una solución exacta de (7) siempre y cuando  $A_2$ ,  $w_2$  y  $k_2$  tomen los valores definidos por las siguientes ecuaciones:

$$A_2^2 = \frac{3}{5\gamma_2} \left[ \gamma_1 + 2\varepsilon_1 \left( \frac{\gamma_2}{24\varepsilon_2} \right)^{1/2} \right], \quad (13)$$

$$w_2^2 = \left( \frac{24\varepsilon_2}{\gamma_2} \right)^{1/2} \frac{1}{A_2^2}, \quad (14)$$

$$k_2 = \gamma_1 A_2^2 - \gamma_2 A_2^4. \quad (15)$$

Debemos notar que para que (12) sea realmente una solución similar a un solitón oscuro es necesario que  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$  satisfagan las desigualdades  $\varepsilon_2\gamma_2 > 0$  y  $A_2^2 > 0$ , de lo contrario  $w_2$  resultaría compleja.

Vemos que dependiendo de los valores de  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$ , la Ec. (7) podría no tener soluciones tipo solitón, ni brillantes ni oscuros (si  $A_1^2 < 0$  y  $A_2^2 < 0$ ), o tener únicamente un solitón brillante (si  $A_1^2 > 0$  y  $A_2^2 < 0$ ), o únicamente un solitón oscuro (si  $A_1^2 < 0$  y  $A_2^2 > 0$ ), o lo que es más raro, podría tener ambos tipos de soluciones (para los mismos coeficientes  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$ ), es decir, un solitón brillante y un solitón oscuro (si  $A_1^2 > 0$  y  $A_2^2 > 0$ ). La existencia de ambos tipos de solitones (brillantes y oscuros), como soluciones de una misma ecuación (con exactamente los mismos coeficientes), es un fenómeno poco usual que hasta ahora sólo se había encontrado en medios periódicos [13]. Cuando esto sucede (i.e., cuando  $A_1^2 > 0$  y  $A_2^2 > 0$ ) podemos usar el mismo láser tanto para transmitir solitones brillantes, como para transmitir solitones oscuros, cosa que no es posible en los sistemas gobernados por la ecuación NLS cúbica (en los cuales se requieren láseres de distintas frecuencias para transmitir estos dos tipos de solitones). Conviene enfatizar que en el caso en que (2) y (12) sean dos soluciones de (7), la suma de estas soluciones ya no será solución de la ecuación [por ser (7) una ecuación no lineal]. Por lo tanto, (7) no describe la propagación simultánea de solitones brillantes y oscuros. De hecho, no es posible describir la propagación simultánea de un solitón brillante y un solitón oscuro utilizando una sola ecuación. Para transmitir simultáneamente un solitón brillante y uno oscuro es necesario utilizar dos láseres de distinta frecuencia, y para modelar este proceso es necesario considerar dos ecuaciones tipo NLS acopladas, tal como lo muestran Trillo *et al.* en la Ref. 14.

Las situaciones en las cuales la Ec. (7) tiene al menos una solución tipo solitón (ya sea brillante u oscuro) pueden clasificarse en 8 casos físicamente distintos, correspondientes a las 8 posibles combinaciones de los coeficientes  $\varepsilon_1$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  ( $\varepsilon_2$  tiene que tener el mismo signo que  $\gamma_2$  para que  $w_i$  sea real). Ahora bien, estos 8 casos se reducen a 4 casos matemáticamente diferentes, pues la inversión simultánea de los signos de los 4 coeficientes no conduce a un caso matemáticamente diferente (tal inversión equivale simplemente a cambiar la dirección del eje  $z$ ).

Las condiciones  $A_1^2 > 0$  y  $A_2^2 > 0$  se pueden escribir de una manera muy compacta una vez que los signos de los coeficientes  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$  han sido especificados. En la Tabla I hemos enlistado los 8 casos (4 casos matemáticamente diferentes), indicando en cada caso los signos de  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$ , y mostrando las formas compactas que toman las condiciones para la existencia de solitones brillantes y/o oscuros.

En cada uno de los casos enlistados en la Tabla I en los cuales la Ec. (7) tiene un solitón brillante es posible determinar si el solitón en cuestión es realmente un SE, o se trata de un solitón normal. Tendremos un auténtico SE si el número de onda  $k_1$ , definido por (10), está dentro del rango de la

relación de dispersión:

$$k(\omega) = \varepsilon_2\omega^4 - \varepsilon_1\omega^2 \quad (16)$$

Procediendo de esta forma vemos que en los casos 1A y 1B de la Tabla I el solitón brillante de la Ec. (7) no es un SE. En cambio, en los casos 3A y 3B sí tenemos un auténtico SE. En los casos 4A y 4B siempre existe un solitón brillante, pero este solitón será un verdadero SE sólo si se cumple la desigualdad

$$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} > \frac{27}{2} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}. \quad (17)$$

Un punto que merece enfatizarse es que la información contenida en la Tabla I muestra que la Ec. (7) permite, en ciertos casos, la propagación de solitones brillantes (tanto embebidos como no embebidos) en el régimen de dispersión normal, lo cual es sumamente raro. Hasta donde les es conocido a los autores, solitones brillantes que puedan propagarse en el régimen de dispersión normal sólo han sido encontrados cuando  $\varepsilon_2 = 0$  (y  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\gamma_1 > 0$  y  $\gamma_2 < 0$ ), pero en ese caso el perfil de los solitones no es una secante hiperbólica [6]. De manera similar, la Tabla I muestra que la Ec. (7) también permite la propagación de solitones oscuros en el régimen de dispersión anómala, lo cual es también excepcional. Se conocían solitones oscuros que se pueden propagar en el régimen de dispersión anómala al acoplarse con solitones brillantes de distinta frecuencia [14], pero se creía que un solitón oscuro aislado no podía propagarse con dispersión anómala. Ahora los resultados mostrados en la Tabla I muestran que la Ec. (7) permite la propagación de solitones oscuros en ambos regímenes de dispersión.

### 3. Oscilaciones amortiguadas y semi-estabilidad

Examinemos ahora cómo se comporta el SE de la Ec. (7) cuando es perturbado. Cuando la condición (11) se cumple, este SE tiene la forma [5]

$$u(z, t) = \left(\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left( \frac{t}{\sqrt{14\varepsilon_2/\varepsilon_1}} \right) \exp \left( i \frac{5}{32} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} z \right). \quad (18)$$

Por lo tanto, si consideramos el caso particular en que  $\gamma_1 = \gamma_2 = \varepsilon_1 = 1$  y  $\varepsilon_2 = 24/49$ , el SE de la Ec. (7) será una función de la forma (2), con  $A_1 = (0.5)^{1/2} \approx 0.707$ ,  $w_1 = (48/7)^{1/2} \approx 2.619$  y  $k_1 = 5/32 \approx 0.156$ . Veamos ahora qué ocurre si tomamos una condición inicial parecida al SE exacto, pero ligeramente más alta. Consideremos, por ejemplo, la condición inicial

$$u(0, t) = A_0 \operatorname{sech} \left( \frac{t}{w_0} \right), \quad (19)$$

con  $A_0 = 0.9$  y  $w_0 = w_1$ . Resolviendo numéricamente la Ec. (7) vemos que en este caso el pulso inicial empezará a radiar como se muestra en la Fig.1, y su altura presentará las

TABLA I. Casos en los que existen soluciones solitónicas para la Ec. (7). Condiciones para su existencia, y condiciones para que los solitones brillantes estén embebidos en el espectro lineal.

Casos	Signos	de los	coeficientes	Condiciones de existencia
	$\varepsilon_1$	$\gamma_1$	$\gamma_2, \varepsilon_2$	[conds. para embebidos]
				Solitones brillantes
1A	+	+	-	Solitones oscuros
				$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} < \frac{1}{6} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$
				[ninguno embebido]
1B	-	-	+	
2A	-	+	-	No hay solitones
				$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} < \frac{1}{6} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$
2B	+	-	+	
3A	+	+	+	
				$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} > \frac{1}{6} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$
				[todos embebidos]
3B	-	-	-	
4A	-	+	+	
				$\forall \varepsilon_i, \gamma_i$
				$\frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} > \frac{1}{6} \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$
				[embebidos si vale (17)]
4B	+	-	-	

oscilaciones amortiguadas que vemos en la Fig. 2. La Fig. 3 muestra el espectro (calculado en  $z = 160$ ) de la solución mostrada en la Fig. 1. Este espectro muestra claramente 2 grandes picos situados en  $\nu = \pm 0.24$ , que corresponden a las frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \pm \left( \frac{15 \varepsilon_1}{14 \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \pm 1.48, \tag{20}$$

que son las raíces de la condición de resonancia

$$k_1 = \varepsilon_2 \omega^4 - \varepsilon_1 \omega^2.$$

La presencia de estos dos picos de radiación en el espectro mostrado en la Fig. 3 parecería indicar que la radiación emitida por el pulso es completamente monocromática. Sin embargo, si calculamos la transformada de Fourier (TF) solamente de la radiación contenida en el intervalo  $12 \leq t \leq 64$  (para  $z = 160$ ), obtenemos el espectro (*i.e.*, el cuadrado del módulo de la TF) mostrado en la Fig. 4. En esta figura vemos dos picos: uno grande situado en  $\nu = 0.24$  ( $\omega = 1.5$ ) que corresponde a la frecuencia de resonancia positiva mostrada en (20), y uno muy pequeño situado en  $\nu = -0.07$  que corresponde a una de las frecuencias  $\nu_{rp} = \pm 0.066$  ( $\omega_{rp} = \pm 0.41$ ) que se obtienen de la *condición de resonancia*

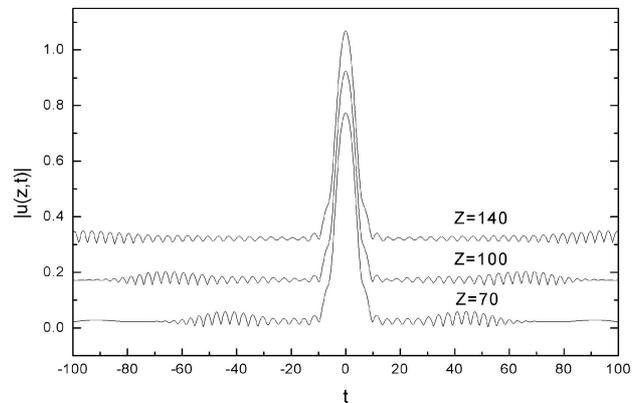


FIGURA 1. Perfil del pulso en  $z = 70, 100, 140$ , correspondiente a una condición inicial de la forma (19), cuya altura inicial ( $A_0 = 0.9$ ) es mayor que la del SE exacto ( $A_1 = \sqrt{1/2}$ ).

parcial  $-k_1 = \varepsilon_2 \omega^4 - \varepsilon_1 \omega^2$ , cuyas raíces son

$$\omega_{rp} = \pm \left[ \left( \frac{7 - 34^{\frac{1}{2}}}{14} \right) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.41. \tag{21}$$

La generación de radiación por *resonancia parcial* será examinada en otra publicación. Aquí lo que queremos mencionar es que el tren de radiación emitido por el extremo derecho del pulso contiene 2 frecuencias y es, por lo tanto, *bicromático*. Lo mismo ocurre con el tren de radiación emitido por

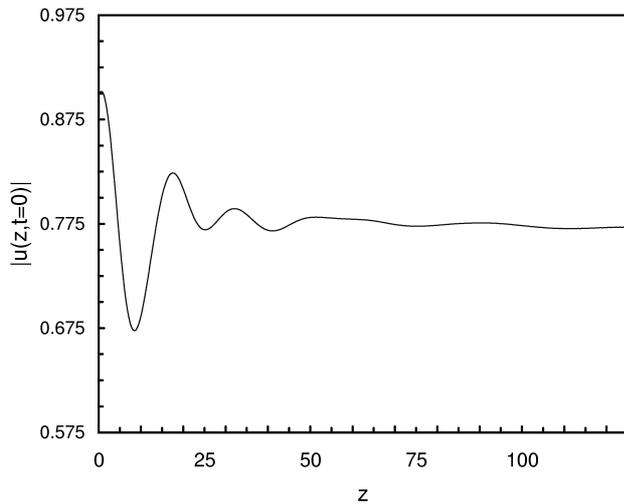


FIGURA 2. Forma en que oscila la altura del pulso cuando se toma la condición inicial (19) con  $A_o = 0.9$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

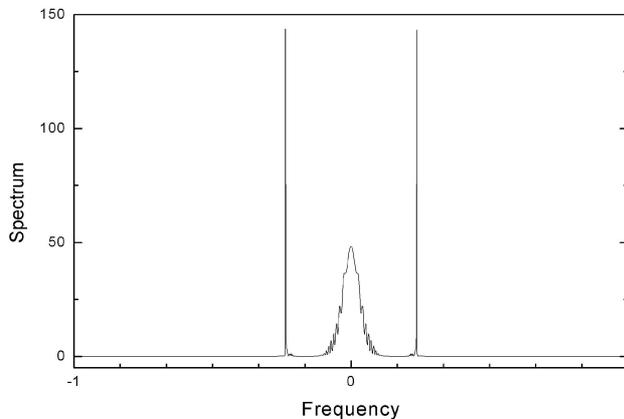


FIGURA 3. Espectro de la solución de la Ec. (7) en  $z = 160$ , para la misma condición inicial considerada en las Figs. 1 y 2.

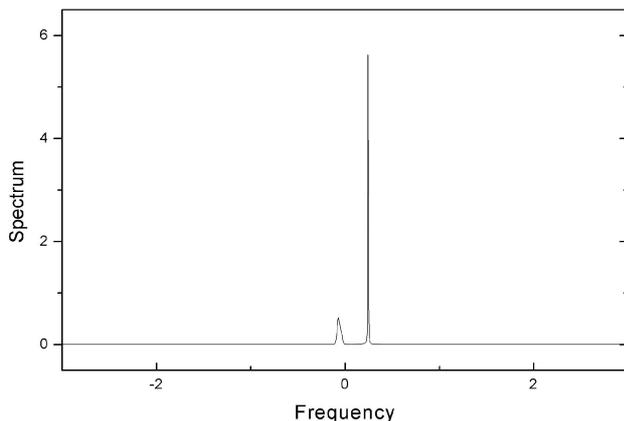


FIGURA 4. Espectro de la radiación emitida (en el intervalo  $12 \leq t \leq 64$ ) por la solución de la Ec. (7) en  $z = 160$ , correspondiente a la misma condición inicial considerada en las Figs. 1-3.

el extremo izquierdo del pulso, sólo que en ese caso las frecuencias de radiación tienen los signos invertidos (esto

es:  $\nu = -0.24$  y  $\nu = 0.07$ ). Los resultados numéricos confirman que los frentes de avance de los trenes de radiación mostrados en la Fig. 1 se mueven a lo largo del eje  $t$  con las velocidades de grupo recíprocas  $dt/dz = k'(\pm\omega_{rp})$ .

La gráfica mostrada en la Fig. 2 parecería indicar que una vez que las oscilaciones del SE perturbado se han amortiguado, el pulso se estabiliza y alcanza una nueva configuración de equilibrio, cuya altura difiere del SE exacto. Sin embargo, de ser esto cierto, implicaría que la Ec. (7) tiene otras soluciones [distintas del SE (18)] que tienen un perfil similar a un solitón, pero que no radían, aún cuando el rango de la relación de dispersión (16) contiene al intervalo  $0 \leq k < \infty$ . En otras palabras: existirían otros SE además del solitón (18). Esto podría suceder, pero sería un resultado excepcional, ya que por lo general los SE son soluciones aisladas y únicas [8]. A continuación investigaremos si en verdad el SE perturbado de la Ec. (7) alcanza otras configuraciones de equilibrio distintas del SE exacto.

En la Fig. 2 podemos observar que la altura del SE perturbado parece estabilizarse en un valor cercano a 0.77, que está por arriba del SE exacto, cuya altura es  $(0.5)^{1/2} \approx 0.71$ . Para ver si en realidad al perturbar el SE (18), aumentando su altura por encima de 0.77, se alcanza un nuevo estado de equilibrio distinto al SE exacto, calculamos nuevamente la solución numérica directa de la Ec. (7), pero esta vez sobre un intervalo mucho más largo,  $0 \leq z \leq 1000$ , y utilizando un pulso inicial con una altura más cercana a 0.77, es decir, tomamos una condición inicial de la forma (19), con  $A_o = 0.8$  y  $w_o = w_1 = (48/7)^{1/2}$ . El resultado de este cálculo se puede ver en la Fig. 5. Esta gráfica muestra con toda claridad que la altura del pulso no se estabiliza alrededor de 0.77. Una vez que las oscilaciones se han amortiguado, la altura del pulso empieza a caer de forma continua, y se aproxima lenta y asintóticamente a la altura del SE exacto. Este resultado indica que al perturbar al SE exacto (aumentando su altura), el pulso arroja la energía excedente (en forma de radiación), y retorna a la configuración de equilibrio (18). En la Fig. 6 podemos ver cómo evoluciona la energía de la parte solitónica del pulso durante este proceso. Esta energía se calculó integrando  $|u|^2$  sobre el intervalo  $-20 \leq t \leq 20$ , el cual contiene íntegramente la parte solitónica del pulso (cuando  $z < 2000$ ), y excluye prácticamente toda la radiación emitida. El pulso (18) parecería, pues, estable. Esta "estabilidad" corresponde, sin embargo, a perturbaciones en las cuales la energía del pulso inicial es superior a la del SE exacto. Para saber cómo evoluciona la altura del pulso cuando la energía inicial es menor que la del SE exacto, calculamos la solución de la Ec. (7) para una condición inicial de la forma (19), pero esta vez con  $A_o = 0.6$  (que es menor que la altura del SE) y  $w_o = w_1 = (48/7)^{1/2}$ . La forma en que la radiación empieza a ser emitida puede verse en la Fig. 7. El comportamiento de la altura del solitón para esta condición inicial se puede ver en la Fig. 8. En esta gráfica vemos que después de las primeras oscilaciones la altura del pulso cae decididamente, sin que se observe ninguna tendencia a estabilizarse. Esto nos indica que el pulso no encuentra ninguna otra configuración

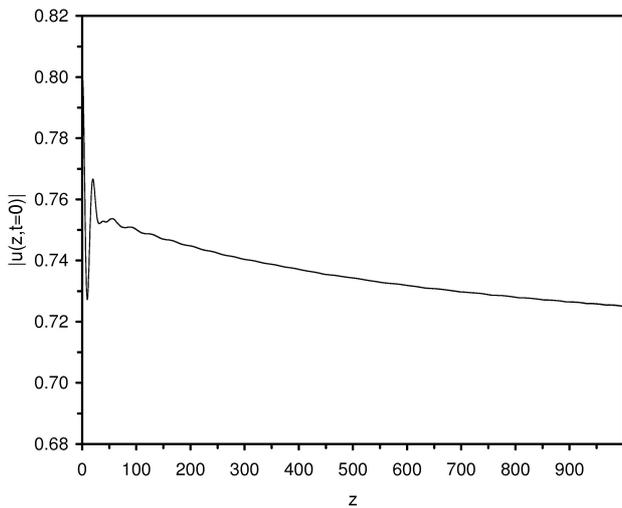


FIGURA 5. Forma en que varía la altura del pulso cuando la energía inicial es mayor que la del SE exacto. Se tomó la condición inicial (19) con  $A_o = 0.8$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

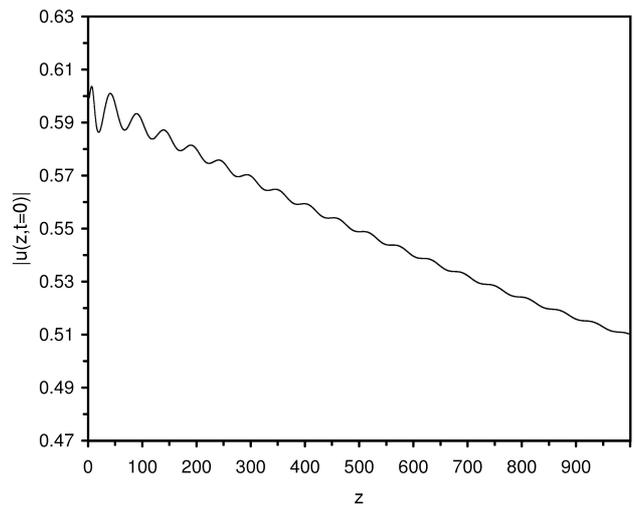


FIGURA 8. Forma en que cae la altura del pulso cuando la energía inicial es menor que la del SE exacto. Se tomó la condición inicial (19) con  $A_o = 0.6$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

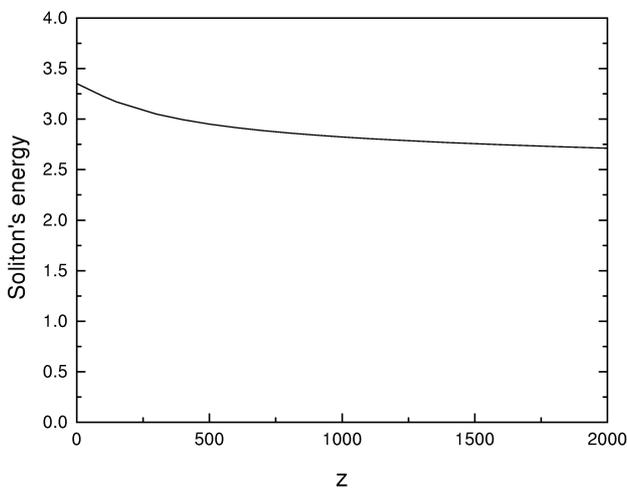


FIGURA 6. Energía del pulso (sin incluir la energía de la radiación) como función de  $z$ , para una condición inicial de la forma (19) con  $A_0 = 0.8$  y  $w_0 = w_1 \approx 2.62$ .

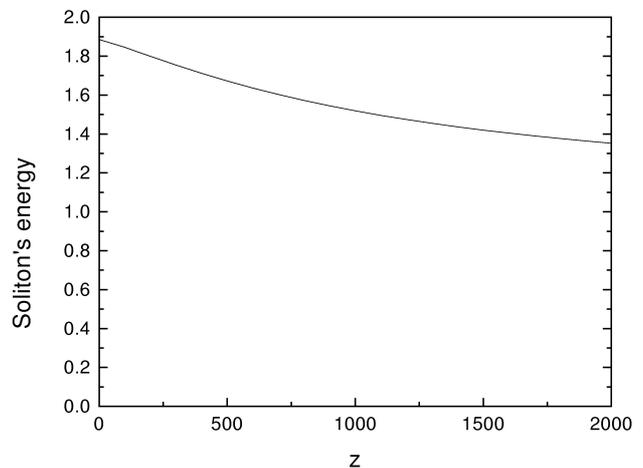


FIGURA 9. Energía del pulso (sin incluir la energía de la radiación) como función de  $z$ , para una condición inicial de la forma (19) con  $A_0 = 0.6$  y  $w_0 = w_1 \approx 2.62$ .

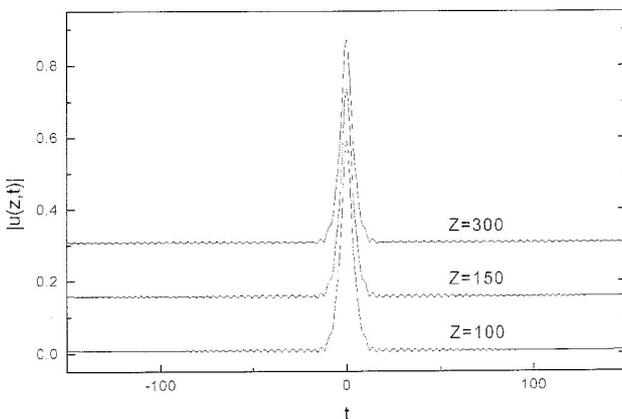


FIGURA 7. Perfil del pulso en  $z = 100, 150, 300$ , correspondiente a una condición inicial de la forma (19), cuya altura inicial ( $A_o = 0.6$ ) es menor que la del SE exacto ( $A_1 = \sqrt{1/2}$ ).

de equilibrio (con una altura menor que el SE exacto), de manera que su altura continúa cayendo inexorablemente. Conforme la altura del pulso va cayendo también la energía contenida en la parte solitónica de la solución va disminuyendo, como puede verse en la Fig. 9. Al igual que antes, esta energía se obtuvo integrando  $|u|^2$  sobre el intervalo  $-20 \leq t \leq 20$ . Vemos, pues, que el SE (18) se comporta como una solución estable ante perturbaciones que incrementen su energía, y como una solución inestable ante perturbaciones que la disminuyan. El SE es, pues, lo que se conoce como una solución *semi-estable*.

#### 4. Tratamiento variacional

En la sección anterior hemos visto que cuando el pulso inicial es un poco más alto que el solitón exacto, la altura del pulso presenta inicialmente un comportamiento oscilatorio amorti-

guado (como se observa en la Fig. 2), y posteriormente decae lentamente conforme el pulso se aproxima al solitón exacto. En esta sección queremos examinar con más cuidado cómo se originan las oscilaciones amortiguadas que vemos en la Fig. 2. Estas oscilaciones se podrían entender con claridad si uno pudiera reproducirlas mediante el método variacional introducido por Anderson [15], el cual ha permitido comprender más profundamente una amplia gama de procesos en óptica no lineal (ver la Ref. 16 y las referencias ahí mencionadas). Resulta, sin embargo, que el comportamiento oscilatorio amortiguado mostrado en la Fig. 2 no ha podido ser explicado por el método tradicional de Anderson, ya que no se ha encontrado una función de prueba que describa adecuadamente pulsos con radiación, como el que vemos en la Fig. 1. Para resolver esta dificultad seguiremos un procedimiento similar al que utilizaron Kath y Smyth [17] para describir la evolución de solitones perturbados en el caso de la ecuación NLS cúbica.

Empecemos considerando una función de prueba de la forma

$$u(z, t) = \left[ A(z) \operatorname{sech} \left( \frac{t}{w(z)} \right) + ig(z)s(t) \right] e^{i\theta(z)}, \quad (22)$$

donde  $s(t)$  es la función escalón

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{if } |t| > T/2 \end{cases} \quad (23)$$

y  $T$  es una constante cuyo valor se elegirá más tarde. Siguiendo ahora el procedimiento usual de Anderson, sustituimos (22) en la lagrangiana correspondiente a la Ec. (7):

$$L = i(u_z u^* - u u_z^*) - 2\varepsilon_1 |u_t|^2 + 2\varepsilon_2 |u_{tt}|^2 + \gamma_1 |u|^4 - \frac{2}{3} \gamma_2 |u|^6, \quad (24)$$

luego integramos sobre  $t$ , y con la lagrangiana integrada obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes, cuya forma es

$$g' = -\frac{2}{3\pi} A \left( \gamma_1 A^2 - \frac{2\varepsilon_1}{w^2} + \frac{28}{5} \frac{\varepsilon_2}{w^4} - \frac{16}{15} \gamma_2 A^4 \right), \quad (25)$$

$$\theta' = \gamma_1 A^2 - \frac{\varepsilon_1}{w^2} + \frac{7}{3} \frac{\varepsilon_2}{w^4} - \frac{8}{9} \gamma_2 A^4, \quad (26)$$

$$(wA)' = \frac{T}{\pi} g \left( \gamma_1 A^2 - \frac{\varepsilon_1}{w^2} + \frac{7}{3} \frac{\varepsilon_2}{w^4} - \frac{8}{9} \gamma_2 A^4 \right), \quad (27)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \varepsilon_1 \frac{A^2}{w} - \gamma_1 w A^4 - \frac{7}{5} \varepsilon_2 \frac{A^2}{w^3} + \frac{8}{15} \gamma_2 w A^6 \right) = 0, \quad (28)$$

donde las primas indican derivadas respecto a  $z$ . Estas ecuaciones no pueden describir todavía de manera adecuada la solución de la Ec. (7) correspondiente a la condición inicial (19), ya que la función de prueba (22) no contiene términos que describan la radiación emitida. La solución completa de (7) tendrá una parte similar a un solitón (que puede describirse mediante (22)), más otra parte que es la radiación

emitida. La energía de la solución completa debe mantenerse constante, ya que la invariancia de la lagrangiana (24) ante corrimientos de fase (*i.e.*,  $u' = u e^{i\varepsilon}$ ) implica (por el teorema de Noether) que la integral de  $|u|^2$  es una cantidad conservada. Por otra parte, la energía de la parte “solitónica” no puede mantenerse constante, pues parte de esa energía se transfiere a la radiación. Teniendo esto en mente podemos constatar que las Ecs. (25)-(28) no son todavía satisfactorias, ya que estas ecuaciones implican que

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} |u_{prueba}|^2 dt = \frac{d}{dz} (2A^2 w + Tg^2) = 0, \quad (29)$$

y esto significaría que la energía de la parte solitónica de la solución se mantiene constante, lo cual, como dijimos arriba, no sucede debido a la emisión de radiación. Lo que deberíamos tener en lugar de (29) es una ecuación de la forma

$$\frac{d}{dz} (2A^2 w + Tg^2) = -2 \frac{d}{dz} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + Qz} |u_r|^2 dt, \quad (30)$$

donde  $u_r(z, t)$  es la radiación emitida y  $Q$  es el recíproco de la velocidad a la cual avanza el frente de radiación. La Ec. (30) nos dice que la energía que pierde la parte solitónica de la solución debe ser igual a la energía que gana la radiación, ya que la energía total (*i.e.*, la energía de la solución completa) debe mantenerse constante.

Para que el sistema (25)-(28) sea consistente con la Ec. (30) es necesario introducir una corrección en la Ec. (25), añadiéndole en el miembro derecho el término adicional

$$R(z) = -\frac{1}{Tg} \frac{d}{dz} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + Qz} |u_r|^2 dt. \quad (31)$$

Con esta adición, el sistema formado por las Ecs. (26)-(28) y la ecuación corregida:

$$g' = -\frac{2}{3\pi} A \left( \gamma_1 A^2 - \frac{2\varepsilon_1}{w^2} + \frac{28}{5} \frac{\varepsilon_2}{w^4} - \frac{16}{15} \gamma_2 A^4 \right) + R \quad (32)$$

es ya consistente con la Ec. (30).

Lo que ahora necesitamos es expresar a la función  $R(z)$  en términos de  $A(z)$ ,  $w(z)$ ,  $g(z)$  y  $\theta(z)$ , pues de lo contrario tendríamos 5 incógnitas, pero solamente 4 ecuaciones de Euler-Lagrange. Para encontrar esta relación empezaremos por aproximar la radiación emitida por el extremo derecho del pulso por una solución de la parte lineal de la Ec. (7) de la forma siguiente:

$$u_r(z, t) = \delta e^{-\alpha z - \beta t} e^{i(k_m z - \omega_m t)}, \quad (33)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $k_m$  y  $\omega_m$  son constantes (y  $\delta \ll 1$ ). Consideraremos que  $\omega_m$  es el valor promedio de  $\omega_r$  y  $\omega_{rp}$ , y que  $k_m$  puede aproximarse mediante la relación de dispersión (16).

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  pueden hallarse sustituyendo (33) en la parte lineal de (7).

La Ec.(33) nos permite evaluar la integral que aparece en (31), lo cual nos conduce a la siguiente expresión para  $R(z)$ :

$$R(z) = \frac{r^2(z)}{Tg(z)} [p - (p + Q)e^{-2\beta Qz}], \quad (34)$$

donde  $p = \alpha/\beta$  y  $r(z)$  es la función

$$r(z) = |u_r(z, T/2)|. \quad (35)$$

La expresión (34) no es todavía completamente satisfactoria, ya que diverge en los puntos en los que  $g(z) = 0$ . Más adelante explicaremos cómo mejorar (34). También explicaremos cómo evaluar el parámetro  $T$ .

Las expresiones (33) y (35) nos permiten obtener una primera aproximación para  $r(z)$ . Sin embargo, podemos obtener un mejor valor para esta función en términos de  $A(z)$ ,  $w(z)$  y  $g(z)$  si recordamos que al estudiar la ecuación NLS cúbica se ha encontrado que cuando un pulso oscilante tiende hacia una solución estacionaria, el valor de  $r^2(z)$  resulta proporcional a la diferencia  $E_{os} - E_{es}$ , donde  $E_{os}$  es la energía del pulso oscilante y  $E_{es}$  es la energía de la solución estacionaria. En nuestro caso podemos expresar estas energías en la forma

$$E_{os} = 2A^2(z)w(z) + Tg^2(z), \quad (36)$$

$$E_{es} = 2A_{es}^2w_{es}, \quad (37)$$

donde  $A_{es}$  y  $w_{es}$  son la altura y la anchura de la solución estacionaria de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estos valores se pueden encontrar a partir de las Ecs. (28) y (32), ya que estas ecuaciones implican que  $A_{es}$  y  $w_{es}$  son la solución del sistema

$$\varepsilon_1 \frac{A_{es}^2}{w_{es}} - \gamma_1 w_{es} A_{es}^4 - \frac{7}{5} \varepsilon_2 \frac{A_{es}^2}{w_{es}^3} + \frac{8}{15} \gamma_2 w_{es} A_{es}^6 = K, \quad (38)$$

$$\gamma_1 A_{es}^2 - \frac{2\varepsilon_1}{w_{es}^2} + \frac{28}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^4} - \frac{16}{15} \gamma_2 A_{es}^4 = 0, \quad (39)$$

donde  $K$  es una cantidad conservada cuyo valor se encuentra reemplazando  $A_{es}$  y  $w_{es}$  en (38), por los valores iniciales  $A_o$  y  $w_o$ . En la Fig. 10 podemos ver la forma de las curvas determinadas por las Ecs. (38) y (39). Los valores de  $A_{es}$  y  $w_{es}$  corresponden a la intersección de estas dos curvas.

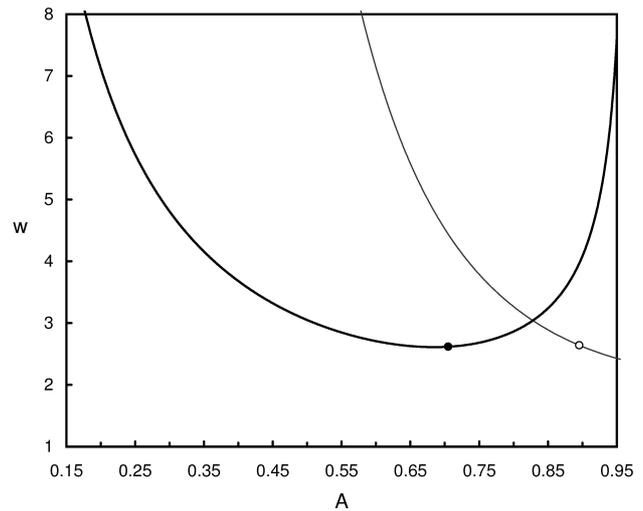


FIGURA 10. Curvas correspondientes a las ecuaciones (38) (curva delgada) y (39) (curva gruesa). Los valores  $(A_o, w_o)$  de la condición inicial(19) corresponden al pequeño círculo sobre la curva delgada, y los valores  $(A_1, w_1)$  del SE exacto corresponden al punto negro sobre la curva gruesa. La intersección de ambas curvas determina el punto  $(A_{es}, w_{es})$ .

Si consideramos que  $r^2(z)$  es proporcional a  $E_{os} - E_{es}$  se deberá cumplir una ecuación de la forma

$$r^2 = M(2A^2w + Tg^2 - 2A_{es}^2w_{es}), \quad (40)$$

donde  $M$  es una cierta constante de proporcionalidad. En el Apéndice A se muestra cómo obtener un valor aproximado para esta constante en términos de  $A_{es}$  y  $w_{es}$ .

Sustituyendo (40) en (34) parecería que tuviéramos ya lo que deseábamos: una expresión para  $R(z)$  en términos de  $A(z)$ ,  $w(z)$  y  $g(z)$ . Sin embargo, nos restan dos cosas por hacer: calcular el parámetro  $T$ , y modificar la Ec. (34) para evitar las singularidades que aparecen cuando  $g(z) = 0$ . En el Apéndice B se muestra cómo calcular  $T$ . Por otro lado, podemos modificar la expresión (34) reemplazando la función  $g(z)$  que aparece en el denominador, por una función parecida  $\bar{g}(z)$ , que no sea igual a cero en ningún punto. En el Apéndice C se muestra que podemos tomar

$$\bar{g}(z) = \frac{sgn(g(z))r(z)}{(2TM)^{\frac{1}{2}}}, \quad (41)$$

donde  $sgn(g(z)) = 1$  si  $g(z) \geq 0$ , y  $sgn(g(z)) = -1$  si  $g(z) < 0$ . Reemplazando la función  $g(z)$  que aparece en el denominador de (34), por la función  $\bar{g}(z)$  definida en (41), obtenemos

$$R(z) = -sgn(g)Q r(z) \left(\frac{2M}{T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\beta Qz}. \quad (42)$$

Ahora, sustituyendo en esta expresión la forma de  $r(z)$  dada por (40), obtenemos una expresión para  $R(z)$  en términos de  $A(z)$ ,  $w(z)$  y  $g(z)$ , que no tiene singularidades.

Estamos, finalmente, en condiciones de calcular cómo es la evolución del pulso inicial (19) de acuerdo con las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas (26)-(28) y (32), y las

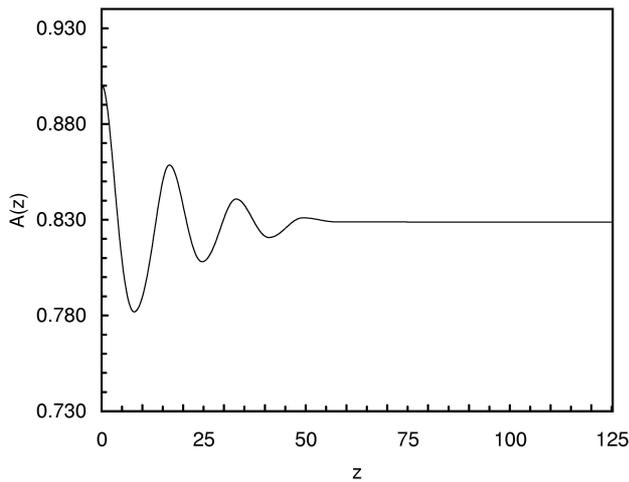


FIGURA 11. Comportamiento de  $A(z)$  predicho por las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas, correspondiente a la condición inicial (19), con  $A_o = 0.9$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

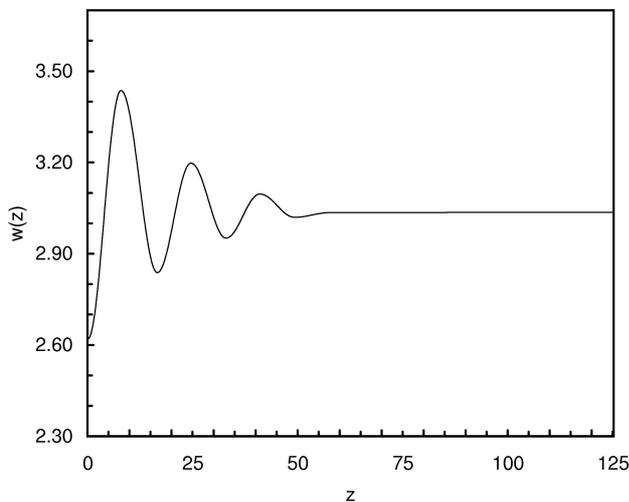


FIGURA 12. Comportamiento de  $w(z)$  predicho por las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas, correspondiente a la condición inicial (19), con  $A_o = 0.9$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

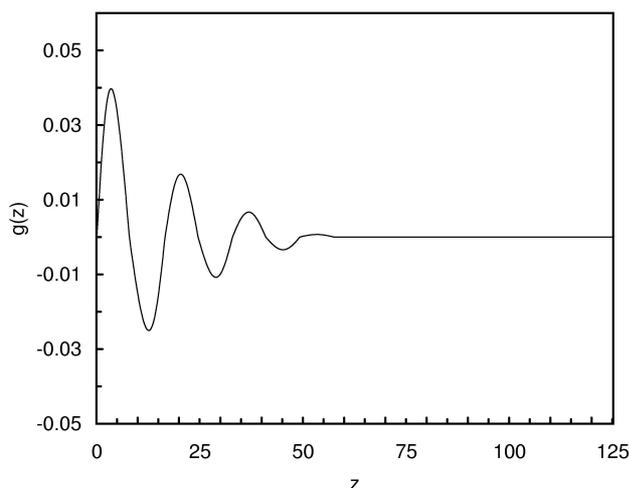


FIGURA 13. Comportamiento de  $g(z)$  predicho por las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas, correspondiente a la condición inicial (19), con  $A_o = 0.9$  y  $w_o = w_1 \approx 2.62$ .

ecuaciones auxiliares (40) y (42). Utilizando un algoritmo de Runge-Kutta de 4° orden para resolver este sistema, encontramos que estas ecuaciones predicen que  $A(z)$ ,  $w(z)$  y  $g(z)$  evolucionarán como se muestra en las Figs. 11-13. La gráfica correspondiente a  $\theta(z)$  no se muestra ya que el comportamiento de esta función resulta ser una línea recta,  $\theta = kz$ , con  $k = 0.17$ .

La Fig. 11 nos muestra que las ecuaciones de Euler-Lagrange, con la corrección debida a la radiación emitida, predicen acertadamente que la altura del pulso tendrá un comportamiento oscilatorio amortiguado. Se puede comprobar que el amortiguamiento de estas oscilaciones es una consecuencia directa de la emisión de radiación, ya que si en la Ec. (32) hacemos cero la corrección debida a la radiación, el amortiguamiento desaparece. La semejanza entre las Figs. 2 y 11 muestra que la corrección  $R(z)$  que introdujimos en la Ec. (32) describe de manera bastante satisfactoria la energía perdida por radiación. Sin embargo, una comparación más cuidadosa entre estas dos gráficas muestra que las oscilaciones de la Fig. 11 presentan un desplazamiento vertical de 0.05 (que corresponde a un 5.5% de la altura inicial del pulso), con respecto a las oscilaciones de la Fig. 2. El origen de este desplazamiento puede entenderse con ayuda de la Fig. 10. El pequeño círculo sobre la curva delgada que vemos en esta figura nos indica la altura y la anchura del pulso inicial (19). Conforme el pulso avanza por la fibra, su altura y anchura cambian, y el punto de coordenadas  $(A(z), w(z))$  empieza a moverse sobre la curva delgada, ya que las funciones  $A(z)$  y  $w(z)$  deben satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange (28). Ahora bien, el único punto de esta curva que está asociado a una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es el punto  $(A_{es}, w_{es})$  definido por la intersección de las dos curvas mostradas en la figura, de manera que el pulso tiende a esa configuración. Así pues, conforme las oscilaciones del pulso se van amortiguando, su altura y anchura tienden, respectivamente, a los valores  $A_{es}$  y  $w_{es}$ . La Fig. 10 nos muestra que  $A_{es} \approx 0.83$ , y esto nos explica porqué en la Fig. 11 vemos que la altura del pulso se aproxima a este valor al ir amortiguándose sus oscilaciones. Si la condición inicial hubiera sido distinta, el punto  $(A(z), w(z))$  se hubiera movido sobre otra curva (similar a la curva delgada de la Fig. 10), y esa nueva curva habría intersectado a la curva gruesa de la Fig. 10 en otro punto  $(A'_{es}, w'_{es})$ . Dependiendo de la condición inicial elegida, el punto  $(A_{es}, w_{es})$  podría estar más cerca o más lejos de la configuración correspondiente al solitón exacto.

La Fig. 12 muestra que también la anchura del pulso tiene un comportamiento oscilatorio amortiguado. Sin embargo, las oscilaciones de  $w(z)$  presentan una diferencia de fase de  $\pi$  rad con respecto a las oscilaciones de  $A(z)$ , de manera que  $w(z)$  crece cuando  $A(z)$  disminuye, y viceversa. Esto se debe a que el pulso trata de mantener su energía  $(2A^2w + Tg^2)$  constante, y por lo tanto el producto  $2A^2w$  es aproximadamente constante (ya que  $g^2$  es una cantidad pequeña, según vemos en la Fig. 13).

La Fig. 13 muestra que  $g(z)$  también tiene un comportamiento oscilatorio amortiguado, y las oscilaciones de  $g(z)$  presentan una diferencia de fase de  $\pi/2$  con respecto a las oscilaciones de  $A(z)$ . Podemos ver que  $g(z)$  tiende a cero a medida que las oscilaciones de  $A(z)$  y  $w(z)$  tienden a desaparecer.

Por lo que respecta a la función  $\theta(z)$ , hemos indicado ya que  $\theta(z) = kz$ , con  $k = 0.17$ . Este comportamiento es muy comprensible ya que la solución exacta (18) de la Ec. (7) tiene un factor exponencial  $\exp(ik_{ex}z)$ , con  $k_{ex} = 5\gamma_1^2/32\gamma_2$ , y cuando  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  tenemos que  $k_{ex} = 5/32 \approx 0.16$ . Por lo tanto, el comportamiento de la exponencial  $\exp(i\theta(z))$  que aparece en la función de prueba (22) es muy similar a la exponencial  $\exp(ik_{ex}z)$  de la solución exacta (18).

### 5. Unicidad del solitón embebido

Tomando en cuenta lo que hemos visto en las secciones anteriores, podemos ver que el SE de la Ec. (7) tiene 3 características principales que lo diferencian de los solitones normales de la ecuación NLS cúbica:

- (a) el número de onda del SE está "embebido" en el espectro lineal;
- (b) el SE es una solución semi-estable;
- (c) el SE es una solución aislada; su altura, anchura y número de onda están determinados de manera única por los coeficientes de la ecuación.

La característica (a) es una consecuencia del término dispersivo de cuarto orden ( $\varepsilon_2 u_{4t}$ ) que aparece en la Ec. (7). Este término hace que el rango de la relación de dispersión  $k(\omega)$  dada por (16) contenga a todos los números de onda positivos (cuando  $\varepsilon_2 > 0$ ), y a todos los números de onda negativos (cuando  $\varepsilon_2 < 0$ ), e incluya así al número de onda del SE.

Las características (b) y (c) están indisolublemente ligadas. El SE es semi-estable porque ante una perturbación que le reste algo de energía el pulso ya no logra encontrar otra configuración de equilibrio (distinta del SE exacto) que le permita propagarse por la fibra sin distorsionarse. En este sentido, la semi-estabilidad del SE es una consecuencia de su unicidad. Por lo tanto, es importante entender bien por qué el SE de la Ec. (7) es único, a diferencia de lo que ocurre en el caso de la ecuación NLS cúbica, la cual tiene toda una familia de solitones de distintas alturas.

La unicidad del SE de la Ec. (7) puede entenderse con claridad si examinamos con más cuidado el balance entre dispersión y no linealidad que da lugar a la existencia de este solitón. Para ello conviene escribir la Ec. (7) en la forma

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f(z, t), \tag{43}$$

donde

$$f(z, t) = -\gamma_1 |u|^2 u + \gamma_2 |u|^4 u. \tag{44}$$

Si ahora denotamos como  $\tilde{u}(k, \omega)$  a la doble transformada de Fourier:

$$\tilde{u}(k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{-i(kz - \omega t)} dz dt \tag{45}$$

y transformamos la Ec. (43), obtenemos

$$\tilde{u}(k, \omega) = \frac{\tilde{f}(k, \omega)}{\varepsilon_2 \omega^4 - \varepsilon_1 \omega^2 - k}. \tag{46}$$

Veamos ahora lo que sucede cuando  $u(z, t)$  es una función de la forma

$$u(z, t) = A \operatorname{sech} \left( \frac{t}{w} \right) e^{iqz}. \tag{47}$$

Si calculamos las transformadas  $\tilde{u}(k, \omega)$  y  $\tilde{f}(k, \omega)$  correspondientes a esta función, y las sustituimos en (46), llegamos a la siguiente ecuación:

$$\left( \operatorname{sech} h \frac{\pi w \omega}{2} \right) \delta(q - k) = \frac{c_4 \omega^4 + c_2 \omega^2 + c_0}{\varepsilon_2 \omega^4 - \varepsilon_1 \omega^2 - q} \times \left( \operatorname{sech} h \frac{\pi w \omega}{2} \right) \delta(k - q), \tag{48}$$

donde

$$c_4 = \frac{1}{24} \gamma_2 w^4 A^4, \tag{49}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \gamma_2 w^2 A^2 \left( \frac{5}{6} A^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right), \tag{50}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \gamma_2 A^2 \left( \frac{3}{4} A^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right). \tag{51}$$

Es claro que la Ec. (48) sólo se cumplirá si los 2 polinomios de cuarto orden en  $\omega$  que aparecen en el miembro derecho de esta ecuación se cancelan mutuamente, y para que esto ocurra deberán satisfacerse las 3 condiciones siguientes:  $c_4(A, w) = \varepsilon_2$ ,  $c_2(A, w) = -\varepsilon_1$  y  $c_0(A) = -q$ . Estas 3 condiciones determinan de manera única los valores de los 3 parámetros ( $A$ ,  $w$  y  $q$ ) que definen al pulso (47) y, como el lector ya habrá imaginado, estas condiciones se cumplen si (y sólo si) los parámetros  $A$ ,  $w$  y  $q$  toman los valores  $A_1$ ,  $w_1$  y  $k_1$  definidos por las Ecs. (8)-(10).

Vemos, pues, que la unicidad del SE de la Ec. (7) se debe a que la cancelación mutua de los 2 polinomios que aparecen en (48) impone 3 condiciones, las cuales determinan unívocamente la altura, la anchura y el número de onda del solitón. Debemos ahora observar que el polinomio que aparece en el numerador del miembro derecho de (48) depende de los coeficientes no lineales  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , mientras que el polinomio que está en el denominador depende de los coeficientes dispersivos  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . Por lo tanto, la cancelación mutua de estos dos

polinomios es una expresión del delicado balance entre no linealidad y dispersión que da origen al SE de la Ec. (7).

Observemos ahora qué es lo que pasa en el caso de la ecuación NLS cúbica (*i.e.*, cuando  $\varepsilon_2 = \gamma_2 = 0$ ). En ese caso, en lugar de la Ec. (48), tendremos la siguiente ecuación:

$$\left(\sec h \frac{\pi w \omega}{2}\right) \delta(q - k) = \frac{c_2' \omega^2 + c_0'}{-\varepsilon_1 \omega^2 - q} \times \left(\sec h \frac{\pi w \omega}{2}\right) \delta(k - q), \quad (52)$$

donde

$$c_2' = -\frac{1}{2} \gamma_1 w^2 A^2, \quad (53)$$

$$c_0' = -\frac{1}{2} \gamma_1 A^2. \quad (54)$$

Ahora, para que (52) se cumpla, debemos exigir que los 2 polinomios de 2° orden que aparecen en el lado derecho de la ecuación se cancelen mutuamente, y esto impone únicamente 2 condiciones:  $c_2'(A, w) = -\varepsilon_1$  y  $c_0'(A) = -q$ , las cuales nos conducen a las conocidas relaciones

$$w = \left(\frac{2\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)^{1/2} \frac{1}{A} \quad (55)$$

$$q = \frac{1}{2} \gamma_1 A^2 \quad (56)$$

Como en este caso tenemos sólo 2 condiciones, mientras que el pulso (47) involucra 3 parámetros, uno de los parámetros (por ejemplo, la altura) puede elegirse libremente. Ésta es una forma sencilla de entender por qué, a diferencia de lo que ocurre con la Ec. (7), la ecuación NLS cúbica es capaz de aceptar solitones de altura arbitraria.

## 6. Conclusiones

En este trabajo empezamos por examinar bajo qué condiciones la Ec. (7) tiene soluciones tipo solitón (*i.e.*, con perfiles de *sech* o *tanh*), y cuándo estas soluciones constituyen auténticos "solitones embebidos" (SE). Vimos que en algunos casos la Ec. (7) permite la propagación de solitones brillantes en el régimen de dispersión normal (casos 1B, 3B y 4A de la Tabla I), y de solitones oscuros en el régimen de dispersión anómala (casos 2B, 3A y 4B). También vimos que, bajo ciertas condiciones, en los casos 3 y 4 pueden existir tanto solitones brillantes como oscuros (para los mismos coeficientes  $\varepsilon_i$  y  $\gamma_i$ ), lo cual no es posible en sistemas descritos por la ecuación NLS cúbica. La existencia de solitones brillantes en los casos 1B y 3B se debe, fundamentalmente, a que  $\varepsilon_1$  y  $\gamma_1$  son ambas negativas, lo cual permite que haya un balance entre el efecto de dispersión de la velocidad de grupo y el efecto de auto-modulación de fase, de manera similar a lo que ocurre cuando  $\varepsilon_1$  y  $\gamma_1$  son ambas positivas. En el caso 4A la existencia del solitón brillante se debe a la presencia de los términos de orden superior ( $\varepsilon_2 u_{4t}$  y  $-\gamma_2 |u|^4 u$ ), y al hecho de que

$\varepsilon_2$  y  $-\gamma_2$  tienen signos contrarios a  $\varepsilon_1$  y  $\gamma_1$ , respectivamente. La existencia de los solitones oscuros obedece a razones análogas.

Posteriormente analizamos numéricamente el comportamiento del SE (18) ante perturbaciones, y vimos que el SE (18) es una solución *semi-estable*. Esto es, ante perturbaciones que incrementen su energía se comporta como una solución estable, mientras que ante perturbaciones que disminuyan su energía se comporta como una solución inestable, y su altura disminuye de manera continua.

A continuación presentamos un análisis variacional que nos permite entender mejor cómo se originan las oscilaciones amortiguadas que se observan al perturbar los SE de la Ec. (7), y vimos que el amortiguamiento es una consecuencia de la emisión de radiación.

Finalmente, analizamos porqué el SE de la Ec. (7) es único, a diferencia de lo que ocurre con la ecuación NLS cúbica, la cual acepta solitones de altura arbitraria. Vimos que la unicidad de este SE es una consecuencia de un delicado balance entre no linealidad y dispersión, el cual puede apreciarse claramente al tomar la transformada de Fourier de la Ec. (7).

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico de la UNAM (DGSCA) su autorización para usar la computadora Origin 2000 durante este trabajo.

## Apéndice A

Veamos ahora cómo obtener la constante M. De (40) se sigue que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{r^2}{M} \right) = \frac{d}{dz} (2A^2 + Tg^2). \quad (A.1)$$

Si ahora expresamos  $A(z)$  y  $w(z)$  en la forma

$$A(z) = A_{es} + \delta A \quad (A.2)$$

$$w(z) = w_{es} + \delta w \quad (A.3)$$

y sustituimos estas expresiones en (A.1), obtenemos

$$\frac{1}{M} \frac{dr^2}{dz} = \frac{d}{dz} (4A_{es}w_{es}\delta A + 2A_{es}^2\delta w + 4A_{es}\delta A\delta w + 2w_{es}\delta A^2 + 2\delta w\delta A^2 + Tg^2). \quad (A.4)$$

De manera similar, sustituyendo (A.2) y (A.3) en la ecuación

$$\varepsilon_1 \frac{A^2}{w} - \gamma_1 w A^4 - \frac{7}{5} \varepsilon_2 \frac{A^2}{w^3} + \frac{8}{15} \gamma_2 w A^6 = K, \quad (A.5)$$

obtenemos

$$n_1 \delta w^2 + n_2 \delta w + n_3 \delta A \delta w + n_4 \delta A + n_5 \delta A^2 = 0, \quad (A.6)$$

donde las funciones  $n_i(A_{es}, w_{es})$  han sido definidas de la siguiente manera:

$$n_1 = -2\varepsilon_1 \frac{A_{es}^2}{w_{es}^3} + \frac{84}{5} \varepsilon_2 \frac{A_{es}^2}{w_{es}^5}, \tag{A.7}$$

$$n_2 = 2\gamma_1 A_{es}^4 + 2\varepsilon_1 \frac{A_{es}^2}{w_{es}^2} - \frac{42}{5} \varepsilon_2 \frac{A_{es}^2}{w_{es}^4} - \frac{16}{15} \gamma_2 A_{es}^6, \tag{A.8}$$

$$n_3 = 8\gamma_1 A_{es}^3 + 4\varepsilon_1 \frac{A_{es}}{w_{es}} - \frac{84}{5} \varepsilon_2 \frac{A_{es}}{w_{es}^4} - \frac{96}{15} \gamma_2 A_{es}^5, \tag{A.9}$$

$$n_4 = 8\gamma_1 A_{es}^3 - 4\varepsilon_1 \frac{A_{es}}{w_{es}} + \frac{28}{5} \varepsilon_2 \frac{A_{es}}{w_{es}^3} - \frac{96}{15} \gamma_2 w_{es} A_{es}^5, \tag{A.10}$$

$$n_5 = 12\gamma_1 A_{es}^2 - \frac{2\varepsilon_1}{w_{es}} + \frac{14}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^3} - 16\gamma_2 w_{es} A_{es}^4. \tag{A.11}$$

A partir de la Ec. (A.6) podemos obtener una expresión para  $\delta w$  en potencias de  $\delta A$ . Conservando sólo los términos de primer y segundo orden, encontramos la siguiente expresión:

$$\delta w = -m_1 \delta A + m_2 \delta A^2, \tag{A.12}$$

donde

$$m_1 = -\frac{n_4}{n_2}, \tag{A.13}$$

$$m_2 = \frac{1}{n_2} \left( \frac{n_3 n_4}{n_2} - \frac{n_1 n_4^2}{n_2^2} - n_5 \right). \tag{A.14}$$

Si ahora sustituimos (A.12) en (A.4) obtenemos (a segundo orden en  $\delta A$ )

$$\frac{1}{M} \frac{dr^2}{dz} = 2(w_{es} - 2m_1 A_{es} + m_2 A_{es}^2) \frac{d}{dz} \times \left[ \delta A^2 + \frac{Tg^2}{2(w_{es} - 2m_1 A_{es} + m_2 A_{es}^2)} \right] \tag{A.15}$$

y si comparamos esta expresión con la que se obtiene en el caso en que  $\varepsilon_2 = \gamma_2 = 0$ , vemos que el término entre paréntesis cuadrados es una aproximación para  $r^2$ , lo cual implica que

$$M = \frac{1}{2(w_{es} - 2m_1 A_{es} + m_2 A_{es}^2)}, \tag{A.16}$$

que es el valor que buscábamos.

### Apéndice B

Para calcular el valor de T empecemos por sustituir (A.2) y (A.3) en (27). Conservando únicamente los términos de primer orden en  $\delta A$  y  $\delta w$  obtenemos

$$w_{es} \delta A' + A_{es} \delta w' \approx a_1 T g \delta A + a_2 T G \delta w + a_3 T g, \tag{B.1}$$

donde

$$a_1 = \frac{2}{\pi} A_{es} \left( \gamma_1 - \frac{16}{9} \gamma_2 A_{es}^2 \right), \tag{B.2}$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi w_{es}^3} \left( \varepsilon_1 - \frac{14}{3} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^2} \right), \tag{B.3}$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \left( \gamma_1 A_{es}^2 - \frac{\varepsilon_1}{w_{es}^2} + \frac{7\varepsilon_2}{3w_{es}^4} - \frac{8}{9} \gamma_2 A_{es}^4 \right). \tag{B.4}$$

Por otra parte, si en (A.12) conservamos únicamente los términos de primer orden en  $\delta A$ , obtenemos

$$\delta w \approx -m_1 \delta A, \tag{B.5}$$

$$\delta w' \approx -m_1 \delta A'. \tag{B.6}$$

Sustituyendo estas expresiones en (B.1), despejando  $g$ , y conservando solamente el término de primer orden, obtenemos

$$g \approx \frac{w_{es} b_2 - A_{es} b_1}{a_3 b_2 T} \delta A', \tag{B.7}$$

donde

$$b_1 = \frac{2A_{es}}{w_{es}} \left( \varepsilon_1 - 2\gamma_1 w_{es}^2 A_{es}^2 - \frac{7}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^2} + \frac{24}{15} \gamma_2 w_{es} A_{es}^4 \right), \tag{B.8}$$

$$b_2 = \frac{A_{es}^2}{w_{es}^2} \left( -\varepsilon_1 - \gamma_1 w_{es}^2 A_{es}^2 + \frac{21}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^2} + \frac{8}{15} \gamma_2 w_{es} A_{es}^4 \right). \tag{B.9}$$

De manera similar, sustituyendo (A.2) y (A.3) en (25), y conservando únicamente el término de primer orden en  $\delta A$ , obtenemos

$$g' = (g_1 - g_2 \frac{b_1}{b_2}) \delta A, \tag{B.10}$$

donde

$$g_1 = \frac{2}{3\pi} \left( \frac{16}{3} \gamma_2 A_{es}^4 - 3\gamma_1 A_{es}^2 - \frac{28}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^4} + \frac{2\varepsilon_1}{w_{es}^2} \right), \tag{B.11}$$

$$g_2 = \frac{8}{3\pi} \frac{A_{es}}{w_{es}^3} \left( \frac{28}{5} \frac{\varepsilon_2}{w_{es}^2} - \varepsilon_1 \right). \tag{B.12}$$

Con (B.7) y (B.10) podemos ahora obtener las siguientes ecuaciones para  $g$  y  $\delta A$ :

$$g'' \approx \frac{a_3 b_2 G T}{E} g, \tag{B.13}$$

$$\delta A'' \approx \frac{a_3 b_2 G T}{E} \delta A, \tag{B.14}$$

donde hemos definido

$$E = w_{es} b_2 - A_{es} b_1, \tag{B.15}$$

$$G = g_1 - g_2 \frac{b_1}{b_2}. \tag{B.16}$$

Resolviendo (B.13) y (B.14) encontramos que

$$g = c_{11} \text{sen}(kz) + c_{12} \text{cos}(kz), \tag{B.17}$$

$$\delta A = c_{21} \text{sen}(kz) + c_{22} \text{cos}(kz), \tag{B.18}$$

donde  $c_{ij}$  son funciones de  $z$  que varían lentamente, y

$$k^2 = -\frac{a_3 b_2 G T}{E}. \quad (\text{B.19})$$

Supondremos ahora que el número de onda y la amplitud se relacionan como en el caso de la ecuación NLS, es decir, consideraremos que

$$k = \frac{\gamma_1}{2} A_{es}^2, \quad (\text{B.20})$$

y de las dos últimas ecuaciones obtenemos una expresión aproximada para  $T$ :

$$T = -\frac{E}{a_3 b_2 G} \frac{\gamma_1^2 A_0^4}{4}. \quad (\text{B.21})$$

## Apéndice C

Para encontrar una expresión analítica para la función  $\bar{g}(z)$ , debemos investigar primero cuál es la forma de  $g(z)$ . Para

ello empezamos por observar que (A.15) y (A.16) implican que

$$r^2 = \delta A^2 + T M g^2. \quad (\text{C.1})$$

Si ahora sustituimos aquí las expresiones (B.17) y (B.18), y tomamos en cuenta que  $c_{12} = c_{21} = 0$  (para ser consistentes con los comportamientos mostrados en las Figs. 4 y 6), podemos ver que  $c_{11} = r(TM)^{-1/2}$  y  $c_{22} = r$ , de manera que (B.17) toma la forma

$$g(z) = \frac{r(z)}{(TM)^{\frac{1}{2}}} \text{sen}(kz). \quad (\text{C.2})$$

Si ahora reemplazamos la función  $\text{sen}(kz)$  que aparece en esta expresión por su valor medio cuadrático  $\pm 2^{-1/2}$  [tomando el signo positivo en los intervalos donde  $\text{sen}(kz) \geq 0$ , y el signo negativo donde  $\text{sen}(kz) < 0$ ] obtenemos la expresión (41).

- 
1. P.K.A. Wai, C.R. Menyuk, Y.C. Lee, and H.H. Chen, *Optics Lett.* **11** (1986) 464.
  2. P.K.A. Wai, H.H. Chen, and Y.C. Lee, *Phys. Rev. A* **41** (1990) 426.
  3. A. Höök and M. Karlsson, *Optics Lett.* **18** (1993) 1388.
  4. N. Akhmediev and M. Karlsson, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 2602.
  5. J. Fujioka and A. Espinosa, *J. Phys. Soc. Japan* **66** (1997) 2601.
  6. J. Herrmann, *Optics Commun.* **87** (1992) 161.
  7. J. Yang, B.A. Malomed, and D.J. Kaup, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1958.
  8. A.R. Champneys and B.A. Malomed, *J. Phys. A* **32** (1999) L547.
  9. A.R. Champneys and B.A. Malomed, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 886.
  10. J. Yang, *Stud. Appl. Math.* **106** (2001) 337.
  11. A.R. Champneys, B.A. Malomed, J. Yang, and D.J. Kaup, *Physica D* **152-153** (2001) 340.
  12. J. Yang, B.A. Malomed, D.J. Kaup and A.R. Champneys, *Math. Comput. Simulat.* **56** (2001) 585.
  13. T. Opatrný, B.A. Malomed and G. Kurizki, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 6137.
  14. S. Trillo, S. Wabnitz, E.M. Wright, and G.I. Stegeman, *Opt. Lett.* **13** (1988) 871.
  15. D. Anderson, *Phys. Rev. A* **27** (1983) 3135.
  16. B.A. Malomed, *Variational methods in nonlinear fiber optics and related fields*, en *Progress in Optics* **43** (2002) 69.
  17. W.L. Kath and N.F. Smyth, *Phys. Rev. E* **51** (1995) 1484.