

## Convección natural en medios porosos y libres: simulación numérica

E. Báez<sup>a</sup>, B. Bermúdez<sup>b</sup> y A. Nicolás<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa  
Av. Michoacán y la Purísima, Col. Vicentina, 09340 México, D.F., México

\*e-mail: anc@xanum.uam.mx

<sup>b</sup>Facultad de Computación, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
14 Sur y San Claudio, CU, Puebla, Pue., México

e-mail: bbj@solarium.cs.buap.mx

Recibido el 11 de diciembre de 2002; aceptado el 21 de mayo de 2003

Se presentan simulaciones numéricas para convección natural en cavidades rectangulares, en general inclinadas, tanto en medios porosos como en medios libres. La modelación matemática se basa en ambos casos en la aproximación de Boussinesq dependiente del tiempo, con la cual se obtiene la estructura de fluidos incompresibles; las ecuaciones de momento están dadas por las ecuaciones de Darcy en medios porosos y por las ecuaciones de Navier-Stokes en medios libres. En los dos casos se considera la formulación en términos de variables función corriente y vorticidad. Los resultados se obtienen con un esquema numérico simple, cuya efectividad depende esencialmente de un proceso iterativo de punto fijo para resolver el sistema no lineal de ecuaciones elípticas que se obtiene al aplicar una discretización temporal adecuada de segundo orden en las ecuaciones que dependen explícitamente del tiempo. El proceso iterativo conduce a la solución de ecuaciones elípticas lineales y simétricas, para las cuales existen eficientes métodos de solución numérica. Los parámetros involucrados en las simulaciones son el número de Rayleigh, la razón geométrica y el ángulo de inclinación de la cavidad.

*Descriptores:* Aproximación de Boussinesq; punto fijo; cavidades rectangulares e inclinadas.

Numerical simulations are presented for natural convection in rectangular tilted cavities for a porous medium and for a homogeneous fluid as well. In both cases the mathematical modeling is based on the time dependent Boussinesq approximation which gives an incompressible fluid structure; the momentum equations are given for the Darcy ones in porous medium and for the Navier-Stokes equations in homogeneous fluid. The formulation in stream function and vorticity variables is considered. The numerical simulations are obtained with a simple numerical scheme whose effectiveness relies mainly on a fixed point iterative process to solve the elliptic nonlinear system that is obtained once a convenient second order time discretization is performed on each equation that depends explicitly in time. The iterative process leads to the solution of symmetric linear elliptic equations for which very efficient numerical solvers exist. The parameters involved in the simulations are the Rayleigh number, the aspect ratio, and the inclination angle of the cavity.

*Keywords:* Boussinesq approximation; fixed point iterative process; tilted rectangular cavities.

PACS: 47.55.Mh; 47.85.-g; 02.60.-x

### 1. Introducción

La aproximación de Boussinesq dependiente del tiempo para fluidos con acoplamiento térmico en un sistema gravitacional tanto en medios porosos como en medios libres, y de la cual el fenómeno de convección natural es un caso particular, se basa en el hecho de que la estructura compresible de dichos fluidos, matemáticamente hablando, se reduce a la estructura incompresible al considerar que la temperatura varía poco y que en consecuencia las variaciones de densidad son despreciables en todas partes excepto en el término de fuerzas de flotación en las ecuaciones de momento. En este trabajo, adicionalmente a esta simplificación incompresible consideramos la simplificación en términos de variables función corriente y vorticidad, con lo cual la restricción de incompresibilidad (ecuación de conservación de masa) se satisface automáticamente; dicha restricción aparece explícitamente en la formulación de variables primitivas y se sabe que no es un problema fácil de abordar numéricamente, (ver Refs. 1 y 2 para algunos detalles en medios libres).

La simplificación en términos de variables función corriente y vorticidad no elude las no-linealidades inheren-

tes de los fenómenos y que se deben al acoplamiento entre las ecuaciones de momento y de energía térmica a través del término convectivo (o de transporte); léase, acoplamiento entre ecuación de función corriente y de temperatura en medios porosos así como entre la ecuación de función corriente con las de vorticidad y temperatura en medios libres. Dichas no-linealidades se mantienen al aplicar una discretización en tiempo de segundo orden en forma implícita. De esta forma se preserva el acoplamiento natural de los fenómenos al considerar todas las variables en el nivel de tiempo que se quiere conocer, incluyendo las que aparecen en las ecuaciones que no dependen explícitamente del tiempo; esto es, no se desacoplan secuencialmente en tiempo las ecuaciones, como por ejemplo en la Ref. 3 para medios porosos.

Con la discretización temporal implícita se obtiene un sistema estacionario no-lineal de ecuaciones elípticas. La no-linealidad y el acoplamiento entre las ecuaciones se manejan apropiadamente mediante un proceso iterativo de punto fijo el cual conduce a resolver en cada iteración problemas estacionarios elípticos lineales, simétricos y desacoplados, para los cuales existen métodos numéricos eficientes ya sea con diferencias finitas o con elemento finito. Para los resultados que

aquí se presentan se emplean esquemas de discretización espacial de segundo orden, incluyendo las condiciones de frontera, lo cual combinado con la discretización de segundo orden en tiempo implica que globalmente el problema discreto es de segundo orden.

El propósito de este trabajo es presentar resultados sobre flujos térmicos que se obtienen con un esquema numérico relativamente simple. Dicha simplicidad permite ahondar en el estudio de dichos flujos tanto en medios porosos como en medios libres en cavidades rectangulares, en general inclinadas; y estudiar así fenómenos relacionados con liberación de calor después de ocurrir un accidente en reactores nucleares, enfriamiento de depósitos con desechos radiactivos, intercambiadores de calor, colectores de energía solar, almacenamiento de granos, procesamiento de alimentos, procesos de secado y fumigación eficientes en silos, flujos geofísicos en estructuras porosas, entre otros. Los parámetros involucrados en las simulaciones son el número de Rayleigh, la razón geométrica (cociente de la altura y la longitud de la cavidad), el ángulo de inclinación de la cavidad y los números de Nusselt promedio y local.

Las condiciones de frontera para la temperatura, en general mixtas (Dirichlet y Neumann), son las que se requieren en diferentes aplicaciones de convección natural, como las que se acaban de mencionar. Dependiendo de la aplicación, es necesario fijar la temperatura en una parte de la frontera (Dirichlet) y especificar el flujo de calor (Neumann) en la otra parte, incluyendo el caso de fijar la temperatura en toda la frontera y el de especificar flujo 0 en paredes que deben estar aisladas.

Los resultados se validan con los reportados en las Refs. 3-7 para medios porosos, y con los de la Ref. 2 para medios libres; en todos ellos se usan métodos diferentes a los que se usan en este trabajo. En la Ref. 3 se resuelve el problema no estacionario aplicando esquemas numéricos de segundo orden en tiempo y cuarto orden en espacio; en la Ref. 4 resuelven el problema estacionario en cavidades rectangulares inclinadas aplicando discretización espacial de segundo orden; en la Refs. 6-7 también se estudian cavidades rectangulares inclinadas pero, a diferencia de la Ref. 4, resuelven el problema no estacionario, en la Ref. 7 se consideran en general condiciones de frontera mixtas para la temperatura; en la Ref. 5 también se resuelve el problema no estacionario en cavidades cuadradas, y se extiende a cavidades cilíndricas [8]. En la Ref. 2 se resuelve la aproximación de Boussinesq en variables primitivas (velocidad y presión), tanto para convección mixta como para convección natural en medios libres, reduciendo el problema a la solución de subproblemas lineales más simples en cada nivel de tiempo mediante una descomposición de operadores.

Además de validar el esquema numérico con una variedad de situaciones diferentes en cavidades en general rectangulares e inclinadas, mostramos que dicho esquema es capaz de alcanzar estados estacionarios como los reportados para el problema estacionario en la Ref. 4 en medios porosos, así como también de obtener resultados en cavidades rectangulares

e inclinadas en medios libres. En ambos casos, actualmente los autores no conocen que resultados similares estén reportados en la literatura, salvo por la Ref. 9 para medios libres en cavidades cuadradas e inclinadas, lo cual junto con la Ref. 4 fueron nuestra inspiración para considerar estas situaciones.

En esta etapa del trabajo no se consideran situaciones relacionadas con cavidades abiertas parcialmente (usualmente en la pared superior), y en consecuencia involucrando un efecto de movimiento en dicha pared, o con condiciones de frontera periódicas en la dirección horizontal como suele ocurrir en los fenómenos de convección mixta en el primer caso y en el problema de Rayleigh-Bernard en el segundo. Sin embargo, resultados parciales para estos fenómenos muestran que ellos pueden abordarse con la metodología que aquí se describe.

## 2. Formulación del problema

Sea  $\Omega \subset R^N (N = 2, 3)$  la región del flujo de un fluido incompresible, viscoso, dependiente del tiempo y térmico, y sea  $\Gamma$  la frontera de dicha región (Fig 1). Considerando las hipótesis de la aproximación de Boussinesq en la termodinámica y efectos térmicos del flujo [10-11]: la variaciones de la densidad son despreciables excepto en el término de fuerza externa gravitacional de las ecuaciones de momento dado por  $\rho \mathbf{g}$ , donde  $\rho$  es la densidad y  $\mathbf{g}$  el vector de la aceleración gravitacional; la densidad  $\rho$  está dada por  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$ , donde  $\rho_0$  y  $T_0$  es la densidad y temperatura de referencia, respectivamente,  $T$  es la temperatura absoluta y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica (dicha expresión para la densidad es una aproximación lineal, a presión  $P$  constante, de la ley de estado dada por  $\rho = \rho(P, T)$ ); en la ecuación de energía térmica se desprecia la disipación de energía mecánica, además la viscosidad  $\mu$ , la expansión térmica  $\beta$ , la conductividad térmica  $\kappa$ , y el calor específico  $c_p$  son todas constantes. Bajo estas hipótesis, esta clase de flujos, en general compresibles, se modela matemáticamente por las ecuaciones adimensionales siguientes con estructura incompresible ((*mp*)=medios porosos, (*ml*)=medios libres):

$$(mp) \begin{cases} t > 0 : \\ \mathbf{u} + \nabla p = Ra \theta \mathbf{e} & \text{en } \Omega, \quad (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \quad (b) \\ \theta_t - \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = f & \text{en } \Omega. \quad (c) \end{cases} \quad (1)$$

$$(ml) \begin{cases} t > 0 : \\ \mathbf{u}_t - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p & \text{en } \Omega, \quad (a) \\ + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \mathbf{e} & \text{en } \Omega, \quad (b) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \quad (b) \\ \theta_t - \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 & \text{en } \Omega, \quad (c) \end{cases} \quad (2)$$

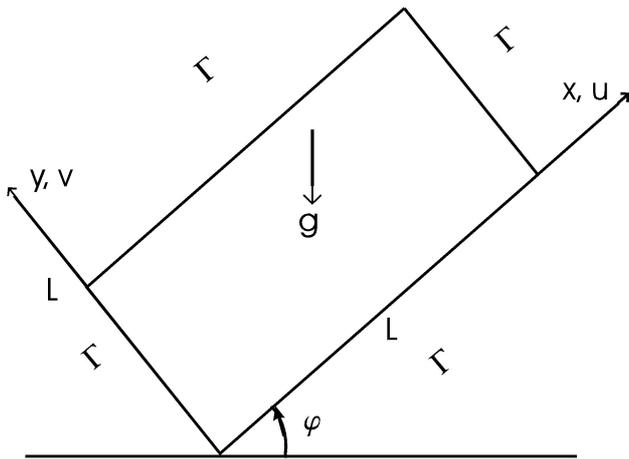


FIGURA 1. Geometría y nomenclatura para la cavidad del flujo.

donde  $\mathbf{u}$ ,  $p$  y  $\theta$  es la velocidad, presión y temperatura del flujo respectivamente. Los parámetros  $Re$ ,  $Ra$  y  $Pr$  son los números de Reynolds, de Rayleigh y de Prandtl respectivamente, y  $\mathbf{e}$  es el vector unitario en la dirección de la aceleración gravitacional.

El acoplamiento entre (2a) and (2c) involucrando  $Re$  corresponde al fenómeno de convección *mixta*; la elección  $Re = 1$  corresponde al de convección *natural*, el cual es el tema de estudio en este trabajo. El caso isotérmico es un caso particular de (2a) – (2c) y no es más que las ecuaciones de Navier-Stokes: solamente las ecuaciones de momento (2a) y la de incompresibilidad (2b) son consideradas, y el lado derecho en (2a), digamos  $\mathbf{f}$ , representa una concentración de fuerzas externas independiente de  $\theta$ .

A manera de aclaración, a continuación se presentan las ecuaciones en medios porosos antes del proceso de adimensionalización y una vez que se considera la aproximación de Boussinesq:

$$\begin{cases} t > 0 : \\ \mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho \mathbf{g}) & \text{en } \Omega & (a) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega & (b) \\ \rho c_p(T_t - \mathbf{u} \cdot \nabla T) - \eta \Delta T = 0 & \text{en } \Omega & (c) \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{g}$  es el vector gravedad dado por  $\mathbf{g} = (0, g)^t$

El sistema adimensional (1) se obtiene de (3) una vez que la densidad  $\rho$  se reemplaza por  $\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$ , donde, como ya fue señalado al inicio de esta sección,  $\rho_0$  y  $T_0$  es la densidad y temperatura de referencia respectivamente. En términos de la adimensionalización se tiene  $\theta = T - T_l/T_l - T_2$ ,  $Ra = (Bkg\beta\rho_0/\kappa\mu)(T_l - T_2)$ , donde  $T_l$  es la temperatura de las paredes laterales y  $T_2$  la de la pared inferior,  $B$  es la altura de la cavidad (se puede observar que la constante de aceleración  $g$  es absorbida en el parámetro  $Ra$  debido al proceso de adimensionalización). Algunos detalles para obtener la adimensionalización (2) pueden verse en la Ref. 11, pág. 218.

Las ecuaciones de momento (1a), (2a) y de temperatura (1c), (2c) deben complementarse con condiciones inicia-

les apropiadas:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega (\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0), & (a) \\ \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega, & (b) \end{cases} \quad (4)$$

y condiciones de frontera, digamos

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{sobre } \Gamma, \quad t \geq 0 (\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0), & (a) \\ B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma, \quad t \geq 0, & (b) \end{cases} \quad (5)$$

donde  $B$  es un operador de frontera para la temperatura el cual puede involucrar condiciones de frontera Dirichlet, Neumann o mixtas.

Restringiendo las Ecs. (1a)–(1c) y (2a)–(2c) a una región  $\Omega$  bidimensional, aplicando el rotacional en ambos lados de estas ecuaciones y tomando en cuenta las relaciones

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (6)$$

donde  $(u_1, u_2) = \mathbf{u}$  y  $\psi$  es la función corriente; entonces, de la componente en la dirección  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  se obtienen los sistemas de ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{cases} t > 0 : \\ \Delta \psi = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} & \text{en } \Omega, & (a) \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma; & \\ \theta_t - \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = f & \text{en } \Omega, & (b) \\ B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} t > 0 : \\ \Delta \psi = \omega & \text{en } \Omega, & (a) \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma; & \\ \omega_t - \nu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{Ra}{PrRe^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \text{en } \Omega, & (b) \\ \omega = \omega_{cf} & \text{sobre } \Gamma; & \\ \theta_t - \gamma \Delta \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0 & \text{en } \Omega, & (c) \\ B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma \end{cases} \quad (8)$$

donde  $1/Re$  se ha reemplazado por el parámetro de viscosidad  $\nu$ , y  $\gamma=1/RePr$ ;  $\omega$  es la vorticidad, la cual de  $\omega \mathbf{k} = -\nabla \times \mathbf{u} = \Delta \psi \mathbf{k}$ , está dada por  $\omega = \partial u_1 / \partial y - \partial u_2 / \partial x$ ; la vorticidad requiere también de una condición inicial  $\omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x})$  la cual debe satisfacer  $\partial u_{10} / \partial y - \partial u_{20} / \partial x$ .

Para cavidades inclinadas que se obtienen al rotar un ángulo  $\phi$  en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, las Ecs (7a) y (8b) se modifican y están dadas respectivamente por

$$\Delta \psi = -Ra \left( \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad \text{en } \Omega \quad (7'a)$$

$$\begin{aligned} \omega_t - \nu \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{Ra}{PrRe^2} \\ \times \left( \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (8'b)$$

Los sistemas (7) y (8) representan la aproximación de Boussinesq en variables función corriente y vorticidad en medios porosos y medios libres respectivamente (con (7'a) y (8'b) en lugar de (7a) y (8b) para cavidades inclinadas). En ambos casos, por (6), las condiciones de incompresibilidad (1b) y (2b) se satisfacen automáticamente en  $\Omega$ .

En medios libres el hecho de que la condición de incompresibilidad se satisfaga automáticamente se puede ver como una ventaja en contra de la desventaja de que no se tienen condiciones de frontera para la vorticidad; en la frontera  $\Gamma$ ,  $\psi$  está sobredeterminada [12-13]: además de conocerse  $\psi|_{\Gamma}$  también se conoce  $(\partial\psi/\partial n)|_{\Gamma}$  pero no se tienen condiciones

de frontera para  $\omega$  (al menos no a la mano). En la Ref. 13 se da un procedimiento para encontrar la condición de frontera para  $\omega$  en regiones bidimensionales arbitrarias. En este trabajo se opta por la alternativa dada en la Refs. 14 y 15 para cavidades rectangulares que consiste en obtener condiciones de frontera  $\omega$  en términos de  $\psi$  mediante una expansión de Taylor en la frontera (hacia el interior) usando la relación (8a). Para fluidos viscosos la velocidad  $\mathbf{u}$  es  $\mathbf{0}$  en paredes sólidas, por (6),  $\psi$  es constante y consideramos dicha constante como 0. En convección natural todas las paredes son sólidas, en consecuencia se obtienen las relaciones siguientes para las condiciones de frontera  $\omega_{cf}$ , dadas implícitamente por valores (todavía desconocidos) de  $\psi$  en el interior

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, y, t) = \frac{1}{2h_x^2}[8\psi(h_x, y, t) - \psi(2h_x, y, t)] + O(h_x^2) \\ \omega(a, y, t) = \frac{1}{2h_x^2}[8\psi(a - h_x, y, t) - \psi(a - 2h_x, y, t)] + O(h_x^2) \\ \omega(x, 0, t) = \frac{1}{2h_y^2}[8\psi(x, h_y, t) - \psi(x, 2h_y, t)] + O(h_y^2) \\ \omega(x, b, t) = \frac{1}{2h_y^2}[8\psi(x, b - h_y, t) - \psi(x, b - 2h_y, t)] + O(h_y^2), \end{array} \right. \quad (9)$$

donde  $h_x$  y  $h_y$  denotan los pasos de discretización espacial en las direcciones  $X$  y  $Y$  respectivamente. En medios porosos al no estar presente la vorticidad, solamente hay que tratar con condiciones de frontera para  $\psi$  y  $\theta$ ; por las razones de viscosidad mencionadas anteriormente  $\psi = 0$  sobre  $\Gamma$  y las condiciones de frontera para  $\theta$  están dadas en el operador  $B$  y serán especificadas explícitamente en la sección de Resultados Numéricos (debe tomarse en cuenta que en medios porosos el efecto viscoso está presente en el parámetro de viscosidad  $\mu$  en (3a), que posteriormente es absorbido en  $Ra$ ).

### 3. Esquema numérico

Para la discretización respecto al tiempo, las derivadas  $\theta_t$  y  $\omega_t$  que aparecen en (7b) y en (8b)–(8c) respectivamente, se aproximan mediante el esquema de segundo orden

$$f_t(\mathbf{x}, (n + 1)\Delta t) \approx \frac{1.5f^{n+1} - 2f^n + 0.5f^{n-1}}{\Delta t}, \quad n \geq 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

donde  $\Delta t$  denota el paso de tiempo y  $f^r$  es una aproximación para  $f(\mathbf{x}, r\Delta t)$ , con  $f$  una función suficientemente suave.

Los sistemas discretos en tiempo que resultan son

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi^{n+1} = -Ra \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x} & \text{en } \Omega, \\ \psi^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\theta^{n+1} - \Delta\theta^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\theta^{n+1} = f_\theta, \quad n \geq 1, & \text{en } \Omega, \\ B\theta^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi^{n+1} = \omega^{n+1} & \text{en } \Omega, \\ \psi^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\omega^{n+1} - \nu\Delta\omega^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\omega^{n+1} = \frac{Ra}{PrRe^2} \frac{\partial\theta}{\partial x} + f_\omega, \quad n \geq 1, & \text{en } \Omega, \\ \omega^{n+1} = \omega_{cf} & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\theta^{n+1} - \gamma\Delta\theta^{n+1} + \mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla\theta^{n+1} = f_\theta, \quad n \geq 1, & \text{en } \Omega, \\ B\theta^{n+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{array} \right. \quad (12)$$

donde  $\alpha = 1.5/\Delta t$ ,  $f_\omega = 2\omega^n - 0.5\omega^{n-1}/\Delta t$ ,  $f_\theta = 2\theta^n - 0.5\theta^{n-1}/\Delta t$ . En (12),  $\omega_{cf}$  denota la condición de frontera de la vorticidad dada por (9); en (11) y (12),  $B$  denota un operador de frontera que en general involucra condiciones de frontera de tipo mixto (Dirichlet en una parte de la frontera y Neumann en la otra). Las componentes de  $u_1$  y  $u_2$  de  $\mathbf{u}$ , en términos de  $\psi$ , están dadas por(6).

Si renombramos  $(\omega^{n+1}, \theta^{n+1}, \psi^{n+1})$  como  $(\omega, \theta, \psi)$ , entonces en cada nivel de tiempo resolvemos los sistemas estacionarios de ecuaciones elípticas no lineales

$$\begin{cases} \Delta\psi = -R_a \frac{\partial\theta}{\partial x} & \text{en } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\theta - \Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = f_\theta & \text{en } \Omega, \\ B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Delta\psi = \omega & \text{en } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\omega - \nu\Delta\omega + \mathbf{u} \cdot \nabla\omega = \frac{R_a}{PrRe^2} \frac{\partial\theta}{\partial x} + f_\omega & \text{en } \Omega, \\ \omega = \omega_{cf} & \text{sobre } \Gamma; \\ \alpha\theta - \gamma\Delta\theta + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = f_\theta & \text{en } \Omega, \\ B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (14)$$

Para obtener  $(\psi^1, \theta^1, \omega^1)$  en (11) y en (12) se aplica una aproximación de primer orden para la derivada temporal a través de una subsucesión con un paso de tiempo menor para mantener segundo orden en exactitud; también se obtienen sistemas estacionarios de la forma (13) y (14).

Para resolver sistemas de la forma anterior se aplica una variante de otros métodos que han mostrado ser eficientes para flujos dados por las ecuaciones de Navier-Stokes y la aproximación de Boussinesq en variables primitivas, [2,16].

Denotando por

$$\Theta(\theta, \psi) \equiv (\alpha I - \Delta\theta) + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta - f_\theta \quad \text{en } \Omega,$$

entonces el sistema (13) es equivalente a

$$\begin{cases} \Theta(\theta, \psi) = 0 & \text{en } \Omega, \quad B\theta = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ \Delta\psi = -R_a \frac{\partial\theta}{\partial x} & \text{en } \Omega, \quad \psi = 0 \quad \text{sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (15)$$

y, (15) lo resolvemos mediante el proceso iterativo de punto fijo

$$\begin{cases} \text{Con } (\theta^0, \psi^0) = (\theta^n, \psi^n) \text{ conocidos, resolvemos hasta obtener convergencia en } \theta \\ \theta^{m+1} = \theta^m - \lambda(\alpha I - \Delta)^{-1} \Theta(\theta^m, \psi^m) & \text{en } \Omega, \quad B\theta^{m+1} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma; \\ \Delta\psi^{m+1} = -R_a \frac{\partial\theta^{m+1}}{\partial x} & \text{en } \Omega, \quad \psi^{m+1} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad \lambda > 0, \\ \text{y tomamos } (\theta^{n+1}, \psi^{n+1}) = (\theta^{m+1}, \psi^{m+1}); \end{cases} \quad (16)$$

Por otro lado, la expresión para  $\theta^{m+1}$  en (16) es equivalente a

$$\begin{cases} (\alpha I - \Delta)\theta^{m+1} = (\alpha I - \Delta)\theta^m - \lambda\Theta(\theta^m, \psi^m) & \text{en } \Omega, \\ B\theta^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del problema original involucra en cada nivel de tiempo, y en cada iteración del método iterativo, la solución de dos problemas elípticos lineales y simétricos asociados a los operadores  $\Delta$  y  $\alpha I - \Delta$ , ya que gracias al proceso iterativo el término no simétrico (de hecho anti-simétrico)  $\mathbf{u} \cdot \nabla\theta$  es absorbido en el lado derecho.

La solución del sistema (14) en medios libres se realiza también mediante un proceso iterativo de punto fijo de la forma (16), una vez que consideramos  $\Theta(\theta, \psi)$  con  $-\gamma\Delta\theta$  en lugar de  $-\Delta\theta$ , definiendo para la vorticidad

$$R(\omega, \psi) \equiv \alpha\omega - \nu\Delta\omega + \mathbf{u} \cdot \nabla\omega - f_\omega \quad \text{en } \Omega,$$

y observando que la convergencia simultánea en  $\theta$  y  $\omega$  implica la convergencia en  $\psi$ . Con lo cual se concluye que la solución del problema original conduce a la solución de tres problemas elípticos lineales y simétricos: uno asociado al operador  $\Delta$ , otro para  $\alpha I - \nu\Delta$  y otro para  $\alpha I - \gamma\Delta$ . Un aspecto distintivo en medios libres respecto a medios porosos es que

el método iterativo para la vorticidad tiene que extenderse hasta la frontera para poder construir las condiciones de frontera dadas implícitamente en términos de valores interiores de  $\psi$ , en (9).

Para la solución de problemas elípticos lineales y simétricos existen resolutores eficientes ya sea mediante diferencias finitas o elemento finito, al menos mientras se consideren regiones rectangulares. En este trabajo la discretización espacial se realiza con esquemas de diferencias finitas de segundo orden para aproximar las primeras y segundas derivadas en  $\psi$ ,  $\theta$  y  $\omega$ , obteniéndose sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, los cuales pueden resolverse utilizando un método adecuado de álgebra lineal numérica; en nuestro caso utilizamos el método SOR por bloques y el paquete Fishpack [17]. Es notorio mencionar que aún cuando Fishpack efectúa todo el proceso de discretización en diferencias finitas (con opciones de segundo y cuarto orden) es considerablemente rápido y no hay ventaja significativa al usar un resolutor del sistema algebraico (como SOR) al cual se le da la matriz del problema discreto. Esto es debido a que después del proceso de discretización el resolutor para el sistema algebraico que usa Fishpack se basa en un método directo de reducción cíclica eficiente [18].

Por último recordamos que para el estudio de convección natural en medios libres se tiene que elegir  $Re = 1$ , lo cual implica que  $\gamma = 1/Pr$ , y para los experimentos numéricos que siguen consideramos  $Pr = 0.71$  lo cual corresponde a suponer que la cavidad en estudio aproximadamente está llena de aire.

#### 4. Resultados numéricos

Como se sabe, en la parte de la frontera con condiciones de frontera Neumann la solución tiene que determinarse también y en consecuencia los operadores diferenciales tienen que aproximarse en esta parte. En nuestro caso, el operador  $\Delta$  se restringe simplemente a su contribución unidimensional correspondiente; las derivadas de primer orden tanto de  $\psi$  como de  $\omega$  y  $\theta$  se aproximan usando (10), considerando variación espacial hacia atrás y tomando en cuenta que si la variación es hacia adelante, los signos cambian. Las derivadas normales de la condición de frontera Neumann para  $\theta$  pueden aproximarse con diferencias centradas.

En todos los casos que se reportan, la temperatura inicial y vorticidad inicial están dadas por  $\theta(\mathbf{x}, 0) = 0$  y  $\omega(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Para el método iterativo se usa  $\lambda = 0.7$  y tolerancia de convergencia  $10^{-7}$ , este mismo valor también se usa en el error relativo en tiempo (ver Ref. 15, pág. 324), para alcanzar el estado estacionario. Los parámetros restantes: tamaño de los pasos de discretización espaciales  $h_x, h_y$  y temporal  $\Delta t$  (denotaremos simplemente por  $h$  cuando  $h_x = h_y$ ); número de Rayleigh  $Ra$ ; ángulo  $\phi$ ; así como la altura(o longitud) de la cavidad cuando sea diferente de 1 (cavidades rectangulares) se mencionarán en cada caso bajo estudio. En adelante se describirán solamente las condiciones de frontera de la temperatura ya que por lo mencionado en la Sec. 2, al estar considerando fluidos viscosos la función corriente  $\psi$  siempre es 0 en la frontera  $\Gamma$  de la cavidad  $\Omega$ , por estar conformada dicha frontera con paredes sólidas (cavidad cerrada).

##### 4.1. Medios porosos

4.1.1.  $Ra = 1000, h = 1/40, \Delta t = 0.0002$ , condiciones de frontera Dirichlet:

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \text{sobre } \Gamma|_{x=0,1}, \quad \theta = -1 \quad \text{sobre } \Gamma|_{y=0}, \\ \theta = \theta_A \quad \text{sobre } \Gamma|_{y=1}; \end{aligned}$$

donde  $\theta_A$  denota el valor en la pared superior de la cavidad.

Debido a la geometría del dominio así como a las condiciones de frontera dadas para  $\theta$  y para  $\psi$ , esperamos obtener simetría en la gráfica de  $\theta$  y antisimetría en la de  $\psi$  alrededor de la línea  $x = 1/2$ , es decir:

$$\begin{cases} \theta(x, y, t) = \theta(1 - x, y, t), & 0 \leq x \leq 1/2, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \psi(x, y, t) = -\psi(1 - x, y, t), & 0 \leq x \leq 1/2, \quad 0 \leq y \leq 1; \end{cases}$$

de donde, para  $0 \leq y \leq 1$  y  $x = 1/2$ :

$$\begin{cases} \psi = 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Consideramos el caso  $\theta_A = -0.5$ ; entonces, las paredes laterales de la cavidad se encuentran a mayor temperatura que las paredes inferior y superior por lo que el calentamiento ocurre a través de las paredes laterales. También debe observarse que el fluido se encuentra a mayor temperatura en la tapa que en la base. Para este caso se muestran las características del flujo en términos del número adimensional de Nusselt el cual mide la transferencia de calor, por convección, entre una superficie (pared) sólida y el fluido con el cual se encuentra en contacto. Se distingue entre número de Nusselt local  $Nu$  y número de Nusselt promedio  $\overline{Nu}$ . El número de Nusselt local en la pared superior, inferior y lateral, en cada nivel de tiempo, está dado respectivamente por

$$\begin{aligned} Nu &= \frac{1}{\theta_A - \bar{\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x,y=1)}, \\ Nu &= \frac{-1}{-1 - \bar{\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x,y=0)} \quad \text{y} \\ Nu &= \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x=0,y)}; \end{aligned}$$

el número de Nusselt promedio  $\overline{Nu}$  representa la transferencia de calor total sobre toda la pared para cada nivel de tiempo, es decir, es un promedio integral de todos los números de Nusselt locales sobre toda la pared en cada nivel de tiempo, por ejemplo, para la pared lateral izquierda  $\overline{Nu} = \int_0^1 (1/\bar{\theta})(\partial\theta/\partial y)|_{(x=0,y)} dy$ .

Se muestran los flujos a tiempos finales  $T$ 's a  $T = 0.003, 0.008, 0.016, 0.038$  y comparamos con la Ref. 3] (en ésta también se consideran los casos  $\theta_A = +0.5$  y  $\theta_A = 0$ , los cuales también se obtienen correctamente con nuestro método); a  $T = 0.038$  el flujo ya es estacionario, esto es, ya no cambia para tiempos posteriores. Estos resultados se muestran sucesivamente en las Figs. 2, 3, 4 y 5; por la antisimetría en  $\psi$  y la simetría en  $\theta$  solamente se muestra la mitad izquierda de la cavidad, debe tomarse en cuenta que respecto a  $\psi$  los contornos en la mitad derecha tienen la misma forma pero se obtienen con valores de contorno que tienen signos opuestos a los correspondientes de la izquierda. La Fig. 6 muestra el número de Nusselt promedio en las paredes superior, inferior y lateral en el intervalo de tiempo  $[0, 0.04]$ . Las Figs. 7, 8 y 9 muestran los números locales de Nusselt en dichas paredes a los tiempos finales  $T$ 's mencionados. Todos estos resultados concuerdan satisfactoriamente con los reportados en la Ref. 3; a continuación se hace una descripción de ellos.

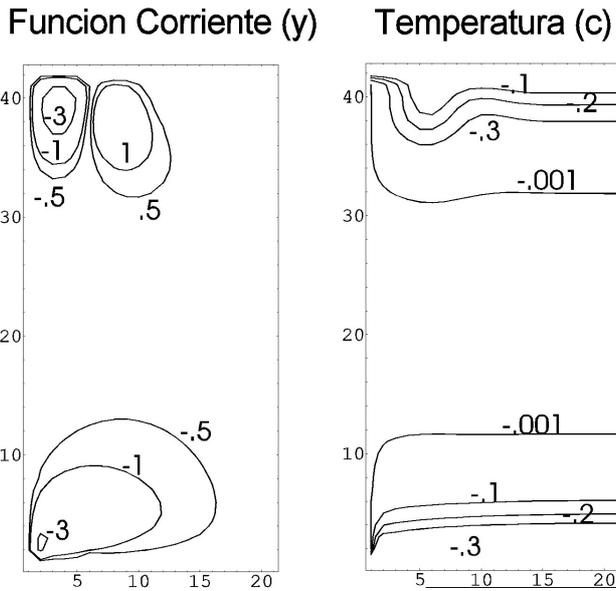


FIGURA 2. Contornos de la función corriente y de la temperatura para  $t = 0.003$ .

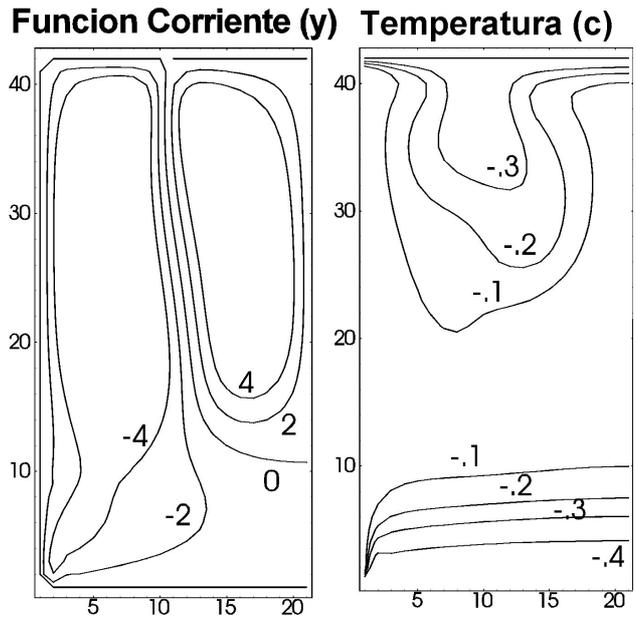


FIGURA 4. Contornos de la función corriente y de la temperatura para  $t = 0.016$ .

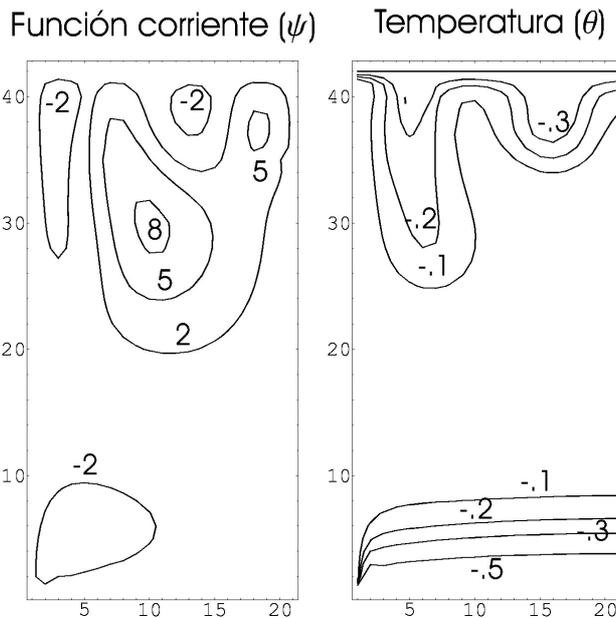


FIGURA 3. Contornos de la función corriente y de la temperatura para  $t = 0.008$ .

En la Fig. 2 se muestran los contornos de la función corriente y de la temperatura cuando comienza a desarrollarse el flujo, específicamente al tiempo final  $T = 0.003$ . El fluido se enfría en las superficies superior e inferior y se calienta en las paredes. La gráfica de la función corriente muestra que el flujo comienza a desarrollarse en las esquinas. La circulación del fluido, en la parte superior, comienza como pequeñas burbujas de fluido frío que caen, alejándose de la pared superior hacia el cuerpo principal del mismo, el cual se encuentra a mayor temperatura; este enfriamiento y calentamiento provo-

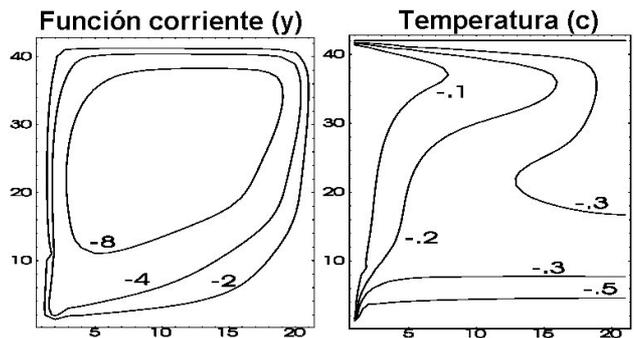


FIGURA 5. Contornos de la función corriente y de la temperatura para  $t = 0.038$ .

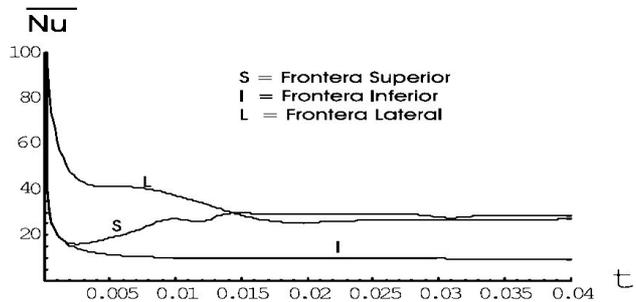


FIGURA 6. Número de Nusselt promedio.

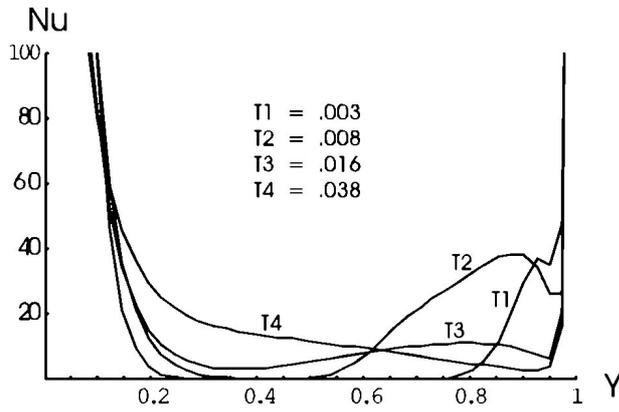


FIGURA 7. Número de Nusselt a lo largo de la pared  $x = 0$ .

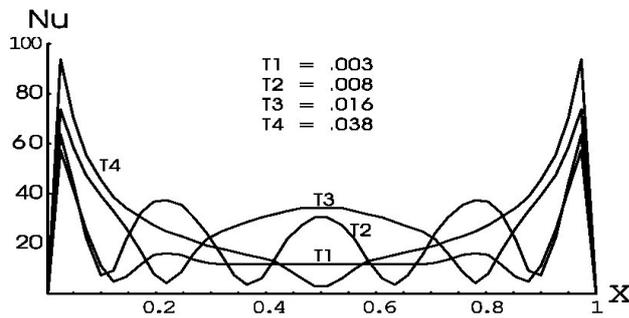


FIGURA 8. Número de Nusselt a lo largo de la pared  $y = 1$ .

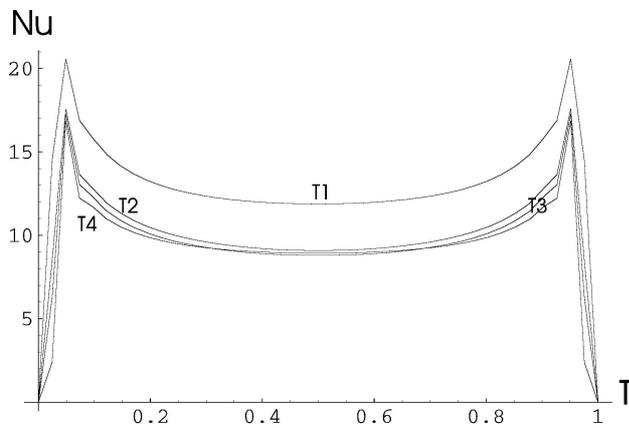


FIGURA 9. Número de Nusselt a lo largo de la pared  $y = 0$ .

ca que la circulación se produzca en sentido negativo (en el sentido de las manecillas del reloj) en la esquina superior izquierda y, debido a la antisimetría de la función corriente, en el sentido positivo (en el sentido contrario a las manecillas del reloj) en la esquina superior derecha, a medida que el fluido que es calentado asciende cerca de la pared; muy cerca de estas burbujas se forma otro movimiento en contrasentido, respectivamente a cada una de ellas, a medida que el fluido que ha sido enfriado por la pared superior desciende, alejándose de ésta. Al mismo tiempo, en la pared inferior, se

producen burbujas que giran en sentido negativo en la esquina izquierda y positivo en la esquina derecha.

La circulación es más lenta en los vórtices de las esquinas inferiores que en los de las esquinas superiores, lo cual se debe a que el fluido más frío y denso se encuentra debajo del fluido más caliente, con lo cual se inhibe el flujo, mientras que en los vórtices de la esquina superior, el fluido más frío está sobre el fluido tibio, lo cual incrementa la circulación.

Debido al calor que ingresa desde las paredes laterales, los vórtices en las esquinas inferiores se extienden hacia arriba abarcando una mayor parte de la cavidad que aquella correspondiente a la de los vórtices de las esquinas superiores pues su crecimiento se ve limitado por la pared superior.

De igual manera la gráfica para la temperatura muestra el hecho de que el fluido comienza a enfriarse cerca de las pared superior e inferior mientras conserva una temperatura más cálida cerca de las paredes y en el centro de la cavidad.

Al comparar este resultado con el correspondiente en la Ref. 3 observamos ciertas diferencias, las cuales básicamente se relacionan con el tiempo en que se alcanzan los mismos gráficos. Cuando  $T = 0.003$  obtenemos una distribución para la función corriente y la temperatura similar a la correspondiente en la Ref. 3 cuando  $T = 0.004$ . Esta diferencia puede deberse al hecho de que en la Ref. 3 la ecuación de temperatura se desacopla secuencialmente en tiempo como ya fue señalado en la Introducción.

En la Fig. 3, la gráfica de la función corriente muestra que se ha formado otro par de vórtices adicionales a los anteriores, los cuales han continuado desarrollándose. Las celdas superiores que se formaron inicialmente han crecido, alargándose y cayendo hacia el centro de la cavidad donde se encuentra el fluido menos frío; mientras que los vórtices inferiores también crecen, aunque de manera más lenta.

La distribución de temperatura muestra que el fluido tibio que se encuentra cerca de las paredes y en el centro de la cavidad tiende a elevarse, reemplazando de esta forma al fluido frío que surge de la pared superior.

En un tiempo posterior, al continuar desarrollándose el flujo, (Fig. 4) los vórtices provenientes de las esquinas superior e inferior izquierdas se colapsan en una celda a lo largo de la pared, teniendo su contraparte, debido a que  $\psi$  es antisimétrica, en la mitad derecha. Estas celdas continúan desarrollándose y creciendo con lo cual empujan a las celdas restantes hacia el centro de la cavidad. La gráfica correspondiente de la temperatura indica que el fluido más frío proveniente de la superficie superior sustituye al fluido tibio que se encuentra en el centro de la cavidad, ocupando ahora una mayor porción de la misma.

En la Fig. 5 las celdas laterales han seguido creciendo hasta lograr vencer a los otros vórtices, con lo cual sólo se tienen dos celdas, una a cada lado de la línea central, circulando en sentidos opuestos. En la gráfica de la temperatura, ésta se ha estabilizado y el fluido es ahora frío en el centro de la cavidad y disminuyendo conforme nos acercamos hacia las paredes superior o inferior, mientras que la temperatura aumenta si estamos cerca de las paredes laterales, las cuales

se mantienen cálidas. A este tiempo final  $T = 0.038$  el flujo ya no cambia respecto al tiempo, esto es, se ha alcanzado el estado estacionario.

La Fig. 6 presenta la gráfica del número de Nusselt promedio desde  $t = 0$  a  $T = 0.04$  a lo largo de cada una de las paredes que limitan la cavidad, para estas condiciones que estamos considerando. Por simetría de las paredes laterales, ambas se encuentran a temperatura  $\theta = 0$ , se analiza solamente la pared lateral izquierda.

Como se observa de la gráfica, tanto en la pared inferior como en la superior, el número de Nusselt promedio inicialmente es infinito, lo cual se debe a la discontinuidad de la temperatura en estas superficies, mientras que en las paredes el número de Nusselt promedio también es infinito al principio debido a que la temperatura promedio del fluido es la misma que la de la pared. A lo largo de cada superficie observamos que el número de Nusselt promedio decrece conforme se desarrolla el flujo, sin embargo, en la pared superior presenta un aumento cuando los vórtices mayores vencen a los pequeños, y este incremento es el resultado de las velocidades mayores que se alcanzan asociadas con los vórtices más grandes.

En la Fig. 7 se muestran los números locales de Nusselt a lo largo de la pared lateral ( $x = 0$ ) en cuatro tiempos diferentes; observamos que los valores son muy grandes cerca de la pared inferior, porque el flujo que se encuentra sobre esta superficie choca contra la pared y se vuelve hacia arriba, mientras que la parte superior de la pared muestra el efecto provocado por los vórtices que inicialmente se desarrollan en la esquina,  $t = 0.003$  y  $t = 0.008$ , de tal forma que el fluido tiende a fluir hacia el centro de la pared; en tiempos posteriores,  $t = 0.016$  y  $t = 0.038$ , éste tiende a disminuir debido a que el vórtice de la esquina inferior crece hasta llenar la mitad de la cavidad, con lo que el número de Nusselt decrece uniformemente cuando el fluido se eleva desde el fondo de la cavidad.

A lo largo de la pared superior ( $y = 1$ ) (Fig. 8) los números locales de Nusselt son grandes cerca de las paredes laterales, debido a que la corriente asciende por la pared y choca con la superficie superior. Cuando  $t = 0.008$  se crean vórtices secundarios hacia la cuarta parte de la tapa que se van alejando de ésta, lo cual repercute en altos y bajos números de Nusselt respectivamente.

En la pared inferior ( $y = 0$ ) (Fig. 9) los valores del número local de Nusselt son notoriamente más pequeños y estables, ya que el flujo es relativamente lento en el fondo de la cavidad y paralelo a ésta, y los valores más altos se alcanzan cerca de la pared, lo cual se debe a que la velocidad del flujo en esa zona toma sus valores más altos.

Todos los resultados que siguen (incluyendo los de medios libres) en general corresponden a cavidades rectangulares inclinadas con condiciones de frontera mixtas para la temperatura: Dirichlet (temperatura fija) en unas paredes y Neumann (flujo fijo) en las otras, de hecho se considera flujo nulo lo cual equivale a que las paredes son adiabáticas (aisladas). Bajo estas condiciones no es de esperarse que se con-

serven las propiedades de antisimetría y simetría para la función corriente y para la temperatura, respectivamente. En las paredes adiabáticas las isoterms llegan perpendiculares, lo cual es consistente con la propiedad geométrica del gradiente (de temperatura) de ser perpendicular a la normal de la pared adiabática.

4.1.2.  $Ra = 100$  ( $h = 1/32, \Delta t = 0.0002$ ) y  $Ra = 1000$  ( $h = 1/70, \Delta t = 0.00001$ ), condiciones de frontera mixtas en una cavidad inclinada:

$$\{\theta = 0.5 \text{ sobre } \Gamma|_{x=0}, \quad \theta = -0.5 \text{ sobre } \Gamma|_{x=1};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma|_{y=0,1}.$$

En las Figs. 10-12 se muestran los resultados para este caso los cuales concuerdan con los reportados en la Ref. 6 para todos los ángulos considerados. Nuestros resultados fueron obtenidos como estados estacionarios del problema no estacionario con criterio de paro para el error relativo en tiempo de  $10^{-7}$ ; con esta tolerancia, los tiempos finales para alcanzar dicho estado estacionario son, respectivamente  $T = 0.24$ ,  $T = 0.24$ ,  $T = 0.234$ . La Fig. 13 muestra un resultado para una cavidad vertical de razón geométrica 2 (altura 2 en el eje  $Y$  y longitud 1 en  $X$ ) con  $h_x = 1/32$  y  $h_y = 1/64$ , ángulo de inclinación  $\phi = 130$  grados y tiempo final  $T = 0.2962$  para alcanzar el estado estacionario. La Fig. 14 muestra el resultado para  $Ra = 1000$  también con ángulo de inclinación  $\phi = 130$ , el cual concuerda con el reportado en la Ref. 6. De los datos se observa que los tamaños de los pasos de discretización  $h$  y  $\Delta t$  son considerablemente más pequeños que para  $Ra = 100$ . Las gráficas de la función corriente muestran que se obtiene una sola celda circulante en toda la cavidad; además las gráficas corroboran que no existe antisimetría en la función corriente ni simetría en la gráfica de la temperatura, como era de esperarse. Hacemos notar que el resultado de la Fig. 10 con cero inclinación también coincide con el que se muestra en la Ref. 5 con temperatura fija en las paredes izquierda y derecha ligeramente diferentes ( $\theta = 1$  en la pared izquierda y  $\theta = 0$  en la derecha); además dicha coincidencia prevalece con el resultado, con estado estacionario en

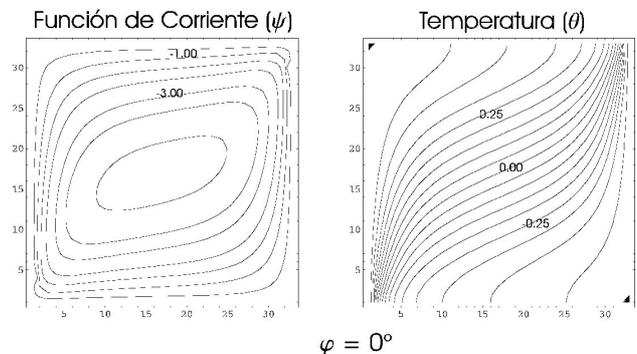


FIGURA 10.

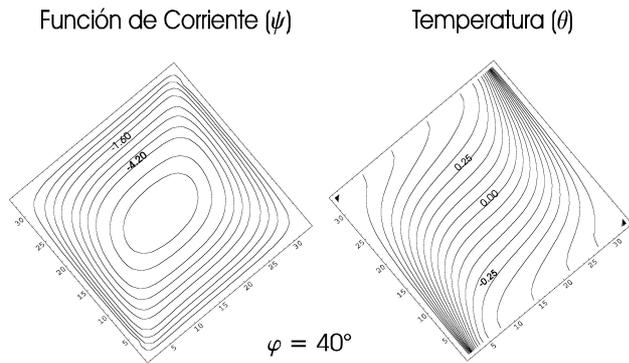


FIGURA 11.

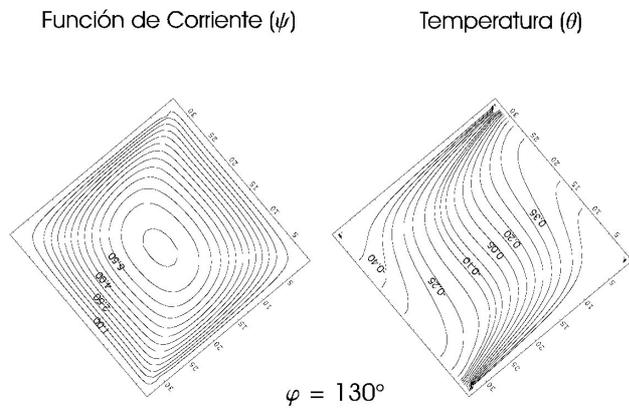


FIGURA 12.

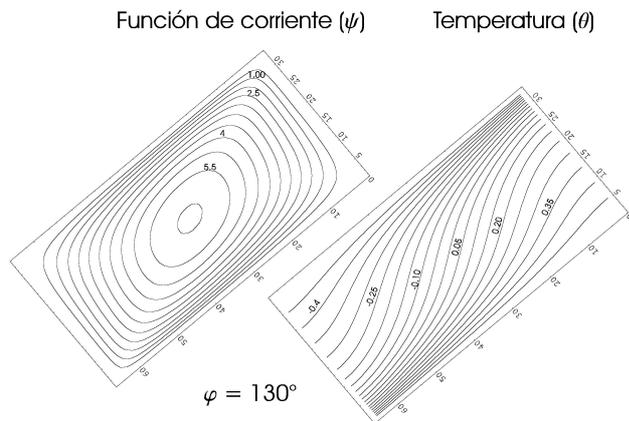


FIGURA 13.

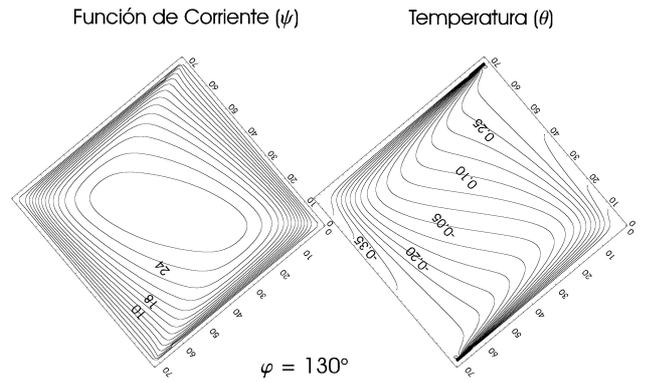


FIGURA 14.

$T = 0.094$ , que se obtiene del código que no involucra el efecto de inclinación.

A continuación una explicación respecto al ángulo de inclinación: Por ejemplo, consideremos la Fig. 10 que no está inclinada ( $\phi = 0$ ) y la Fig. 12 que está inclinada 130 grados; los rótulos de los ejes empiezan desde el origen centrado en la esquina inferior izquierda como se aprecia en la Fig. 10, en la Fig. 12 dicho origen, con los respectivos rótulos de los ejes, se encuentra ahora en la posición tal que ha girado (rotado) 130 grados. Esto significa que la cavidad está inclinada 130 grados en el sentido positivo.

De aquí en adelante se dan pocos detalles sobre los flujos ya que serán autoexplicatorios en base a las explicaciones anteriores.

4.1.3. *Ra = 100; condiciones de frontera mixtas en una cavidad inclinada:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma|_{x=0,1}, \quad \theta = 1. & \text{sobre } \Gamma|_{y=0}, \\ \theta = 0. & \text{sobre } \Gamma|_{y=1}. \end{cases}$$

Estas condiciones de frontera mixtas con paredes laterales adiabáticas difieren de las consideradas en 4.1.2., donde las paredes adiabáticas son la superior y la inferior, y las hemos elegido como punto de comparación con los resultados reportados en la Ref. 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cavidad cuadrada: } h = \frac{1}{30}, \quad \Delta t = 0.0175. \end{array} \right.$$

El resultado que se muestra en la Fig. 15 con los datos anteriores y ángulo de inclinación  $\phi = 30$  grados coincide con el que se reporta en la Ref. 4, salvo que el círculo central en la función corriente que en la Ref. 4 se obtiene con el valor de contorno 0.65 en nuestro caso se obtiene con 0.63; este “estado estacionario” se alcanza en  $T = 17.5$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cavidad rectangular (razón geométrica } \frac{2}{3} \text{)} : \end{array} \right.$$

$$h_x = \frac{1}{45}, h_y = \frac{1}{30}, \Delta t = 0.004.$$

Función de Corriente ( $\psi$ )

Temperatura ( $\theta$ )

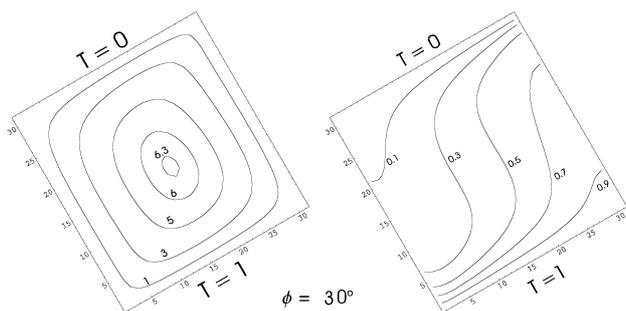


FIGURA 15.

El resultado con los datos anteriores y ángulo de inclinación  $\phi = 10$  grados se muestra en la Fig. 16, con estado estacionario en  $T = 0.24$ ; cualitativamente hay coincidencia con la Ref. 4, pag. 747, pero ahí se considera una razón geométrica de  $\frac{1}{3}$ , es decir, una cavidad de altura 3 (contra 1 en la longitud horizontal) mientras que la longitud horizontal en nuestro caso es  $\frac{3}{2}$ . La coincidencia de las isotermas es perfecta, más no así con las líneas de corriente las cuales para que tengan la misma estructura que las de la Ref. 4 deben considerarse valores de contorno diferentes (los de [4] son  $\{-0.5, -1.0, -1.4, 0.5, 1.0, 1.9\}$ ). Se muestra este resultado y no el correspondiente a la razón geométrica de [4] ya que en tal situación obtenemos más celdas (función corriente) y más ondas (temperatura).

4.2. Medios libres

4.2.1.  $Ra = 100000, h = 1/32, \Delta t = 0.0001$ , condiciones de frontera mixtas en una cavidad inclinada:

$$\begin{cases} \theta = 0.5 & \text{sobre } \Gamma|_{x=0}, & \theta = -0.5 & \text{sobre } \Gamma|_{x=1}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma|_{y=0,1}. \end{cases}$$

Estas condiciones de frontera corresponden a las mismas del caso 4.1.2 en medios porosos, lo cual es con la finalidad

Función de corriente ( $\psi$ )

Temperatura ( $\theta$ )

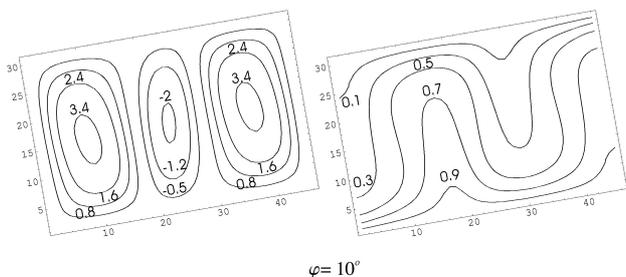


FIGURA 16.

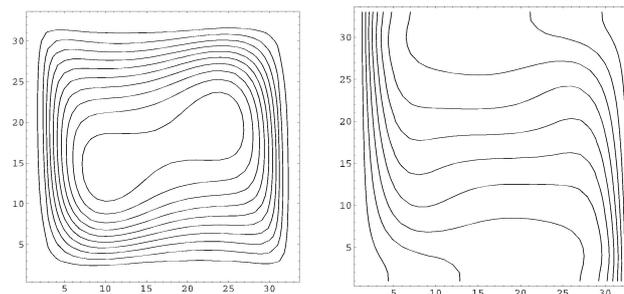
de poder observar cierta similitud con dicho caso ante la imposibilidad de contar con resultados en medios libres para comparar. Resultados con inclinaciones  $\phi = 0$  y  $\phi = 40$  grados se muestran, respectivamente, en las Figs 17 y 18, los cuales corresponden también a estados estacionarios que se obtienen del problema no estacionario en los tiempos finales  $T = 0.3038$  y  $T = 0.2906$ . Como un recurso más para validar el método numérico, mencionamos que los resultados que se obtuvieron con  $\phi = 0$  grados coinciden con los que se obtienen con el código de la cavidad sin considerar inclinación; y, desde luego, este resultado concuerda con el reportado en la Ref. 2.

4.2.2.  $Ra=100000, h_x=3/96, h_y=1/32, \Delta t=0.00001$ , condiciones de frontera mixtas en una cavidad rectangular inclinada:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma|_{x=0,1}, & \theta = 1. & \text{sobre } \Gamma|_{y=0}, \\ \theta = 0. & \text{sobre } \Gamma|_{y=1}. \end{cases}$$

Función de Corriente ( $\psi$ )

Temperatura ( $\theta$ )

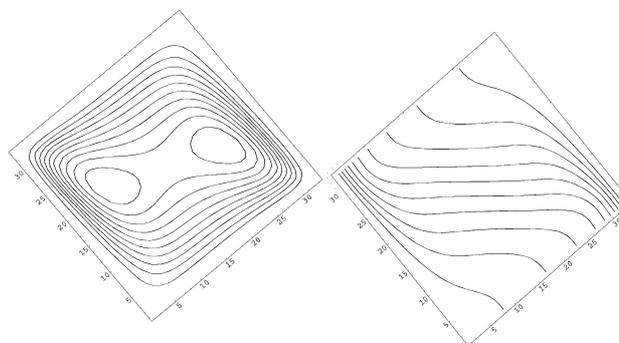


$\phi=0^\circ$

FIGURA 17.

Función de Corriente ( $\psi$ )

Temperatura ( $\theta$ )



$\phi=40^\circ$

FIGURA 18.

Se observa que estas condiciones de frontera coinciden con las de 4.1.3 en medios porosos. El resultado que se reporta en la Fig. 19 corresponde a una razón geométrica 1/3 (altura 1 en Y contra una longitud 3 en X) y con una inclinación de  $\phi = 130$  grados. Se observa de los datos en 4.2.1 anterior que el paso de tiempo  $\Delta t$  es un orden de magnitud más pequeño; el resultado que se presenta corresponde a  $T = 0.1$  lo cual equivale haber avanzado 10000 niveles de tiempo, sin haber alcanzado el estado estacionario de acuerdo al criterio que estamos usando para el error relativo en tiempo. De hecho, actualmente no sabemos si existe estado estacionario o no.

4.2.3.  $Ra = 1000, h = 1/32, \Delta t = .0001$ , condiciones de frontera Dirichlet:

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{sobre } \Gamma|_{x=0,1}, & \theta = -1 & \text{sobre } \Gamma|_{y=0}, \\ \theta = \theta_A = -0.5 & \text{sobre } \Gamma|_{y=1}. \end{cases}$$

Estas condiciones de frontera puramente Dirichlet corresponden a 4.1.1. de medios porosos, con el mismo número de Rayleigh  $Ra = 1000$ . Consideramos esta situación para observar la influencia del medio. La Fig. 20 muestra el correspondiente estado estacionario el cual se alcanza en  $T = 0.3322$ . Observamos que al igual que en medios porosos, ver Fig. 5, en el estado estacionario las líneas de corriente se estacionan en dos celdas con la misma estructura, pero las isotermas difieren en su estructura; es notorio el hecho que en medios porosos el tiempo al cual se alcanza el estado estacionario es menor,  $T = 0.038$ .

Queremos terminar esta sección haciendo algunas observaciones sobre los resultados, adicionalmente a las que se acaban de mencionar en 4.2.3. En relación a 4.1.2 de medios porosos y 4.2.1. en medios libres se ve que el comportamiento del flujo para  $Ra = 100000$  en las Fig. 17 y 18, sobre todo en las isotermas, adquiere una estructura similar al correspondiente a 4.2.2. en medios porosos para  $Ra = 100$  (Figs.10–12); para un valor menor de  $Ra$  en medios libres, incluyendo  $Ra = 100$ , las isotermas están muy cerca de ser verticales, esto es, no alcanzan a doblarse como en  $Ra = 100000$ . Para  $Ra = 1000$  en 4.1.2., Fig. 14 con ángulo  $\phi = 130$  grados, se puede observar que tanto las líneas de corriente como las isotermas se pegan más a las paredes de temperatura fija, tanto en lo ancho como a lo largo, lo cual ocurre también para  $\phi = 0, 40, 130$  grados, cálculos que también se realizaron y coinciden con los reportados en la Ref. 6, pág. 2093. Este efecto de “pegarse más” a dichas paredes también ocurre en medios libres si incrementamos  $Ra$  respecto a  $Ra = 100000$ ; específicamente dicho efecto se manifiesta en los resultados, que aunque no se reportan en este trabajo fueron realizados y coinciden con los de la Ref. 2, para  $Ra = 1\,000\,000$  y  $Ra = 10\,000\,000$  con ángulo  $\phi = 0$  grados. Entonces, se infiere que dicho efecto de “pegamiento” es una propiedad común en ambos medios pero a

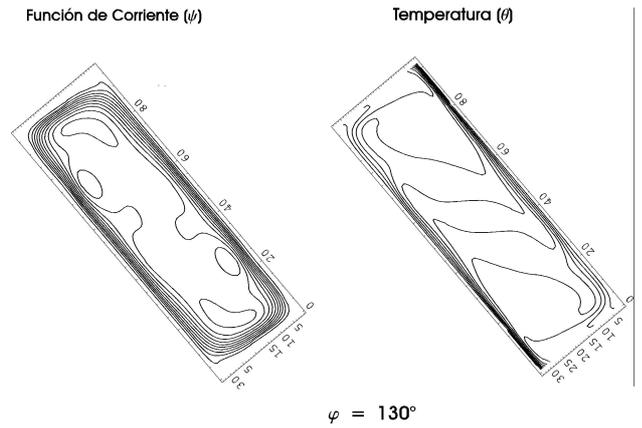


FIGURA 19.

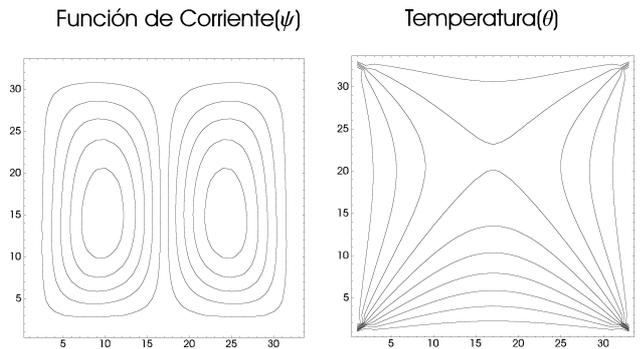


FIGURA 20.

diferente escala del número de Rayleigh. Finalmente, en relación al segundo resultado (razón geométrica 2/3) en 4.1.3. (Fig. 16), independientemente de algunas discrepancias inherentes a la diferencia en métodos, incluyendo las limitaciones del método explícito para el transiente falso para la ecuación de temperatura que se usa en la Ref. 4, limitaciones señaladas en la Ref. 19, las condiciones de este problema son un primer acercamiento para trabajar en problemas de Rayleigh-Bernard, entre ellos el que se aborda en la Ref. 20 para medios porosos. En la Ref. 20 el resultado de la Fig. 5, pág. 352, tiene una estructura similar al reportado aquí en la Fig. 16 a pesar de tener condiciones de frontera diferentes (propias de problemas Rayleigh-Bernard).

### 5. Conclusiones

Se han presentado simulaciones numéricas para una variedad amplia de flujos de convección natural tanto en medios porosos como en medios libres considerando la aproximación de Boussinesq en la formulación de variables función corriente y vorticidad. El método numérico que se emplea para lograr dichas simulaciones se basa principalmente en un proceso iterativo de punto fijo con estructura común para ambos medios, el cual se aplica para resolver los sistemas elípticos no lineales que resultan al aplicar una discretización apropiada de segundo orden en forma implícita en el tiempo. Con el

proceso iterativo se manejan eficientemente la no linealidad y el acoplamiento de las ecuaciones, y a la vez conduce finalmente a resolver problemas elípticos lineales y simétricos. Se sabe que la solución de esta clase de problemas es bastante simple, con lo cual se está en condiciones de experimentar fácilmente para observar y analizar los flujos de convección

natural abordados aquí, así como explorar otras posibilidades, incluyendo flujos que para ciertos valores críticos de los parámetros involucrados no alcancen un estado estacionario y/o presenten fenómenos de bifurcación, como en la Ref. 19 donde dicho tema es abordado para el problema estacionario.

- 
1. R. Glowinski, *Lectures in Applied Mathematics* **28** AMS, Providence, RI (1991) 219.
  2. B. Bermúdez and A. Nicolás, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **29** (1999) 397.
  3. D.M. Christopher, *Heat Transfer in Porous Media and Particulate Flows* ASME Publication HTD **46** (1985) 191.
  4. S.L. Moya, E. Ramos, S. Mihir, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **30** (1987) 741.
  5. H. Jiménez Islas, *Modelamiento matemático de los procesos de transferencia de momentum, calor y masa en medios porosos* Tesis Doctoral, UAM-I, CBI, (1999).
  6. A.C. Baytas, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **43** (2000) 2089.
  7. A. Mahidjiba, M. Mamou, P. Vasseur, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **43** (2000) 1505.
  8. H. Jiménez-Islas, F. López-Isunza, J.A. Ochoa-Tapia, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **42** (1999) 4185.
  9. A.A. Markov, *Institute for Problems in Mechanics of Russian Academic of Sciences (IPM-RAS)* (2002) Comunicación personal.
  10. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition (Pergamon Press, INC., 1989).
  11. M.D. Gunzburger, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: A guide to theory, practice, and algorithms* (Academic Press, INC., 1989).
  12. R. Peyret and T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow* (Springer-Verlag, New York, 1983).
  13. E.J. Dean, R. Glowinski, O. Pironneau, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* **87** (1991) 117.
  14. B. Bermúdez and A. Nicolás, A fixed point iterative process for the Navier-Stokes equations in stream function-vorticity variables. *Communications in Numerical Methods in Engineering* (2002, submitted).
  15. O. Goyon, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* **130** (1996) 319.
  16. B. Bermúdez, A. Nicolás, F.J. Sánchez, E. Buendía, *Comp. Mechanics Journal* **20** (1997) 474.
  17. J. Adams, P. Swarztrauber, and R. Sweet, *FISHPACK: A Package of Fortran Subprograms for the Solution of Separable Elliptic PDE's* The National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA, (1980).
  18. R. Sweet, *SIAM J. on Numer. Ana.* **14** (1977) 706.
  19. D.S. Riley and K.H. Winters, *J. of Fluid Mech.* **215** (1990) 309.
  20. M. Mamou, L. Robillard, E. Bilgen, and P. Vasseur, *Int. J. Heat and Mass Transfer* **39** (1996) 347.