

Familias de superficies nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski y sus ecuaciones diferenciales asociadas

G. Silva-Ortigoza y P. García-Godínez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla,
Apartado Postal 1152, 72001, Puebla, Pue., México.

Recibido el 20 de mayo de 2003; aceptado el 23 de junio de 2003

En este trabajo describimos el procedimiento para obtener toda la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto tales que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski.

Descriptor: Espacio-tiempo de Minkowski; superficies nulas; ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden.

In this work we describe the procedure to obtain all the family of third order ordinary differential equations connected by a contact transformation such that in their spaces of solutions is defined a conformal three dimensional Minkowski metric.

Keywords: Minkowski space-time; null surfaces; third order ordinary differential equations.

PACS: 03.30.+p; 02.60.Lj

1. Introducción

En la década pasada E.T. Newman y colaboradores han concluido, en forma satisfactoria, una reformulación de la relatividad general en términos de superficies nulas [1–3]. En esta reformulación los objetos fundamentales de estudio son dos funciones, $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ y $\Omega(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$, donde x^a denota las coordenadas del espacio-tiempo y ζ es la coordenada estereográfica. La función $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ proporciona la estructura conforme del espacio-tiempo, es decir, define nueve de las diez componentes del tensor métrico, mientras que $\Omega(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ define la última componente; es decir, en esta formulación de la relatividad general la métrica es un objeto secundario. Este par de funciones satisface un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acoplado, el cual es más complicado de resolver que las ecuaciones de Einstein en términos de la métrica. Por tal motivo, se ha estudiado el caso tridimensional [4,5]. Recientemente [6], se encontró que el caso tridimensional ya había sido estudiado, con motivaciones completamente diferentes, por Cartan y Chern [7–10]. Más específicamente, Cartan y Chern estudiaron el problema siguiente: ¿bajo qué condiciones dos ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden son equivalentes ante cierto tipo de transformaciones, tales como las transformaciones de contacto? En particular, de sus resultados generales, se desprende que mediante una transformación de contacto la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

$$y''' + y' = 0, \tag{1}$$

se puede transformar en la ecuación diferencial

$$\bar{y}''' = 6 \left(\frac{\bar{y}'(\bar{y}'')^2}{2(\bar{y}')^2 - 1} \right). \tag{2}$$

En trabajos recientes [6,11], el grupo de Newman ha demostrado, usando los resultados de Cartan y Chern, que en el

espacio de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden se puede definir una métrica lorentziana conforme. Además, demostraron que esta estructura es invariante ante transformaciones de contacto [11]. A continuación presentamos un resumen de estos resultados.

Una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden tiene la forma

$$u''' = F(s, u, u', u''), \tag{3}$$

donde u es una función real de s y la prima denota la derivada ordinaria de u con respecto a s . Estaremos interesados en la Ec. (3) cuando F es una función suave en todos sus argumentos y su invariante de Wünschmann asociado es cero; esto es, $F(s, u, u', u'')$ satisface la siguiente condición

$$I[F] \equiv F_u - a[F]F_{u''} + \dot{a}[F] - a[F]b[F] = 0, \tag{4}$$

donde

$$2a[F] = -F_{u'} - \frac{2}{9}(F_{u''})^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{ds}(F_{u''}),$$

$$b[F] = -\frac{1}{3}F_{u''}, \tag{5}$$

con

$$\frac{d}{ds}\Gamma(s, u, u', u'') \equiv \dot{\Gamma} = \Gamma_s + \Gamma_u u' + \Gamma_{u'} u'' + \Gamma_{u''} F. \tag{6}$$

Observación 1: Para nuestra aplicación al espacio-tiempo tridimensional de Minkowski la variable independiente s será tomada como el ángulo φ en el círculo. Este círculo es el círculo de direcciones nulas en cada punto del espacio-tiempo.

Bajo la condición (4) la métrica o mejor dicho la familia uniparamétrica de métricas lorentzianas conformes asociadas con la Ec. (3) se obtiene de la siguiente manera. Supongamos que la solución general de la Ec. (3) se puede escribir como

$$u = z(x^a, s), \tag{7}$$

donde $x^a = (x^1, x^2, x^3)$ son las constantes de integración las cuales definen localmente el espacio de soluciones. Ahora se usa la solución general (7) para definir las siguientes tres formas:

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \partial_a u dx^a, \\ \beta^2 &= \partial_a u' dx^a, \\ \beta^3 &= \partial_a u'' dx^a, \end{aligned} \tag{8}$$

y las tres combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \beta^1, \\ \omega^2 &= \beta^2, \\ \omega^3 &= \beta^3 + a[F]\beta^1 + b[F]\beta^2, \end{aligned} \tag{9}$$

donde las funciones $a[F]$ y $b[F]$ están dadas por las Ecs. (5). La familia de métricas está definida por

$$g(x^a, s) \equiv \omega^1 \otimes \omega^3 + \omega^3 \otimes \omega^1 - \omega^2 \otimes \omega^2. \tag{10}$$

Esta familia de métricas es tal que

$$\dot{g} = \frac{2}{3} F_{u''} g. \tag{11}$$

Esto significa que en el espacio de soluciones de cualquier ecuación diferencial ordinaria de tercer orden que satisface la condición (4) se puede construir una familia de métricas lorentzianas conformes. Además, se ha demostrado [11] que esta estructura conforme es invariante ante una transformación de contacto. Es decir, se ha demostrado que en el espacio de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u''' = F(u, u', u'', s), \tag{12}$$

$$\bar{u}''' = \bar{F}(\bar{u}, \bar{u}', \bar{u}'', \bar{s}), \tag{13}$$

puede ser definida una métrica conforme cuando (s, u, u') y $(\bar{s}, \bar{u}, \bar{u}')$ están conectadas mediante una transformación de contacto.

El mapeo

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \chi(s, u, u'), \\ \bar{u} &= \psi(s, u, u'), \\ \bar{u}' &= \pi(s, u, u'), \end{aligned} \tag{14}$$

define una transformación de contacto si satisface la siguiente condición [12]

$$d\psi - \pi d\chi = \lambda(du - u'ds), \tag{15}$$

donde λ es una función de s, u y u' . Eliminando λ , concluimos que (14) debe cumplir con

$$\psi_s + u\psi_u = \pi(\chi_s + u\chi_u), \quad \psi_{u'} - \pi\chi_{u'} = 0. \tag{16}$$

Las Ecs. (14) definen una transformación de punto prolongada si y sólo si χ y ψ son independientes de u' . Por otra

parte, si (14) no es una transformación de punto prolongada uno puede usar el teorema de la función implícita para eliminar la variable u en (14), obteniendo una relación de la forma $H(s, u, \bar{s}, \bar{u}) = 0$. S. Lie demostró el siguiente teorema (ver, por ejemplo, la Ref. 12, p. 127):

Teorema: Toda transformación de contacto, la cual no es una transformación de punto prolongada, se puede obtener resolviendo las siguientes tres ecuaciones implícitas, para $\bar{s}, \bar{u}, \bar{u}'$ en términos de s, u, u' :

$$H(s, u, \bar{s}, \bar{u})=0, \quad H_s + u'H_u=0, \quad H_{\bar{s}} + \bar{u}'H_{\bar{u}}=0. \tag{17}$$

La función generadora $H(s, u, \bar{s}, \bar{u}')$ es una función suave, tal que las Ecs. (17) se pueden resolver para $\bar{s}, \bar{u}, \bar{u}'$. Sin pérdida de generalidad se puede tomar [11]

$$H = \bar{u} - \bar{V}(u, s, \bar{s}), \tag{18}$$

de tal forma que las transformaciones de contacto se pueden escribir como

$$\bar{u} = \bar{V}(u, s, I(s, u, u')), \tag{19}$$

$$\bar{s} = I(s, u, u') \tag{20}$$

$$\bar{u}' = \bar{V}_{\bar{s}}(u, s, I(s, u, u')), \tag{21}$$

donde $I(s, u, u')$ se obtiene resolviendo

$$\bar{V}_s + u'\bar{V}_u = 0, \tag{22}$$

para \bar{s} en términos de s, u y u' .

De la Ec. (10) observamos que $\omega^1 (= \beta^1)$ es una familia (puesto que depende de s), de covectores luxoides de g . Por tanto, las superficies de nivel

$$u(x^a, s) = \text{constante}, \tag{23}$$

definen una familia uniparamétrica de superficies nulas en el espacio de soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden (3) bajo la condición (4). De esto se tiene que para cada valor de $s, u(x^a, s)$ satisface la ecuación iconal

$$g^{ab} \partial_a u \partial_b u = 0. \tag{24}$$

Dada una solución de la ecuación iconal, su solución más general se puede obtener mediante el método de la envolvente [11,13,14]. Para ver esto supongamos que tomamos

$$u^*(x^a, s) = v^*(u(x^a, s), s), \tag{25}$$

una función arbitraria e imponemos que (construcción de la envolvente)

$$\frac{dv^*}{ds} \equiv v_u^* u_s + v_s^* = 0. \tag{26}$$

Si de la Ec. (26) resolvemos para s como una función de x^a ; es decir,

$$s = s(x^a), \tag{27}$$

entonces, usando la Ec. (26), es directo demostrar que

$$u^{**}(x^a) = v^*(u(x^a, s(x^a)), s(x^a)), \quad (28)$$

satisface la ecuación iconal. Ahora mostraremos cómo dada una familia de soluciones de la ecuación iconal se puede obtener otra familia de soluciones. Para esto, partimos de

$$u^*(x^a, s, s^*) = V^*(u(x^a, s), s, s^*), \quad (29)$$

e imponemos que

$$\frac{dV^*}{ds} \equiv V_u^* u_s + V_s^* = 0. \quad (30)$$

Si de la Ec. (30) resolvemos para s como función de x^a y s^* ; es decir,

$$s = s(x^a, s^*), \quad (31)$$

entonces

$$u^*(x^a, s^*) = V^*(u(x^a, s(x^a, s^*)), s(x^a, s^*), s^*) \quad (32)$$

es una nueva familia de soluciones de la ecuación iconal.

Observación 2: Cuando $*$ es reemplazado por una barra, las Ecs. (32) y (30) son idénticas a las Ecs. (19) y (22). Si tomamos la derivada de la Ec. (32) con respecto a s^* , usando la Ec. (30) el resultado es el mismo que el dado por la Ec. (21). Por lo tanto, dado que para nuestro caso $u(x^a, s)$ satisface la ecuación iconal, realizar una transformación de contacto es equivalente a generar una nueva familia de soluciones de la ecuación iconal; es decir, en este caso una transformación de contacto envía familias de superficies nulas en familias de superficies nulas.

Como conclusión de los trabajos realizados por Cartan, Chern, Newman y colaboradores se tiene que en el espacio de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden, que cumplen con la Ec. (4), se encuentra definida una familia uniparamétrica de métricas lorentzianas conformes y que esta estructura es invariante ante una transformación de contacto. Además se probó que, en este caso, realizar una transformación de contacto es equivalente a generar una nueva familia de soluciones de la ecuación iconal.

En este trabajo en lugar de partir de una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, comenzaremos (en un proceso inverso al realizado por Cartan, Chern, Newman y colaboradores) con una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski y describiremos el procedimiento para obtener toda la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto tales que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski. Es decir, el objetivo principal de este trabajo es describir el procedimiento que se tiene que realizar para obtener toda la clase de equivalencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto tal que en su espacio de soluciones se

encuentra definida una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski. Para este propósito, en la Sec. 2, se integran las ecuaciones de las geodésicas nulas en una métrica conforme a la métrica de Minkowski; la cual es regular en infinito lúxido futuro \mathcal{I}^+ , de donde se obtiene que la función, C_{x^a} , que describe la intersección del cono de luz de un punto arbitrario x^a del espacio-tiempo con \mathcal{I}^+ está dada por la familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski,

$$u = x^a l_a(\varphi), \quad (33)$$

donde $l_a(\varphi)$ es lúxido para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Se prueba además que esta función tiene doble significado: para x^a fijo representa la intersección del cono de luz futuro del punto x^a del espacio-tiempo con \mathcal{I}^+ , mientras que para $u = u_0 = \text{cte}$, $\varphi = \varphi_0 = \text{cte}$ y x^a variable describe el cono de luz pasado del punto (u_0, φ_0) de \mathcal{I}^+ . Usando este hecho, en la Sec. 3, se muestra cómo de la familia de soluciones de la ecuación iconal (33) se puede generar otra familia de soluciones de la ecuación iconal. En la sección 4 se muestra que la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden asociada con la familia de soluciones de la ecuación iconal (33) es

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} = 0, \quad (34)$$

y se describe el procedimiento para obtener toda la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto con la Ec. (34).

2. El cono de luz y la función C_{x^a} de un punto arbitrario del espacio-tiempo

Con el objeto de obtener la función C_{x^a} que describe la intersección del cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo x_0^a con \mathcal{I}^+ , necesitamos integrar las ecuaciones de las geodésicas nulas en una métrica conforme a la métrica de Minkowski, la cual sea regular en \mathcal{I}^+ ; es decir, en infinito lúxido futuro. Para este fin comenzaremos con la métrica de Minkowski en coordenadas minkowskianas; es decir,

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = dt^2 - (dx^2 + dy^2), \quad (35)$$

y realizaremos una serie de transformaciones de coordenadas: primero tomaremos $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, así que la métrica toma la siguiente forma: $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2$; ahora tomamos $r = r'$ y $t = u' + r'$, entonces $ds^2 = du'^2 + 2du'dr' - r'^2 d\theta^2$. Finalmente tomando $u' = \sqrt{2}u$, $r' = r/\sqrt{2}$; y $l = 1/r$, obtenemos que $ds^2 = 1/2l^2 d\tilde{s}^2$, donde

$$d\tilde{s}^2 = 4l^2 du^2 - 4du dl - d\theta^2 \quad (36)$$

es una métrica conforme [conforme a la métrica de Minkowski dada en la Ec. (35)], la cual es regular en infinito lúxido futuro dado por $l = 0$. Así, una lagrangiana que describe las geodésicas nulas de la métrica (36) está dada por

$$\mathcal{L} = 2l^2 \dot{u}^2 - 2\dot{u}l - \frac{\dot{\theta}^2}{2}, \quad (37)$$

donde el punto indica diferenciación con respecto a un parámetro afín, τ , a lo largo de la geodésica nula.

Recordemos que dada la lagrangiana de un sistema mecánico con n grados de libertad, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, (donde las q_j son las coordenadas generalizadas, las \dot{q}_j son las velocidades generalizadas y t denota al tiempo con $j = 1, \dots, n$), las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange [15]; que son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Entonces, para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con la función lagrangiana dada por la Ec. (37), necesitamos calcular $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$ y $\partial \mathcal{L} / \partial q_i$, donde $q_1 = u, q_2 = l, q_3 = \theta$ y $t = \tau$. Un cálculo sencillo muestra que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = 4l^2 \dot{u} - 2\dot{l}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 4\dot{u}^2 l, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = -2\dot{u}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -\dot{\theta}. \quad (41)$$

De estos resultados obtenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con la función lagrangiana (37) están dadas por

$$\frac{d}{d\tau} (2l^2 \dot{u} - \dot{l}) = 0, \quad (42)$$

$$\frac{d\dot{u}}{d\tau} + 2l\dot{u}^2 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\tau} = 0, \quad (44)$$

y la condición para buscar las geodésicas nulas está dada por

$$2l^2 \dot{u}^2 - 2\dot{u}\dot{l} - \frac{\dot{\theta}^2}{2} = 0. \quad (45)$$

De las Ecs. (42) y (44) obtenemos que

$$\dot{u} = \frac{c_1 + \dot{l}}{2l^2}, \quad (46)$$

$$\dot{\theta} = b, \quad (47)$$

donde c_1 y b son constantes de integración.

Un cálculo directo muestra que si (u, l, θ) satisface las Ecs. (45)-(47) entonces la Ec. (43) es una identidad; esto significa que sólo tres de las cuatro Ecs. (42)-(45) son independientes. Además, usando estas ecuaciones, no es difícil mostrar que la única constante importante en la integración de las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas es (b/c_1) . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, tomaremos $c_1 = 1$; de esta manera, la única constante importante es b , la cual parametriza la dirección inicial de la geodésica [16].

De estos resultados obtenemos que las ecuaciones que describen las geodésicas nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski son:

$$\dot{\theta} = b, \quad (48)$$

$$\dot{u} = \frac{1 + \dot{l}}{2l^2}, \quad (49)$$

$$\dot{l} = \pm \sqrt{1 - l^2 b^2}. \quad (50)$$

De la Ec. (50) observamos que \dot{l} puede ser negativo, cero o positivo. Si $\dot{l} < 0$ entonces el rayo de luz se moverá alejándose del origen de coordenadas; para ver esto recordemos que $l = 1/r$, entonces $\dot{l} = -\dot{r}/r^2$. De esta manera, $\dot{l} < 0$ cuando $\dot{r} > 0$; esto significa que la distancia del origen a la posición final del rayo de luz es mayor que la distancia del origen a la posición inicial. Si inicialmente $\dot{l} > 0$, entonces el rayo de luz se moverá acercándose al origen del sistema coordenado ($r = 0, l = \infty$) y después de acercarse hasta una distancia mínima r_m donde $\dot{l} = \sqrt{1 - l_m^2 b^2} = 0$; es decir, hasta que l toma el valor $l_m = 1/b$, el rayo de luz comenzará a alejarse del origen y nuevamente $\dot{l} < 0$.

Usando el parámetro l en lugar del parámetro afín τ ; es decir, $dl = \pm \sqrt{1 - l^2 b^2} d\tau$, las Ecs. (48)-(50) se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$du = \pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l^2 \sqrt{1 - b^2 l^2}} \right) dl, \quad (51)$$

$$d\theta = \pm \left(\frac{bdl}{\sqrt{1 - b^2 l^2}} \right), \quad (52)$$

$$l = l. \quad (53)$$

Si inicialmente $\dot{l} < 0$, de las Ecs. (51)-(53), encontramos que la geodésica del cono de luz que conecta el punto inicial (el vértice) $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$ con el punto final $x^a = (u, l, \theta)$, está dada por

$$u^{(-)} = u_0 + \left(\frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l_0^2}}{2l_0} \right) - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l} \right),$$

$$\theta^{(-)} = \theta_0 + \arcsen(bl_0) - \arcsen(bl),$$

$$l = l. \quad (54)$$

En el caso de que inicialmente $\dot{l} > 0$, entonces

$$u^{(+)} = u_0 + \left(\frac{1 + \sqrt{1 - b^2 l_0^2}}{2l_0} \right) - \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_m, 0), \end{cases}$$

$$\theta^{(+)} = \theta_0 - \arcsen(bl_0) + \begin{cases} \arcsen(bl), & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \pi - \arcsen(bl), & \text{si } l \in (l_m, 0). \end{cases}$$

$$l = l. \quad (55)$$

Tomando el límite cuando $l \rightarrow 0$; es decir, cuando el rayo de luz se aleja a infinito, en las Ecs. (54) y (55) obtenemos la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo (u_0, l_0, θ_0) con \mathcal{I}^+ ; que es

$$\begin{aligned} u^{(-)} &= u_0 + \left(\frac{1 - \sqrt{1 - l_0^2 b^2}}{2l_0} \right), \\ \varphi^{(-)} &= \theta_0 + \arcsen(bl_0), \\ u^{(+)} &= u_0 + \left(\frac{1 + \sqrt{1 - l_0^2 b^2}}{2l_0} \right), \\ \varphi^{(+)} &= \theta_0 + \pi - \arcsen(bl_0), \end{aligned} \tag{56}$$

donde $\varphi^{(\pm)} = \theta_\infty^{(\pm)} \equiv \theta(l = 0)$. Un cálculo directo, usando las Ecs. (56), muestra que

$$\begin{aligned} u^{(+)} &= u_0 + \left[\frac{1 - \cos(\varphi^{(+)} - \theta_0)}{2l_0} \right], \\ u^{(-)} &= u_0 + \left[\frac{1 - \cos(\varphi^{(-)} - \theta_0)}{2l_0} \right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Así, de las Ecs. (57) se obtiene que la función que describe la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo, $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$, con \mathcal{I}^+ se puede escribir de la siguiente forma:

$$u = u_0 + \left[\frac{1 - \cos(\varphi - \theta_0)}{2l_0} \right], \tag{58}$$

donde (u, φ) son coordenadas en \mathcal{I}^+ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ahora reescribiremos la Ec. (58); para este fin, introduciremos los siguientes vectores luxoides:

$$\begin{aligned} \tilde{l}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos \theta_0, \sen \theta_0), \\ l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos \varphi, \sen \varphi). \end{aligned} \tag{59}$$

Usando las Ecs. (59) encontramos que la Ec. (58) puede ser escrita como

$$u = u_0 + \frac{\tilde{l}^a l_a}{l_0}, \tag{60}$$

o, usando coordenadas minkowskianas, $x_0^a = (t_0, x_0, y_0)$, las cuales están relacionadas con las coordenadas (u_0, l_0, θ_0) por

$$x_0^a = u_0 t^a + \frac{\tilde{l}^a}{l_0}, \tag{61}$$

donde $t^a = \sqrt{2}(1, 0, 0)$; se obtiene que la función C_{x^a} asociada con el punto del espacio-tiempo, x_0^a , se puede escribir como

$$u = Z(x_0^a, \varphi) = x_0^a l_a(\varphi). \tag{62}$$

Para un espacio-tiempo asintóticamente plano de dimensión cuatro, la función $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ tiene doble significado: para x^a fijo ésta representa la intersección del cono

de luz futuro del punto del espacio-tiempo, x^a con \mathcal{I}^+ , mientras que para $u = \text{constante}$, $\zeta = \text{constante}$ y x^a variable ésta describe todos los puntos del espacio-tiempo que están conectados por geodésicas nulas con el punto $(u = \text{constante}, \zeta = \text{constante}, \bar{\zeta} = \text{constante})$ de \mathcal{I}^+ . Esto es, ésta describe el cono de luz pasado del punto $(u = \text{constante}, \zeta = \text{constante}, \bar{\zeta} = \text{constante})$ de \mathcal{I}^+ . Para el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski esta función está dada por la Ec. (62) y, como hemos visto, ésta describe la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo, x_0^a con \mathcal{I}^+ . Ahora mostraremos que para $u = \text{constante}$, $\varphi = \text{constante}$ y x_0^a variable, ésta representa el cono de luz pasado del punto $(u = \text{constante}, \varphi = \text{constante})$ de \mathcal{I}^+ . Para este fin, necesitamos calcular el cono de luz pasado de un punto arbitrario, $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$, del espacio-tiempo. Esto puede lograrse a través de las mismas transformaciones de coordenadas en la métrica de Minkowski, $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2$, que fueron realizadas para calcular el cono de luz futuro de un punto arbitrario x_0^a del espacio-tiempo. La única diferencia es que, en este caso, necesitamos tomar $t = u' - r'$ en lugar de $t = u' + r'$. Entonces, obtenemos que la métrica conforme está dada por $d\bar{s}^2 = 4l^2 du^2 + 4du dl - d\theta^2$. De donde, la función lagrangiana, para este caso, está dada por

$$\mathcal{L} = 2l^2 \dot{u}^2 + 2u\dot{l} - \frac{\dot{\theta}^2}{2}. \tag{63}$$

Observe que reemplazando \dot{u} por $-\dot{u}$, en la Ec. (63), obtenemos la Ec. (37). Esto significa que las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas del cono de luz pasado del punto $x_0^a = (u_0, l_0, \theta_0)$ quedan dadas por

$$\dot{\theta} = b, \tag{64}$$

$$\dot{u} = - \left(\frac{1 + \dot{l}}{2l^2} \right), \tag{65}$$

$$\dot{l} = \pm \sqrt{1 - l^2 b^2}. \tag{66}$$

Puesto que el cono de luz pasado de un punto en \mathcal{I}^+ con coordenadas (u_0, θ_0) , es obtenido de las Ecs. (64)-(66) tomando el límite cuando l_0 tiende a cero, entonces necesitamos probar que las ecuaciones obtenidas de esta manera pueden ser escritas en la forma dada por la Ec. (62). Probaremos esto sólo para el signo $(-)$, el otro caso puede ser probado de forma similar.

Usando el parámetro l , en lugar del parámetro afín τ , de las Ecs. (64)-(66) obtenemos que

$$\begin{aligned} u &= u_0 - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l_0^2}}{2l_0} \right) + \left(\frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l} \right), \\ \theta &= \theta_0 + \arcsen(bl_0) - \arcsen(bl). \end{aligned} \tag{67}$$

Con el fin de obtener la porción del cono de luz pasado de un punto arbitrario con coordenadas (u_0, θ_0) en \mathcal{I}^+ , que se

genera cuando tomamos el signo (-) en las Ecs. (64)-(66), necesitamos tomar el límite cuando $l_0 \rightarrow 0$ en las Ecs. (67). Haciendo esto, obtenemos que

$$u_0 = u - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - b^2 l^2}}{2l} \right),$$

$$\theta_0 = \theta + \arcsen(bl). \tag{68}$$

Usando las Ecs. (59) encontramos que las Ecs. (68) pueden ser escritas como

$$u_0 = u - \frac{\tilde{l}^a l_a}{l}, \tag{69}$$

o si usamos coordenadas minkowskianas $x^a = (t, x, y)$, las cuales están relacionadas con las coordenadas (u, l, θ) por $x^a = ut^a - l^a/l$, entonces el cono de luz pasado del punto con coordenadas (u_0, θ_0) en \mathcal{I}^+ está dado por

$$u_0 = x^a \tilde{l}_a(\theta_0), \tag{70}$$

que es el resultado deseado.

3. Familias de superficies nulas y sus singularidades

En la sección anterior demostramos que la función

$$u = x^a l_a(\varphi) \tag{71}$$

tiene los siguientes significados: a) si $x^a = x_0^a$ es un punto fijo del espacio-tiempo, entonces ésta representa la intersección del cono de luz de x_0^a con \mathcal{I}^+ , y b) para $(u = u_0, \varphi = \varphi_0)$ fijos ésta representa el cono de luz pasado del punto (u_0, φ_0) de \mathcal{I}^+ . El segundo significado es equivalente al hecho de que la función, $u = u(x^a, \varphi)$, para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, satisface la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski; es decir,

$$\eta^{ab} \partial_a u \partial_b u = l_a(\varphi) l^a(\varphi) = 0, \tag{72}$$

donde $\partial_a u = \partial u / \partial x^a$. Observe que las superficies de nivel de la función $u = x^a l_a(\varphi_0)$, con $\varphi_0 = \text{constante}$, son planos paralelos nulos (debido a que su vector normal es $l_a(\varphi_0)$ el cual es luxoide) en el espacio-tiempo físico tridimensional de Minkowski dado por la métrica (35). Estos planos paralelos nulos corresponden a los conos de luz pasados de los puntos (u, φ_0) de \mathcal{I}^+ en el espacio-tiempo descrito por la métrica (36).

El objetivo de esta sección es mostrar cómo de la familia de superficies nulas dada por las superficies de nivel de la función $u = x^a l_a(\varphi)$ se pueden construir nuevas familias de superficies nulas. Además se muestra cómo localizar sus singularidades. Para este fin comenzaremos con el caso más simple; es decir, primero mostraremos cómo generar una sola superficie nula y posteriormente generalizaremos este proceso.

Si $u = u_0 = \text{constante}$ entonces, usando la Ec. (71), la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos (u_0, φ) de \mathcal{I}^+ está dada por

$$u_0 = x^a l_a, \tag{73}$$

$$0 = x^a \partial_\phi l_a \equiv x^a m_a, \tag{74}$$

$$\frac{r}{2} = x^a \partial_\phi^2 l_a \equiv x^a n_a, \tag{75}$$

donde

$$l_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\cos \phi, -\text{sen } \phi), \tag{76}$$

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \text{sen } \phi, -\cos \phi), \tag{77}$$

$$n_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos \phi, \text{sen } \phi). \tag{78}$$

Dado que el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ 0 & \text{sen } \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \text{sen } \varphi \end{pmatrix} \tag{79}$$

es igual a uno, entonces los vectores l^a, m^a, n^a son linealmente independientes y por tanto podemos escribir

$$x^a = A l^a + B n^a + C m^a, \tag{80}$$

donde A, B y C pueden ser determinadas usando las Ecs. (73)-(75) y el hecho de que los vectores (l^a, m^a, n^a) satisfacen las siguientes relaciones:

$$l^a l_a = 0; \quad m^a m_a = -\frac{1}{2}; \quad n^a n_a = -\frac{1}{2};$$

$$m^a l_a = 0; \quad n^a l_a = \frac{1}{2}; \quad m^a n_a = 0. \tag{81}$$

Por ejemplo, para determinar B contraemos la Ec. (80) con l_a , con lo cual se obtiene $l_a x^a = A l_a l^a + B l_a n^a + C l_a m^a$. Usando las Ecs. (73) y (81) encontramos que $B = 2u_0$. Realizando cálculos similares para determinar A y C se encuentra que las Ecs. (73)-(75) son equivalentes a

$$x^a = 2u_0(l^a + n^a) + r l^a, \tag{82}$$

o usando el hecho de que $t^a = 2(l^a + n^a)$, obtenemos que

$$x^a = u_0 t^a + r l^a(\varphi). \tag{83}$$

Usando las Ecs. (76) y (78), y el hecho de que $x^a = (t, x, y)$, encontramos que la Ec. (82) es equivalente a

$$x^2 + y^2 - (t - \sqrt{2}u_0)^2 = 0. \tag{84}$$

Esta superficie es el cono de luz del punto del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u_0, 0, 0)$. Por lo tanto, si u puede tomar todos sus valores permitidos, entonces la Ec. (83) describe los conos de luz de los puntos del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u, 0, 0)$. De la Ec. (84) encontramos que esta familia

de conos de luz corresponde a las superficies de nivel de la función

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (85)$$

la cual, como se puede mostrar, es una solución de la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski. De esto concluimos que mediante la técnica de envolventes, dada la familia (71) de soluciones de la ecuación iconal, se puede obtener una nueva solución. Antes de mostrar cómo generar superficies nulas más generales, mostraremos cómo localizar las singularidades asociadas con las curvas de nivel de la función dada en (85). Para este fin, primero reemplacemos a u_0 por u en la Ec. (83), obteniendo así una forma equivalente de la Ec. (85), dada por

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{2u + r}{\sqrt{2}} \right), \\ x &= \left(\frac{r \cos \varphi}{\sqrt{2}} \right), \\ y &= \left(\frac{r \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Desde un punto de vista matemático las Ecs. (86) representan un mapeo entre dos espacios tridimensionales donde (u, r, φ) son coordenadas del espacio dominio y (t, x, y) son coordenadas del espacio codominio. Este mapeo representará una transformación de coordenadas si su jacobiano asociado es diferente de cero. El conjunto de puntos del espacio dominio, tal que el jacobiano es igual a cero, se llama conjunto crítico y la imagen del conjunto crítico se llama conjunto cáustico [17-19]. Usando estas definiciones encontramos que el conjunto crítico del mapeo (86) está dado por $\{r = 0, u \in \mathcal{R}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, mientras que su conjunto cáustico por $(\sqrt{2}u, 0, 0)$.

Para ver el significado geométrico de los resultados obtenidos hasta el momento supongamos que el cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski lo intersectamos con superficies $t = \text{constante}$, lo que se obtiene es una descomposición del cono de luz en curvas cerradas unidimensionales, las cuales normalmente reciben el nombre de frentes de onda. Así que el cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo se puede ver como la evolución de un frente de onda unidimensional. Desde este punto de vista, la intersección del cono de luz de un punto arbitrario con \mathcal{I}^+ dada por la función (71) corresponde al último frente de onda. Cuando tomamos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos (u_0, φ) de \mathcal{I}^+ , lo que estamos haciendo es construir la evolución del último frente de onda, dado por los puntos (u_0, φ) de \mathcal{I}^+ , hacia su interior. La cáustica asociada con la evolución de este frente de onda es el punto del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u_0, 0, 0)$. Esto significa que si construimos todas las envolventes de todos los conos de luz pasados de los puntos $(u = \text{constante}, \varphi)$ de \mathcal{I}^+ con $u \in \mathcal{R}$, lo que generamos son todos los conos de luz de los puntos del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u, 0, 0)$.

Por lo tanto, la única singularidad asociada con un cono de luz es su vértice.

Ahora mostraremos cómo construir superficies nulas que no son conos de luz. Para esto recordemos que $u = \text{constante} = x^a l_a(\varphi)$ representa la intersección del cono de luz del punto del espacio-tiempo $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ con \mathcal{I}^+ . Ahora realizaremos una deformación de esta intersección, o último frente de onda, y calcularemos su evolución hacia su interior. La deformación que estudiaremos es la siguiente:

$$\bar{u} = x^a l_a(\varphi) + \frac{1}{2}\alpha(\varphi), \quad (87)$$

donde $\alpha(\varphi)$ es una función arbitraria del ángulo φ , tal que no es una combinación lineal de $\operatorname{sen} \varphi$ y $\operatorname{cos} \varphi$; porque en ese caso la Ec. (87) se reduce a la Ec. (71). Como en el caso previo obtenemos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos $(\bar{u} = \text{constante}, \varphi)$. Dicha envolvente, en forma paramétrica, está dada por

$$\bar{u} = x^a l_a + \frac{1}{2}\alpha(\varphi), \quad (88)$$

$$0 = x^a m_a + \frac{1}{2}\partial_\varphi \alpha(\varphi), \quad (89)$$

$$\frac{\tilde{r}}{2} \equiv x^a n_a + \frac{1}{2}\partial_\varphi^2 \alpha(\varphi). \quad (90)$$

Como en el caso previo, usando las Ecs. (81) y las Ecs. (88)–(90), encontramos que la envolvente está dada por

$$\begin{aligned} x^a &= 2\left(\bar{u} - \frac{\alpha}{2}\right)(n^a + l^a) + (\partial_\varphi \alpha)m^a \\ &\quad + (\tilde{r} - \partial_\varphi^2 \alpha)l^a, \end{aligned} \quad (91)$$

o, equivalentemente,

$$x^a = \left(\bar{u} - \frac{\alpha}{2}\right)t^a + (\partial_\varphi \alpha)m^a + (\tilde{r} - \partial_\varphi^2 \alpha)l^a. \quad (92)$$

Observe que cuando $\alpha(\varphi) = 0$, entonces la Ec. (92) se reduce a la Ec. (83). Para este caso, un cálculo directo muestra que, el conjunto crítico asociado con el mapeo (92) es $\{\tilde{r} = 0, u \in \mathcal{R}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ y el conjunto cáustico es

$$x_c^a = \left(\bar{u} - \frac{\alpha}{2}\right)t^a + (\partial_\varphi \alpha)m^a - (\partial_\varphi^2 \alpha)l^a. \quad (93)$$

Usando las expresiones para t^a, l^a y m^a , encontramos que la Ec. (92) es equivalente a

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} [2\bar{u} - \alpha + \tilde{r} - \partial_\varphi^2 \alpha], \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\tilde{r} - \partial_\varphi^2 \alpha) \operatorname{cos} \varphi - (\partial_\varphi \alpha) \operatorname{sen} \varphi], \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\tilde{r} - \partial_\varphi^2 \alpha) \operatorname{Sen} \varphi + (\partial_\varphi \alpha) \operatorname{cos} \varphi]. \end{aligned} \quad (94)$$

Entonces, la forma del frente de onda al tiempo $t = t_0$, está dada por

$$\begin{aligned}
 t &= t_0, \\
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}t_0 - 2\bar{u} + \alpha) \cos \varphi - (\partial_\varphi \alpha) \sin \varphi \right], \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}t_0 - 2\bar{u} + \alpha) \sin \varphi + (\partial_\varphi \alpha) \cos \varphi \right]. \quad (95)
 \end{aligned}$$

Un cálculo similar muestra que el conjunto cáustico es equivalente a

$$\begin{aligned}
 t_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} [2\bar{u} - \alpha - \partial_\varphi^2 \alpha], \\
 x_c &= \frac{-1}{\sqrt{2}} [(\partial_\varphi \alpha) \sin \varphi + (\partial_\varphi^2 \alpha) \cos \varphi], \\
 y_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\partial_\varphi \alpha) \cos \varphi - (\partial_\varphi^2 \alpha) \sin \varphi]. \quad (96)
 \end{aligned}$$

Ahora aplicaremos nuestros resultados a dos casos especiales:

- a) Primero tomaremos $\bar{u} = 0$ y $\alpha = 0$. En este caso la superficie nula está dada por las Ecs. (86) con $u = 0$, mientras que el frente de onda al tiempo $t = t_0$ está dado por

$$\begin{aligned}
 t &= t_0, \\
 x &= t_0 \cos \varphi, \\
 y &= t_0 \sin \varphi. \quad (97)
 \end{aligned}$$

En la Fig. 1 presentamos la superficie nula dada por las Ecs. (94) con $\bar{u} = 0$ y $\alpha = 0$.

- b) Ahora tomamos $\bar{u} = 0$ y

$$\alpha(\varphi) = \cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi + \cos^3 \varphi + \cos^2 \varphi + \cos \varphi.$$

De las Ecs. (94) se encuentra que la superficie nula, para este caso, está dada por

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tilde{r} - 6 \cos \varphi - 9 \cos^2 \varphi + 8 \cos^3 \varphi + 15 \cos^4 \varphi - 2 \right\}, \\
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tilde{r} \cos \varphi - 3 \cos^2 \varphi - 6 \cos^3 \varphi + 6 \cos^4 \varphi + 12 \cos^5 \varphi + 1 \right\}, \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\tilde{r} - 6 \cos \varphi - 10 \cos^2 \varphi + 6 \cos^3 \varphi + 12 \cos^4 \varphi - 2) \sin \varphi \right\}. \quad (98)
 \end{aligned}$$

En la Fig. 2 presentamos la superficie nula dada por las Ecs. (98).

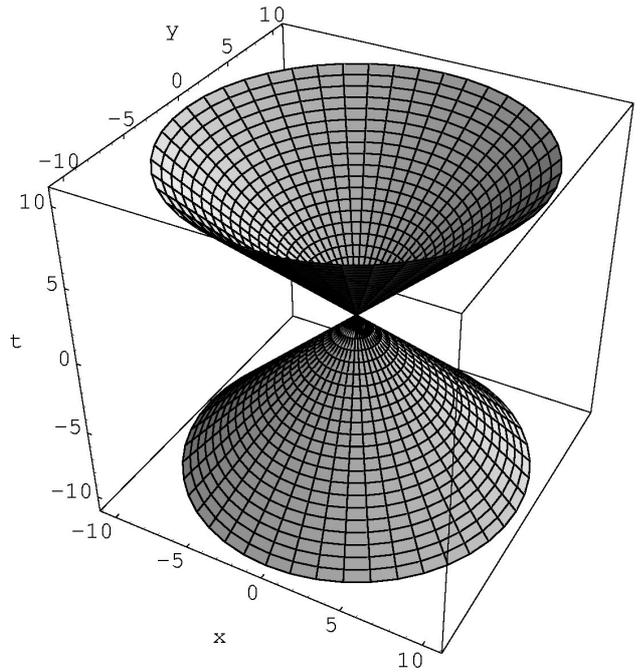


FIGURA 1. Superficie nula dada por las Ecs. (94) con $\bar{u} = 0$ y $\alpha = 0$.

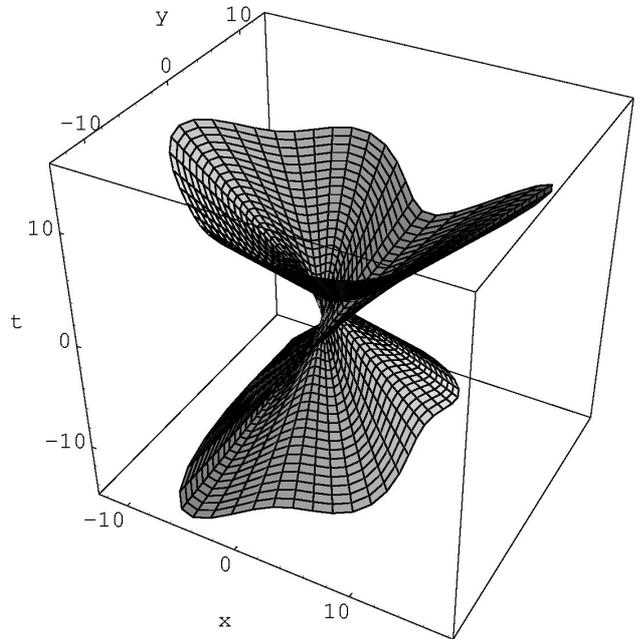


FIGURA 2. Superficie nula dada por las Ecs. (98).

Usando las Ecs. (95) encontramos que la forma del frente de onda al tiempo $t = t_0$ es

$$\begin{aligned}
 t &= t_0, \\
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sqrt{2} t_0 - 2 + 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi - 2 \cos^3 \varphi - 3 \cos^4 \varphi) \cos \varphi + 1 \right\}, \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\sqrt{2} t_0 - \cos^2 \varphi - 2 \cos^3 \varphi - 3 \cos^4 \varphi) \sin \varphi \right\}. \quad (99)
 \end{aligned}$$

En las Figs. 3-5 presentamos el frente de onda dado por las Ecs. (99) para $t_0 = -1, 0, 1$, respectivamente.

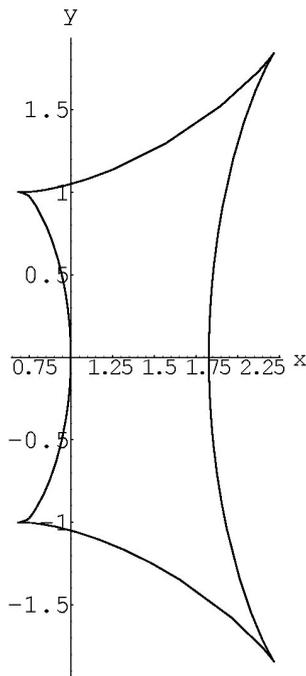


FIGURA 3. Frente de onda dado por las Ecs. (99) para $t_0 = -1$.

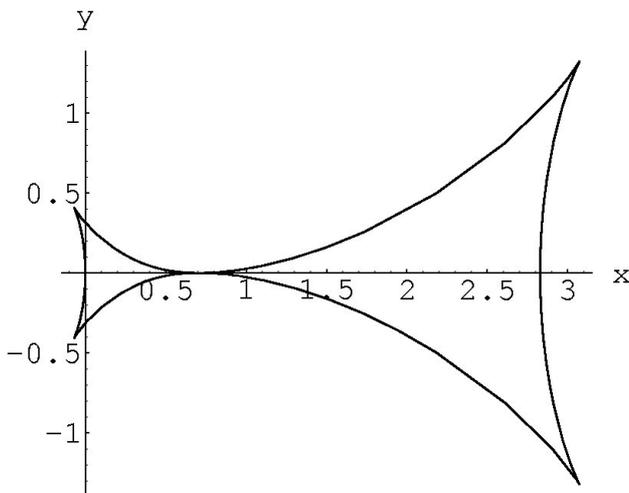


FIGURA 4. Frente de onda dado por las Ecs. (99) para $t_0 = 0$.

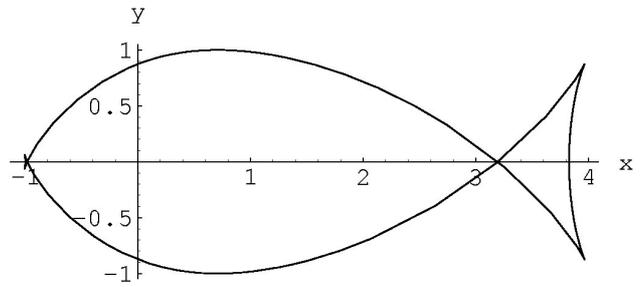


FIGURA 5. Frente de onda dado por las Ecs. (99) para $t_0 = 1$.

Mientras que el conjunto cáustico está dado por

$$\begin{aligned}
 t_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -6 \cos \varphi - 9 \cos^2 \varphi + 8 \cos^3 \varphi + 15 \cos^4 \varphi - 2 \right\}, \\
 x_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -3 \cos^2 \varphi - 6 \cos^3 \varphi + 6 \cos^4 \varphi + 12 \cos^5 \varphi + 1 \right\}, \\
 y_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (-6 \cos \varphi - 10 \cos^2 \varphi + 6 \cos^3 \varphi + 12 \cos^4 \varphi - 2) \sin \varphi \right\}. \quad (100)
 \end{aligned}$$

En la Fig. 6 presentamos la cáustica dada por las Ecs. (100)

De las Ecs. (100) se obtiene que el frente de onda, para este caso, es singular para $t_0 \in (-3.77147, 3\sqrt{2})$ (ver la Fig. 7).

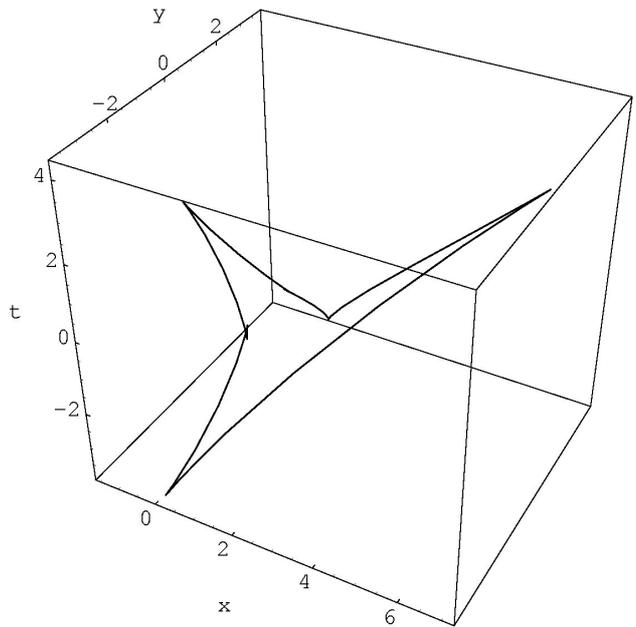


FIGURA 6. Cáustica dada por las Ecs. (100).

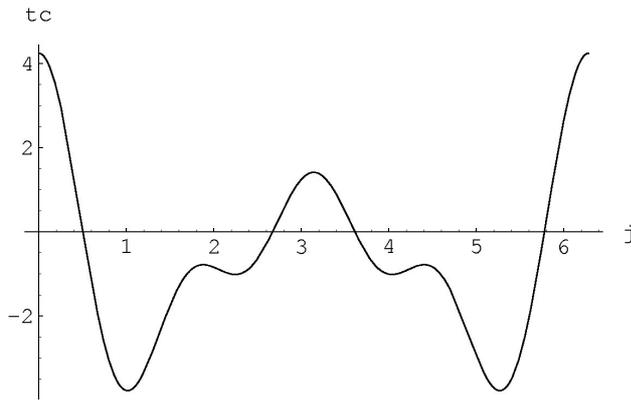


FIGURA 7. Gráfica de t_c dada en las Ecs. (100).

Hasta el momento hemos mostrado cómo de la familia de soluciones (71) de la ecuación iconal se puede obtener una nueva solución de la ecuación iconal. Ahora mostraremos cómo de (71) podemos generar nuevas familias de soluciones de la ecuación iconal. Con este propósito tomaremos

$$\bar{u} = x^a l_a(\varphi) + \frac{1}{2} \beta(\varphi, \bar{\varphi}), \tag{101}$$

donde $\beta(\varphi, \bar{\varphi})$ es una función diferenciable en cada uno de sus argumentos, φ y $\bar{\varphi}$ toman valores entre cero y 2π . Para valores dados de \bar{u} y $\bar{\varphi}$ la Ec. (101) corresponde a una deformación de la intersección del cono de luz del punto del espacio-tiempo $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ con \mathcal{I}^+ . Para cada valor de $\bar{\varphi}$ tomaremos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos $(\bar{u} = \text{constante}, \varphi)$ de \mathcal{I}^+ para construir una familia de soluciones de la ecuación iconal. La Ec. (101) en forma paramétrica está dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{\varphi}) &= x^a l_a(\varphi) + \frac{1}{2} \beta(\varphi, \bar{\varphi}), \\ 0(\bar{\varphi}) &= x^a m_a(\varphi) + \frac{1}{2} \partial_\varphi \beta(\varphi, \bar{\varphi}), \\ \frac{\tilde{r}(\bar{\varphi})}{2} &\equiv x^a n_a(\varphi) + \frac{1}{2} \partial_\varphi^2 \beta(\varphi, \bar{\varphi}), \end{aligned} \tag{102}$$

o equivalentemente por

$$\begin{aligned} x^a(\bar{\varphi}) &= \left[\bar{u} - \frac{\beta(\varphi, \bar{\varphi})}{2} \right] t^a + \left[\partial_\varphi \beta(\varphi, \bar{\varphi}) \right] m^a(\varphi) \\ &\quad + \left[\tilde{r}(\bar{\varphi}) - \partial_\varphi^2 \beta(\varphi, \bar{\varphi}) \right] l^a(\varphi). \end{aligned} \tag{103}$$

Si \bar{u} toma todos sus valores permitidos, entonces la Ec. (103) proporciona una familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski. Observemos que esta familia de soluciones contiene como casos especiales a las descritas por las Ecs. (83) y (92). Para ver esto, tomemos $\beta(\varphi, \bar{\varphi}) = \bar{\varphi} \alpha(\varphi)$. La Ec. (83) se obtiene cuando $\bar{\varphi} = 0$ y la Ec. (92) cuando $\bar{\varphi} = 1$. Dada la familia de soluciones de la ecuación iconal (71), aun podemos generar familias de soluciones más generales que las dadas por la Ec. (103). Para

esto tomaremos

$$\bar{u} = \bar{V}(u, \varphi, \bar{\varphi}), \tag{104}$$

donde \bar{V} es una función diferenciable en cada uno de sus argumentos, u está dada por la Ec. (71), φ y $\bar{\varphi}$ toman valores entre 0 y 2π . Para \bar{u} y $\bar{\varphi}$ dados la Ec. (104) representa una deformación general de la intersección del cono de luz del punto $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ con \mathcal{I}^+ . Si \bar{u} y $\bar{\varphi}$ pueden tomar todos sus valores permitidos entonces la nueva familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, en forma paramétrica estará dada por

$$\bar{u} = \bar{V}(u, \varphi, \bar{\varphi}), \tag{105}$$

$$0 = [\partial_u \bar{V}] x^a m_a + \partial_\varphi \bar{V}, \tag{106}$$

$$\frac{\tilde{r}}{2} = [\partial_u^2 \bar{V}] (x^a m_a)^2 + [\partial_u \bar{V}] x^a n_a + 2[\partial_{u\varphi}^2 \bar{V}] x^a m_a + \partial_{\varphi\varphi}^2 \bar{V}. \tag{107}$$

Concluiremos esta sección mostrando explícitamente que las Ecs. (105)-(107) describen una familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski. Para este fin, de la Ec. (106) resolvemos para φ obteniendo

$$\varphi = \varphi(x^a, \bar{\varphi}), \tag{108}$$

que sustituyendo en la Ec. (105) obtenemos

$$\bar{u}(x^a, \bar{\varphi}) \equiv \bar{V}(u(x^a, \varphi(x^a, \bar{\varphi})), \varphi(x^a, \bar{\varphi}), \bar{\varphi}). \tag{109}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\partial_b \bar{u} = (\partial_u \bar{V}) l_b + [(\partial_u \bar{V}) x^a m_a + \partial_\varphi \bar{V}] \partial_b \varphi. \tag{110}$$

Finalmente, usando la Ec. (106), se obtiene el resultado deseado; es decir,

$$\eta^{ab} \partial_a \bar{u} \partial_b \bar{u} = 0. \tag{111}$$

De esta manera, concluimos con la demostración de cómo a partir de la familia de soluciones (71) de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski se puede generar una nueva familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski.

4. La familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto con $u''' + u' = 0$

En la sección anterior mostramos cómo a partir de la familia de soluciones de la ecuación iconal, $u = x^a l_a(\varphi)$, se puede generar una nueva familia de soluciones dada por

$$\bar{u} = \bar{V}(u, \varphi, \bar{\varphi}), \tag{112}$$

$$0 = [\partial_u \bar{V}] x^a m_a + \partial_\varphi \bar{V}, \tag{113}$$

o equivalentemente por

$$\bar{u}(x^a, \bar{\varphi}) \equiv \bar{V}(u(x^a, \varphi(x^a, \bar{\varphi})), \varphi(x^a, \bar{\varphi}), \bar{\varphi}). \quad (114)$$

Recordemos que dada u las Ecs. (112) y (113) son equivalentes a una transformación de contacto. De hecho, dada u , las Ecs. (112) y (113) definen la transformación de contacto más general que no corresponde a una transformación de punto prolongada. El objetivo de la presente sección es describir el procedimiento para obtener toda la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto, tal que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski.

Dada una familia de soluciones $u = u(x^a, \varphi)$ de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden será obtenida de la siguiente forma: a) se obtienen las tres primeras derivadas de u con respecto a φ , b) de u y sus dos primeras derivadas con respecto a φ se resuelve para $x^a = (t, x, y)$ y, finalmente, c) las soluciones para x^a se sustituyen en la tercera derivada de u con respecto a φ , obteniendo así la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden asociada con esa familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski. Para mostrar esto comenzaremos con el caso más simple; es decir, cuando la familia de soluciones está dada por

$$u = x^a l_a(\varphi), \quad (115)$$

donde $l^a = (1/\sqrt{2})(1, \cos \varphi, \sin \varphi)$. Un cálculo directo muestra que

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x \cos \varphi - y \sin \varphi), \quad (116)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (117)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x \cos \varphi + y \sin \varphi), \quad (118)$$

$$\frac{d^3u}{d\varphi^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x \sin \varphi + y \cos \varphi). \quad (119)$$

De las Ecs. (116)-(118), se obtiene que

$$t = \sqrt{2} \left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right), \quad (120)$$

$$x = \sqrt{2} \left(\sin \varphi \frac{du}{d\varphi} + \cos \varphi \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right), \quad (121)$$

$$y = -\sqrt{2} \left(\cos \varphi \frac{du}{d\varphi} - \sin \varphi \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right). \quad (122)$$

Usando las Ecs. (121) y (122) en la Ec. (119) se obtiene que para x^a dado, $u = x^a l_a(\varphi)$, satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden:

$$\frac{d^3u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} = 0. \quad (123)$$

Ahora veamos el caso en el cual

$$\bar{u}(x^a, \varphi, \bar{\varphi}) = \bar{V}(u, \varphi, \bar{\varphi}) = x^a l_a + \frac{1}{2}\beta(\varphi, \bar{\varphi}); \quad (124)$$

$\beta(\varphi, \bar{\varphi})$ es una función diferenciable; con la condición de que $\partial_\varphi \bar{u} = 0$. Esto es,

$$x^a m_a(\varphi) + \frac{1}{2}\partial_\varphi \beta(\varphi, \bar{\varphi}) = 0. \quad (125)$$

Las Ecs. (124) y (125) proporcionan una clase particular de transformaciones de contacto. A continuación indicamos cómo obtener toda la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden que están conectadas mediante esta transformación de contacto especial con la Ec. (123).

Puesto que de la Ec. (125) se puede obtener $\varphi = \varphi(x^a, \bar{\varphi})$, entonces la familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, en este caso, estará dada por

$$\bar{u}(x^a, \bar{\varphi}) = x^a l_a(\varphi(x^a, \bar{\varphi})) + \frac{1}{2}\beta(\varphi(x^a, \bar{\varphi}), \bar{\varphi}). \quad (126)$$

Usando la Ec. (126), un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}} &= x^a (\partial_\varphi l_a) (\partial_{\bar{\varphi}} \varphi) + \frac{1}{2} (\partial_\varphi \beta \partial_{\bar{\varphi}} \varphi + \partial_{\bar{\varphi}} \beta) \\ &= (x^a m_a + \frac{1}{2}\partial_\varphi \beta) \partial_{\bar{\varphi}} \varphi + \frac{1}{2} \partial_{\bar{\varphi}} \beta. \end{aligned} \quad (127)$$

En la última igualdad hemos usado el hecho de que $\partial_\varphi l_a = m_a$. Finalmente, usando la Ec. (125), la Ec. (127) se reduce a

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}} = \frac{1}{2} \partial_{\bar{\varphi}} \beta(\varphi(x^a, \bar{\varphi}), \bar{\varphi}). \quad (128)$$

Un cálculo similar muestra que

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2} = \frac{1}{2} (\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta) \partial_{\bar{\varphi}} \varphi + \partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta. \quad (129)$$

Tomando la derivada total con respecto a $\bar{\varphi}$ a la Ec. (125) se obtiene que

$$\partial_{\bar{\varphi}} \varphi = \frac{-\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta}{J}, \quad (130)$$

donde

$$J = 2x^a n_a + \partial_{\varphi\varphi}^2 \beta. \quad (131)$$

Por tanto, usando la Ec. (130), se encuentra que

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2} = \frac{\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta}{2} - \frac{(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta)^2}{2J}. \quad (132)$$

En forma similar, usando las Ecs. (125), (130)-(132), se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^3} &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^3 \beta - \frac{5}{2J} [(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta)(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^3 \beta)] \\ &+ \frac{3}{J^2} [(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta)^2 (\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^3 \beta)] - \frac{1}{J^3} [(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta)^2 (\partial_\varphi \beta) \\ &\times (\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta) + (\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^3 \beta)(\partial_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^2 \beta)^3]. \end{aligned} \quad (133)$$

Para encontrar la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con $\bar{u}(x^a, \bar{\varphi})$, dada por la Ec. (126); es decir, para encontrar la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas con la Ec. (123) mediante la transformación de contacto definida por las Ecs. (124) y (125), debemos resolver las Ecs. (126), (128) y (132) para t, x y y ; y sustituirlas en el miembro derecho de la Ec. (133). Haciendo esto, se obtiene que

$$\frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^3} = F\left(\bar{\varphi}, \bar{u}, \frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}}, \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2}\right). \quad (134)$$

Para el caso general dado por las Ecs. (112)-(114) se encuentra que

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}} = \bar{V}_{\bar{\varphi}}, \quad (135)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2} = \bar{V}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}} - \left(\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\varphi}^2}\right)^{-1} \left(\frac{d\bar{V}_{\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}}\right)^2, \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^3} = & \bar{V}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}\bar{\varphi}} - 3\left(\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\varphi}^2}\right)^{-1} \left(\frac{d\bar{V}_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}}\right) \left(\frac{d\bar{V}_{\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}}\right) \\ & + 3\left(\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\varphi}^2}\right)^{-2} \left(\frac{d\bar{V}_{\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}}\right)^2 \left(\frac{d^2 \bar{V}_{\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}^2}\right) \\ & - \left(\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{\varphi}^2}\right)^{-3} \left(\frac{d\bar{V}_{\bar{\varphi}}}{d\bar{\varphi}}\right)^3 \left(\frac{d^3 \bar{V}}{d\bar{\varphi}^3}\right), \end{aligned} \quad (137)$$

donde $\bar{V}_{\bar{\varphi}} = \partial_{\bar{\varphi}} \bar{V}$ y

$$\frac{d\bar{V}}{d\varphi} = \bar{V}_{\varphi} + \bar{V}_u \partial_{\varphi} u = \bar{V}_{\varphi} + \bar{V}_u x^a m_a. \quad (138)$$

En este caso la familia de ecuaciones diferenciales de tercer orden asociadas con la familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski dada por la Ec. (114), se obtiene resolviendo las Ecs. (114), (135) y (136)

para t, x, y . Posteriormente, estas soluciones se sustituyen en el miembro derecho de la Ec. (137). Haciendo esto, se obtiene que

$$\frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^3} = G\left(\bar{\varphi}, \bar{u}, \frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}}, \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2}\right). \quad (139)$$

De esta manera se puede obtener la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante la transformación de contacto general, dada por las Ecs. (112) y (113), tal que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica que es conforme a la métrica de Minkowski. Para clarificar lo antes expuesto presentaremos el siguiente ejemplo: Sea

$$\bar{u} = \bar{V}(u, \varphi, \bar{\varphi}) = \frac{u}{\sin \varphi} - \frac{\bar{\varphi} \csc \varphi}{\sqrt{2}}, \quad (140)$$

donde u está dada por la Ec. (115). La condición (113), en este caso, se reduce a

$$\frac{d\bar{u}}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-t \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{x}{\sin^2 \varphi} - \frac{\bar{\varphi} \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) = 0, \quad (141)$$

la cual es equivalente a

$$\frac{-t \cos \varphi + x - \bar{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{2} \sin^2 \varphi} = 0. \quad (142)$$

De esta última ecuación se obtiene que

$$\cos \varphi = \frac{x}{t + \bar{\varphi}}, \quad (143)$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{t + \bar{\varphi}}\right)^2}. \quad (144)$$

Tomando el signo (+) en la Ec. (144) y sustituyéndola, al igual que las Ecs. (115) y (143), en la Ec. (140), obtenemos una rama de la nueva familia de soluciones de la ecuación iconal dada por

$$\bar{u}(x^a, \bar{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t + \bar{\varphi}}\right)^2}} - x \frac{\frac{x}{t + \bar{\varphi}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t + \bar{\varphi}}\right)^2}} - y \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t + \bar{\varphi}}\right)^2}} \right), \quad (145)$$

o, implícitamente por

$$(t + \bar{\varphi})^2 - x^2 - (y + \sqrt{2}\bar{u})^2 = 0. \quad (146)$$

Al tomar el signo (-) en la Ec. (144) obtenemos que la otra rama de la nueva familia de soluciones también está dada implícitamente por la Ec. (146). La Ec. (146) representa el cono de luz del punto en el espacio-tiempo con coordenadas $(-\bar{\varphi}, 0, -\sqrt{2}\bar{u})$.

Un cálculo directo muestra que en este caso $\bar{u}(\bar{\varphi})$ dada por la Ec. (145) satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden:

$$\frac{d^3 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^3} = F\left(\bar{\varphi}, \bar{u}, \frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}}, \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2}\right) = 6 \frac{\frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{\varphi}^2}\right)^2}{2 \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{\varphi}}\right)^2 - 1}. \quad (147)$$

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden (123) y (147) están conectadas mediante una transformación de contacto. Esta transformación de contacto está dada por las Ecs. (140) y (141) o explícitamente por

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u' \sec \varphi, \\ \bar{\varphi} &= \sqrt{2}(u - u' \tan \varphi), \\ \bar{u}' &= -\frac{\csc \varphi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (148)$$

De los resultados obtenidos por Newman y colaboradores se desprende que, en el espacio de soluciones de estas ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden, se puede definir una métrica que es conforme a la métrica de Minkowski.

Para concluir esta sección obtendremos la métrica conforme asociada con la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden (123). Para este fin, seguiremos el procedimiento descrito en la introducción. En este caso

$$\beta^1 = \partial_a u dx^a = l_a dx^a, \quad (149)$$

$$\beta^2 = \partial_a u' dx^a = m_a dx^a, \quad (150)$$

$$\beta^3 = \partial_a u'' dx^a = n_a dx^a, \quad (151)$$

$$(152)$$

mientras que $a = 1/2$ y $b = 0$. De esto se tiene que

$$\omega^1 = l_a dx^a, \quad (153)$$

$$\omega^2 = m_a dx^a, \quad (154)$$

$$\omega^3 = n_a dx^a + \frac{1}{2} l_a dx^a. \quad (155)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}g &= \omega^1 \otimes \omega^3 + \omega^3 \otimes \omega^1 - \omega^2 \otimes \omega^2 \\ &= l_a dx^a \otimes (n_b dx^b + \frac{1}{2} l_b dx^b) + (n_a dx^a + \frac{1}{2} l_a dx^a) \\ &\quad \otimes l_b dx^b - (m_a dx^a \otimes m_b dx^b) \\ &= (l_a n_b + l_a l_b + n_a l_b - m_a m_b) dx^a \otimes dx^b \\ &= g_{ab} dx^a \otimes dx^b,\end{aligned}\quad (156)$$

donde

$$g_{ab} = (l_a n_b + l_a l_b + n_a l_b - m_a m_b). \quad (157)$$

Usando las Ecs. (76)-(78) se encuentra que

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\eta_{ab}).$$

Por tanto, la métrica asociada con la Ec. (123) está dada por

$$ds^2 = \frac{1}{2} \eta_{ab} dx^a dx^b = \frac{1}{2} (dt^2 - dx^2 - dy^2). \quad (158)$$

5. Conclusiones

Las contribuciones de este trabajo son las siguientes: a) En la Sec. 2 se ha presentado una deducción detallada de la función que describe la intersección del cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski con \mathcal{I}^+ . De esta manera hemos completado la deducción de esta función reportada en la Ref. [16]; b) en la Sec. 3 hemos descrito cómo, dada esta función, la cual describe una familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, se pueden obtener nuevas familias de superficies nulas con singularidades y se han presentado ejemplos; y, finalmente, c) en la Sec. 4 hemos descrito cómo obtener la familia de ecuaciones diferenciales conectadas mediante una transformación de contacto con la Ec. (123). Es importante remarcar que estos resultados son muy modestos; sin embargo, en este trabajo se describe en detalle el procedimiento que se tiene que seguir para cualquier espacio-tiempo de dimensión tres. Cálculos similares deben ser realizados para espacios de dimensión cuatro, pero en ese caso en lugar de tratar con una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden se tiene que trabajar con un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden [6, 11].

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo económico recibido de CONACyT a través del proyecto 33725-E. Además G.S.O. agradece el apoyo económico recibido del Sistema Nacional de Investigadores (México). Este trabajo también fue apoyado parcialmente por la VIEP-BUAP por medio del proyecto II 102102.

1. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4975.
2. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4984.
3. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5005.
4. M. Tinamoto, *On the Null Surface Formulation gr-qc/9703003*

5. D. Forni, M. Iriondo, and C. Kozameh, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 5517.
6. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, *Commun. Math. Phys.* **223** (2001) 383.
7. E. Cartan, *C. R. Acad. Sci.* **206** (1938) 1425.
8. E. Cartan, *Rev. Mat. Hispano-Amer.* **4** (1941) 1.

9. E. Cartan, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 3e serie **60** (1943) 1.
10. S.S. Chern, *Selected Papers* (Springer-Verlag 1978, original 1940).
11. S. Frittelli, N. Kamran, and E.T. Newman, *J. Geom.Phys.* **43** (2002) 133.
12. P.J.O. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry* (Cambridge University Press, 1995).
13. Ver la sección sobre la teoría de Hamilton-Jacobi, en L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Classical Mechanics* (Pergamon, Headington Hill Hall, Oxford, 1960).
14. S. Frittelli, E.T. Newman, and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 3344.
15. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 1980).
16. G. Silva-Ortigoza, *Gen. Rel. and Grav.* **32** (2000) 2243.
17. V.I. Arnold, *Catastrophe Theory* (Springer, Berlin, 1986).
18. V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, and A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps* (Birkhauser, Boston, 1985), Vol. I.
19. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, 1980).