

# Calculo del ángulo de desviación en un pentaprisma, en función de los errores en los ángulos de 90 y 112.5 grados y el error piramidal

A. Jaramillo Núñez

*Instituto nacional de astrofísica óptica y electrónica,  
Apartado Postal 51 y 216, Pue., México, 72000,  
e-mail: ajaramil@inaoep.mx*

A. Vera Marquina

*Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora,  
Apartado Postal 5-88, Hillo., Son., México, 83000,  
e-mail: avera@guaymas.uson.mx*

Recibido el 6 de junio de 2002; aceptado el 13 de agosto de 2003

Se deduce una expresión con el fin de mostrar la relación que hay entre los errores en los ángulos de 90 y 112.5 grados de un pentaprisma y el ángulo formado entre el haz de entrada y el de salida (ángulo de desviación). También se deriva otra expresión para mostrar la relación entre el error piramidal de cada una de las superficies pulidas del pentaprisma y la desviación del haz de salida con respecto al plano definido por los haces ideales de entrada y salida. Por último, se explica un método para construir un pentaprisma con un error particular en el ángulo de desviación y que hace uso de las ecuaciones halladas. El pentaprisma construido se empleó para caracterizar una máquina de medición por coordenadas (MMC) de grandes dimensiones.

*Descriptores:* Prismas; metrología; óptica geométrica.

An expression is derived showing the relationship between the errors in the 90 and 112.5 degree angles of a pentaprism and the angle formed between entrance and exit beams (angle of deviation). A relationship between the pyramidal errors of each prism surface and the deviation of the exit beam from the plane defined by the entrance and ideal exit beams is also deduced. Finally, a method for constructing a pentaprism with a particular error making use of these derivations is discussed. The fabricated pentaprism is used to characterize a coordinate measuring machine of large dimensions.

*Keywords:* Prismas; metrology; optical geometric.

PACS: 42.79.B; 06.20; 42.15

## 1. Introducción

Es posible hallar en la literatura métodos para medir los errores existentes en los ángulos de las caras de un pentaprisma [1, 2], así como para medir el ángulo de desviación [3, 4]. Sin embargo, no hay información acerca de cómo estos errores influyen en el ángulo de desviación del haz de salida. Cuando un pentaprisma se requiere, por ejemplo, para formar una escuadra óptica [La escuadra óptica es esencialmente un pentaprisma que dobla 90 grados el eje óptico, principalmente con el fin de poder realizar un alineamiento perpendicular a él. Un plano normal al eje óptico puede generarse rotando el prisma alrededor de la línea de visión. Usando un divisor de haz cementado en una de las superficies reflectoras del pentaprisma es posible generar dos haces ortogonales [5]], es necesario que el ángulo formado entre el haz de entrada y de salida sea recto. Sin embargo, en un taller óptico esto es imposible de lograr, ya que los errores en los ángulos hacen que el ángulo de desviación sea diferente de noventa grados. En un pentaprisma ideal en conjunción con un divisor de haz, los dos haces generados y el haz incidente están en el mismo plano, sin embargo, en la práctica esto es muy difícil de lograr debido a la presencia de error piramidal en las superficies reflectoras y refractoras del prisma. En las siguientes secciones son desarrolladas dos ecuaciones, las cuales mues-

tran la dependencia del ángulo de desviación del haz de salida en función de los errores mencionados anteriormente. El cálculo se realiza considerando que los errores son sólo de algunos segundos. Conocer tal relación fue imprescindible, ya que requeríamos construir un pentaprisma con un cierto error en el ángulo de desviación, para emplearlo en la caracterización de una máquina de medición por coordenadas (MMC) de grandes dimensiones. Por último, se describe el método empleado para construir el pentaprisma, el cual ilustra cómo se pueden usar las ecuaciones halladas durante el proceso de fabricación.

## 2. Planteamiento del problema

En el INAOE se construyó una MMC (ver Fig. 1) capaz de medir en un volumen de  $5 \times 6 \times 4$  metros cúbicos. Una posible primer tarea de la máquina es medir 192 superficies casi planas de  $3 \times 5$  metros con una precisión del orden de 10 micras, lo cual en este momento no es capaz de hacer. En general, hay dos estrategias [6] que se emplean para mejorar la precisión de las MMC

1. Evitando errores mecánicos. Esto se obtiene mejorando el diseño o aumentando la precisión en la manufactura de las piezas mecánicas.

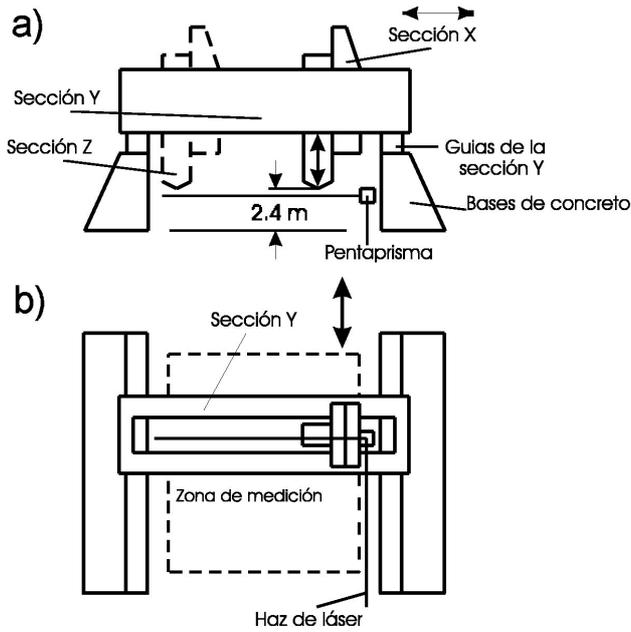


FIGURE 1. Esquema de la MMC construida, a) vista frontal, b) vista aérea.

2. Compensando los errores mediante software. Esto se logra con ayuda de un software que corrija los errores geométricos sistemáticos y los errores inducidos por cambios de temperatura.

Debido a que es demasiado caro mejorar la eficiencia de la máquina aplicando el punto uno antes descrito, nos inclinamos por hacer uso del punto dos. Así que para resolver el problema se pensó en caracterizar un plano horizontal, dentro del volumen de medición, con dimensiones similares a las de las superficies a medir y con los datos obtenidos construir una tabla de corrección que permita alcanzar la precisión deseada.

En el caso de MMC pequeñas la caracterización de un plano se hace empleando instrumentos, tales como autocolimadores, interferómetros láser, etc., los cuales se colocan sobre la mesa de trabajo. La caracterización se realiza a lo largo de líneas las cuales se unen para formar lo que se conoce como *patrón de unión Jack* [7] (ver Fig. 2). Debido a que la MMC de INAOE no cuenta con una mesa de trabajo y además el plano que se desea caracterizar está a una altura de 2.40 m, no es fácil usar los métodos de medición tradicionales.

La primera vez que se caracterizó el plano se hizo colocando un láser sobre un tripié y se alineó el haz colineal al desplazamiento de la sección X de la máquina (ver Fig. 3a). La alineación se verificó usando un detector de cuadrante, colocado en la parte baja de la sección Z (cabeza de medición), de tal manera que cualquier variación en la rectitud de la máquina, respecto al haz de láser, se interpretó como un error de movimiento. Debido a que la máquina en la dirección en la que se caracterizó tiene una longitud de 6 metros

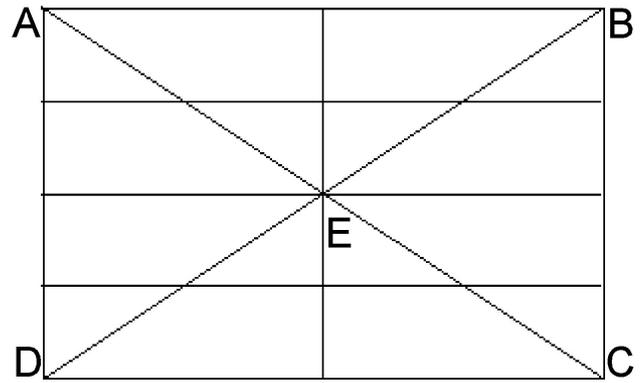


FIGURA 2. Esquema que muestra la unión de las líneas caracterizadas para formar el patrón de unión Jack.

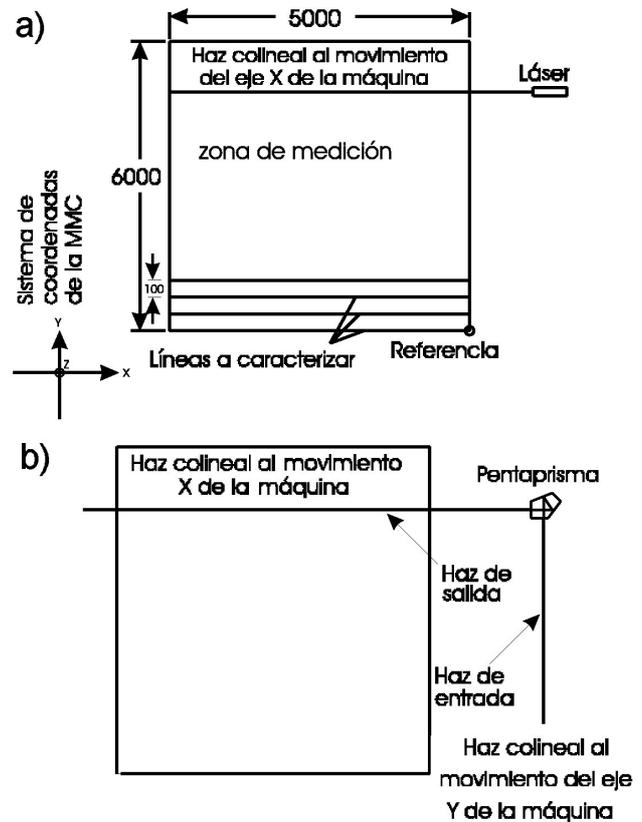


FIGURA 3. Caracterización del plano para construir la tabla de corrección, a) caracterización de las líneas paralelas al eje X de la máquina, b) caracterización usando un pentaprisma.

y la separación entre líneas a caracterizar es de 100 milímetros, todo el proceso se repitió 61 veces. A este número hay que agregar las tres líneas que están en la dirección perpendicular a las anteriores y las dos diagonales (las cuales son necesarias para formar el patrón de unión Jack), dando un total de 66. En esa ocasión, el tiempo invertido fue de aproximadamente 20 días hábiles. Como es obvio, el tiempo empleado fue demasiado, por lo que era necesario agilizar el proceso de la caracterización para reducir el tiempo total.

Debido a que el mayor tiempo invertido en la caracterización se empleó en mover el tripié y alinear el haz de láser respecto al movimiento de la sección X, se pensó en usar una escuadra óptica para reducir el tiempo invertido en el alineamiento del haz. Con el uso de este elemento sólo tendríamos que alinearlo en la dirección Z (ver Fig. 3b), puesto que en la dirección X automáticamente quedaría alineado, suponiendo que el haz de entrada es paralelo al eje Y.

En un pentaprisma ideal y una MMC con sus ejes ortogonales, el haz de salida del prisma es paralelo al eje X de la máquina, suponiendo nuevamente que el haz de entrada es colineal al eje Y, por lo que las desviaciones a medir serán pequeñas ya que solo se deberán a los errores de rectitud de la MMC. Sin embargo, en nuestro caso, los ejes de la máquina no son ortogonales, por lo que al desplazar la cabeza de medición en dirección paralela al eje X, el haz de referencia en esta dirección siempre se está alejando del centro del sensor correspondiente, puesto que el haz y el desplazamiento de la cabeza de medición no mantienen el paralelismo. Esto no sería mayor problema, excepto por el hecho de que los sensores de cuadrante usados tiene un rango de medición limitado ya sea por el diámetro del haz y/o por el diámetro del área sensora. Por lo tanto, los desplazamientos transversales del haz deben ser menores que ese valor máximo.

Debido a las dimensiones y complejidad de la MMC, en vez de corregir en la máquina el error de ortogonalidad entre los ejes X y Y, lo que se propone es fabricar un pentaprisma que genere una “escuadra óptica” con el mismo error de ortogonalidad que los ejes de la MMC, de manera que al desplazar la cabeza de medición a lo largo del eje X, el haz correspondiente siempre se encuentre dentro del área de detección del sensor y que el desplazamiento sea tal que pueda ser medido. El error de ortogonalidad implica una compensación adicional descrita por una relación lineal, la cual es fácil de calcular una vez conocido el valor angular del error, siendo en este caso de -20 seg. de arco.

### 3. Cálculo del error en el ángulo de desviación

Las líneas sólidas de la Fig. 4a muestran un pentaprisma [8]. Con el fin de ayudar en el tratamiento matemático, algunos de los lados fueron prolongados con líneas punteadas para formar triángulos. Los ángulos son representados por las letras  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , y los lados por  $A, B, C, D$  y  $E$ . Para un pentaprisma ideal,  $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 112.5$  grados,  $a_1 = 90$  grados,  $X = Y = 45$  grados y el ángulo de desviación es igual a 90 grados.

En la Fig. 4b se muestra el caso de un haz que incide en un pentaprisma real. Supóngase que el haz viaja a lo largo del eje X e incide sobre la superficie A, la cual es paralela al eje Y. Supóngase además que los ángulos  $a_1, a_5, a_6, a_8$  y sus respectivos errores son:

$$a_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \tag{1}$$

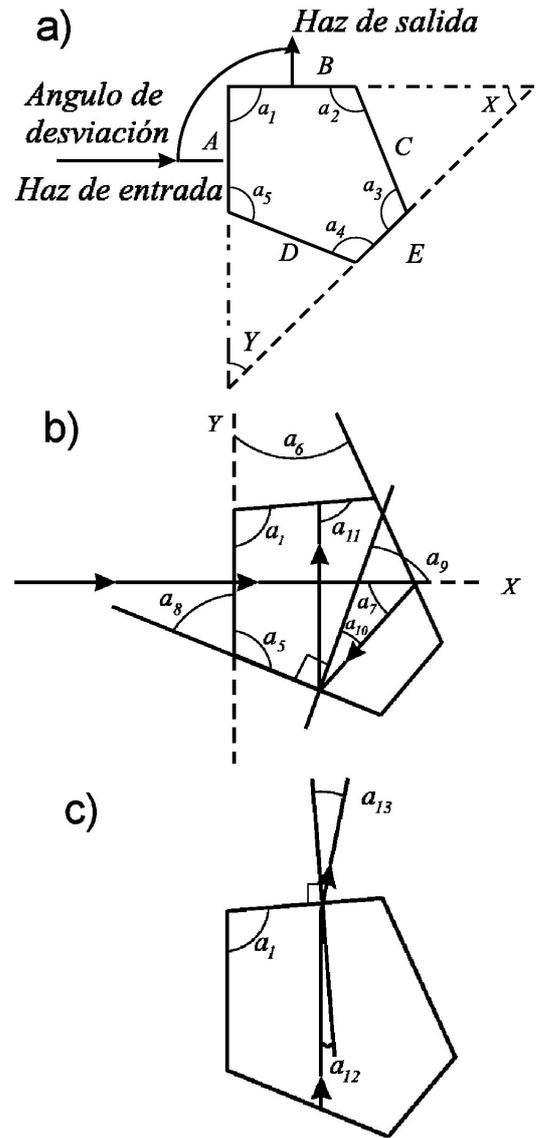


FIGURA 4. Geometría de los ángulos de reflexión y refracción en un pentaprisma, en el plano definido por los haces de entrada y salida.

$$a_6 = \frac{\pi}{8} + \beta, \tag{2}$$

$$a_5 = \frac{5\pi}{8} + \delta, \tag{3}$$

$$a_8 = \frac{3\pi}{8} - \delta. \tag{4}$$

Para obtener las relaciones anteriores se usó el hecho de que  $\pi/2 = 90^\circ, \pi/8 = 22.5^\circ$ , etc. y los errores  $\beta, \delta, \text{ y } \varepsilon$  están en radianes. Después de reflejarse en la superficie C el haz es deflectado por  $a_7$ , donde

$$a_7 = 2a_6 = \frac{\pi}{4} + 2\beta. \tag{5}$$

Considerando que el ángulo  $a_8 = a_9$ , podemos expresar el

ángulo de incidencia en la superficie D como

$$a_{10} = \pi - (\pi - a_9) - a_7 = a_8 - a_7 = \frac{\pi}{8} - \delta - 2\beta. \quad (6)$$

De acuerdo a la ley de la reflexión, los ángulos de incidencia y reflexión son iguales en la superficie D, por lo tanto el ángulo  $a_{11}$  puede ser expresado como

$$a_{11} = \pi - [a_{10} + (a_9 - \varepsilon)] = \frac{\pi}{2} + 2(\beta + \delta) + \varepsilon, \quad (7)$$

y por consiguiente el haz incide sobre la superficie B (ver Fig. 4c) con un ángulo

$$a_{12} = 2(\beta + \delta) + \varepsilon. \quad (8)$$

Si consideramos que los ángulos de incidencia en B son pequeños

$$2(\beta + \delta) + \varepsilon \ll 1^\circ; \quad (9)$$

entonces, aplicando la ley de Snell y un índice de refracción del aire  $n_o = 1$ , obtenemos

$$na_{12} = a_{13}, \quad (10)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del material del prisma. Sustituyendo (8) en (10) tenemos

$$a_{13} = n[2(\beta + \delta) + \varepsilon], \quad (11)$$

y finalmente el ángulo de desviación  $\theta_{dev}$  está dado por

$$\theta_{dev} = \frac{\pi}{2} + a_{13} - \varepsilon = \frac{\pi}{2} + n[2(\beta + \delta) + \varepsilon] - \varepsilon, \quad (12)$$

donde el error  $\alpha$  estará expresado por los dos últimos términos:

$$\alpha = n[2(\beta + \delta) + \varepsilon] - \varepsilon \quad (13)$$

Nótese que el término  $\varepsilon$  tiene signo negativo en la Eq. (12). Esto surge porque el ángulo  $a_{13}$  es medido con respecto a la normal de la superficie B (ver Fig. 4c), la cual supusimos inclinada respecto al eje X por un ángulo  $\varepsilon$ . La Ec. (13) muestra que el error en el ángulo de desviación se cancela cuando

$$n[2(\beta + \delta) + \varepsilon] - \varepsilon = 0. \quad (14)$$

Aunque es improbable que de manera fortuita se pueda satisfacer completamente la ecuación anterior, el error puede ser reducido considerando algunos signos opuestos en los términos de los errores individuales.

La Ec. (14) muestra que no sólo en un pentaprisma ideal se puede tener un ángulo de desviación de 90 grados, sino también en un pentaprisma real, siempre que se cumpla tal relación.

Ya que para resolver nuestro problema se requiere un pentaprisma con un cierto error en el ángulo de desviación, la ecuación que se tomó en cuenta para su construcción fue la (13).

### 4. Cálculo del error en el ángulo de desviación debido a error piramidal

La Fig. 5a muestra el pentaprisma de la Fig. 4b visto en el plano XZ. Ahora supongamos que la superficie C tiene un cierto error piramidal. Entonces, el haz reflejado forma un ángulo  $b_1$  con respecto al plano XY, donde

$$b_1 = 2\theta. \quad (15)$$

Supongamos también que la superficie D tiene un error piramidal  $\phi$  (ver Fig. 5b), por lo tanto el haz incide sobre esta superficie a un ángulo  $b_2$  dado por

$$b_2 = 2\theta + \phi, \quad (16)$$

y es subsecuentemente reflejado a un ángulo

$$b_3 = 2\theta + 2\phi. \quad (17)$$

Considerando finalmente el error piramidal  $\omega$  en la superficie B (ver Fig. 5c), el haz incide sobre esta superficie a un ángulo  $b_4$  dado por

$$b_4 = 2\theta + 2\phi + \omega. \quad (18)$$

El ángulo de refracción  $b_5$  puede ser obtenido siguiendo los mismos argumentos dados en la Sec. 3, por lo tanto, el ángulo de desviación  $\chi$  medido respecto al eje X está dado por

$$\chi = n[2(\theta + \phi) + \omega] - \omega. \quad (19)$$

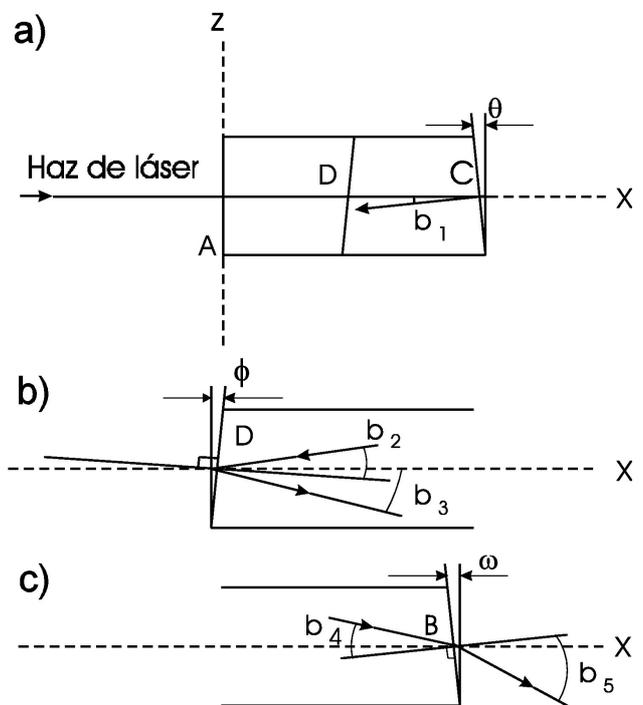


FIGURA 5. Geometría de los ángulos de reflexión y refracción en un pentaprisma colocado perpendicularmente al plano definido por los haces de entrada y salida (en presencia de error piramidal). Los ángulos  $\theta, \phi$  y  $\omega$  han sido grandemente exagerados.

Como se puede observar, la Ec. (19) es semejante a la Ec. (13), así que los mismos argumentos dados en la sección anterior son aplicables aquí.

### 5. Construcción del pentaprisma

A continuación se describe el método empleado para construir el pentaprisma donde se aplicaron las ecuaciones deducidas anteriormente. Antes de iniciar la construcción se decide qué valores serían aceptables para los errores  $\beta$ ,  $\delta$  y  $\varepsilon$ . La elección de los valores se hace tomando en cuenta la experiencia del técnico del taller de óptica principalmente y los métodos de medición con los que se cuenta. El valor que se eligió para los errores  $\varepsilon$  y  $\beta$  fue de veinte segundos. Introduciendo el valor anterior y los valores de  $\alpha = -20$  y  $n = 1.5168$  en la Ec. (13), se halló el valor para  $\delta$ , el cual fue de -16.8.

Hay que aclarar que no forzosamente se van a obtener los valores propuestos ya que al ir construyendo el pentaprisma los valores de los errores  $\varepsilon$  y  $\beta$  pueden variar, sin embargo, gracias a la deducción de la Ec. (13). El valor del error de  $\delta$  puede ser recalculado para obtener aún el error deseado en el ángulo de desviación.

El primer paso consistió en construir un prisma de ángulo recto (ver Fig. 6a). El ángulo  $a_1$  y sus respectivos errores,  $\varepsilon$  y  $\omega$ , se midieron empleando la técnica descrita en la Ref. 9. Con este método los errores  $\varepsilon$  y  $\omega$  pueden medirse con una precisión menor a 1 segundo de arco, lo cual es importante, puesto que este ángulo se usa como referencia en mediciones subsecuentes.

El siguiente paso fue cortar una de las esquinas del prisma, generando por ejemplo la superficie A (ver Fig. 6b), al pulir la superficie cortada. Siguiendo el método descrito en la Ref. 2 el error  $\beta$  en el ángulo  $a_2$  y el error piramidal  $\theta$  son obtenidos.

Después de conocer los valores de los errores  $\beta$  y  $\varepsilon$  se emplea nuevamente la Ec. (13) para recalculer el nuevo valor de  $\delta$ . Usando los dos primeros valores de la columna tres de la tabla, se recalculó el valor de  $\delta$  el cual fue  $\delta = -37.5$ , para  $\alpha = -20$ . Por último, se corta la otra esquina y después de pulirla, se usa la misma técnica empleada en el caso anterior [2] para medir los errores  $\delta$  y  $\varphi$  asociados con  $a_5$ . Empleando los tres primeros datos de la cuarta columna de la Tabla I y la Ec. (13) se calculó el error  $\alpha$  en el ángulo de desviación, el cual fue de -7 seg. de arco, esto es, nos

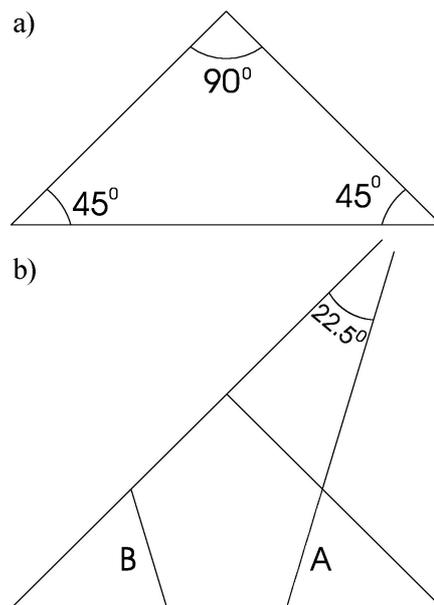


FIGURA 6. Construcción del pentaprisma, a) prisma de ángulo recto, b) corte de las esquinas para formar el pentaprisma.

faltaron -13 segundos más para obtener el valor deseado, aun cuando sólo hubo una discrepancia de 6.5 segundos entre el valor recalculado y el obtenido para  $\delta$ .

La incertidumbre para el valor de  $\alpha$  se puede calcular diferenciando la Ec. (13) respecto a  $\alpha$ , lo cual da

$$d\alpha = [2(\beta + \delta) + \varepsilon]dn + (n + 1)d\varepsilon + 2n(d\beta + d\delta). \quad (20)$$

Tomando valores de incertidumbre para  $n$  del catálogo [10]  $dn = .001$  y empleando los valores de incertidumbre de las columnas cuatro y cinco de la Tabla I, obtenemos una incertidumbre para  $d\alpha = 19.7$  seg. de arco. Como se puede ver, ésta es grande si la comparamos con el valor medido. La contribución mayor proviene del tercer término de la Ec. (20), así que para reducirla sólo hay dos formas: elegir un vidrio con un índice menor a uno o disminuir los valores de  $d\beta$  y  $d\delta$ . Un método alternativo de medición podría ser el que se indica en la [1]. Con este método las incertidumbres de  $d\beta$  y  $d\delta$  podrían ser menores a un segundo, de tal manera que la incertidumbre para  $d\alpha$  podría ser del orden de 2.5 segundos de arco. Un inconveniente de este método es que no se puede medir el error piramidal de las superficies involucradas.

TABLA I. Valores predeterminados y obtenidos de los errores

Ang.	Predeterminado (seg. de arco)	Recalculado (seg. de arco)	Obtenido (seg. de arco)	Obtenido (seg. de arco)	Incertidumbre (seg. de arco)
$a_1$	$\varepsilon = \omega = 20$	$\varepsilon = 17$	$\varepsilon = 17$	$\omega = 14$	$\pm 5$
$a_2$	$\beta = \theta = 20$	$\beta = 28$	$\beta = 28$	$\theta = 24$	$\pm 3$
$a_5$	$\delta = \phi = -16.8$	$\delta = -37.5$	$\delta = -31$	$\phi = -17$	$\pm 3$
$\alpha$	$\alpha = -20$	$\alpha = -20$	$\alpha = -7$		$\pm 19.7$
$\chi$	$\chi = -20$			$\chi = 3$	$\pm 19.4$

Aun cuando la incertidumbre  $d\alpha$  es grande, realmente no se debe a que las mediciones se hayan hecho mal o que los métodos empleados no sean precisos, sino que todo el problema está en la manera en que quedó expresada la Ec. (13). Para obtener una incertidumbre del orden de un segundo se requiere que las incertidumbres en  $d\beta$  y  $d\delta$  sean de .1 segundo (ya que el segundo término de la Ec. (20) empieza a ser también significativo), lo cual no es sencillo de conseguir con los métodos reportados.

El mismo procedimiento realizado para  $\alpha$  se empleó en el caso de  $\chi$ , incluso se eligieron los mismos valores para los errores piramidales  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\omega$ . Los resultados obtenidos se muestran en la quinta columna de la Tabla I.

## 6. Cálculo riguroso

Las Ecs. (13) y (19) se dedujeron considerando que el cálculo puede realizarse empleando trazo de rayos en dos planos ortogonales de manera independiente. En general, esto no es posible, por lo tanto, para calcularlas se debe hacer uso de las leyes de la reflexión y la refracción en su forma vectorial. En esta sección se hace una deducción haciendo uso del cálculo vectorial y empleando las mismas suposiciones hechas en las Secs. 3 y 4.

Las leyes de reflexión y refracción en forma vectorial se pueden escribir como [8]

$$\vec{S}_2 = \vec{S}_1 - 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{P})\vec{P}, \quad (21)$$

$$\vec{S}_2 = \mu \vec{S}_1 - \Gamma \vec{P}, \quad (22)$$

respectivamente, donde

$$\mu = \frac{N}{N'}, \quad (23)$$

$$\Gamma = \cos(I') - \frac{N}{N'} \cos(I), \quad (24)$$

$S_1$  es un vector unitario a lo largo de la dirección del rayo incidente,  $S_2$  es un vector unitario a lo largo del rayo reflejado (refractado),  $P$  un vector unitario a lo largo de la normal a la interfase,  $N$  el índice de refracción del medio incidente,  $N'$  el índice de refracción del medio refractor,  $I$  e  $I'$  son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente.

Para el caso del pentaprisma que estamos tratando se tienen dos superficies reflectoras y una refractora, por lo tanto la Ec. (21) se debe usar dos veces y la (22) sólo una. En el caso general en que el haz de entrada incide sobre el pentaprisma a cualquier ángulo, ambas ecuaciones se deben usar dos veces. Es posible hallar en la literatura [11] formas recursivas de las ecuaciones anteriores, las cuales hacen el cálculo más sencillo.

El resultado de emplear la forma vectorial es la siguiente:

$$S_x = \mu \left[ -\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\beta\right) + a \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \delta\right) \right] - \Gamma \sin \varepsilon, \quad (25)$$

$$S_y = \mu \left[ -2 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \beta\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \beta\right) + a \cos\left(\frac{\pi}{8} + \delta\right) \right] - \Gamma \cos \varepsilon, \quad (26)$$

$$S_z = \mu \left[ -2 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \beta\right) \sin \theta - a \sin \phi \right] + \Gamma \sin \omega, \quad (27)$$

donde

$$a = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\beta\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \delta\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \beta\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \beta\right) - 4 \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \beta\right) \sin \phi \sin \theta. \quad (28)$$

En este caso el vector  $S$  es un vector unitario a lo largo de la dirección del haz de salida.

Aun cuando con estas ecuaciones se puede calcular el ángulo de desviación del haz de salida, son imprácticas para resolver el problema que teníamos, ya que sería muy laborioso hallar unas relaciones semejantes a las de las Ecs. 13 y 19, para poder construir el pentaprisma deseado.

Como un intento de comparar la validez de las Ecs. (13) y (19) con respecto a la forma vectorial se hizo lo siguiente. Vectorialmente se calculó el ángulo de incidencia sobre la superficie B (ver Fig. 4c) y el resultado es el que está dentro de los paréntesis cuadrados en la Ec. (26). Posteriormente se graficó esa expresión y para poder hacerlo fue necesario dar valores a los errores,  $\beta$ ,  $\theta$  y  $\phi$ . Por simplicidad, se usaron los mismos valores proporcionados en la segunda columna de la Tabla I, y para  $\delta$  se varió su valor de -17.5 a -16.5 segundos.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig 7. Tal gráfica fue hecha en el paquete MATHEMATICA y como se puede observar no es posible hallar un valor para el caso en que  $\delta = 16.8$ . Esto se debe a que el resultado es tan cercano a 1, en el rango que se proporcionó, que en todo el eje Y el paquete sólo pone el valor de 1, incluso, este valor se sigue manteniendo aun cuando el intervalo para  $\delta$  se amplía de -120 a 0 segundos. Debido a esto, el valor del ángulo de incidencia que se empleó para evaluar  $\Gamma$  fue el de  $\varepsilon$ , esto es  $I = \varepsilon$ .

Por último, se graficó la Ec. (26) y para poder hacerlo fue necesario dar valores a los errores  $\varepsilon$  y  $\omega$ . Nuevamente se tomaron los valores dados en la segunda columna de la Tabla I. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig 8. Para obtener esta gráfica el error de  $\delta$  se varió también de -17.5 a -16.5 segundos. Aun cuando la gráfica no es una línea recta, nuevamente se puede observar que los valores son muy cercanos a 1, de tal manera que el paquete no puede resolver para poner otros valores diferentes. Otra vez, el valor de 1 en la gráfica se sigue manteniendo aun cuando el intervalo para  $\delta$  se amplía de -120 a 0 segundos.

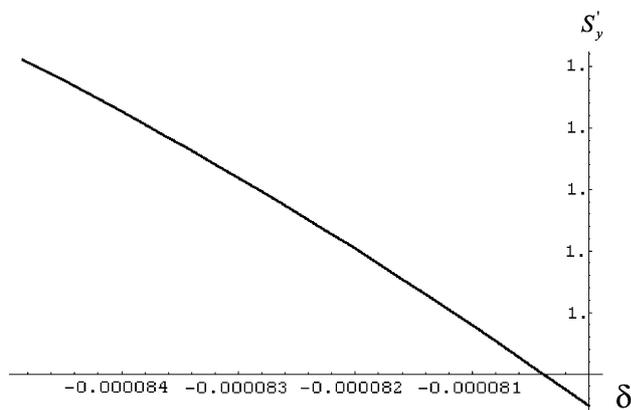


FIGURA 7. Gráfica obtenida en el paquete Matemática para hallar el valor del ángulo de incidencia sobre la superficie B. Como se puede ver el paquete no puede resolver los valores en el eje Y.

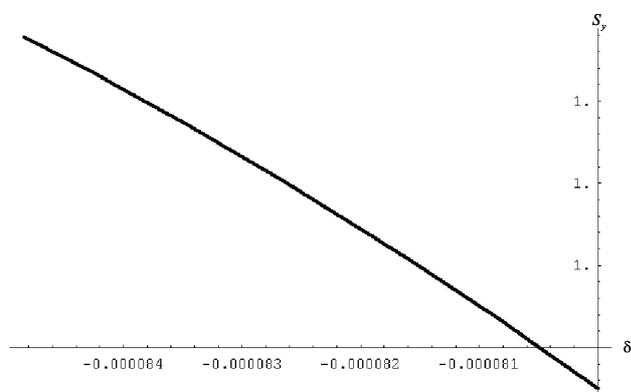


FIGURA 8. Se muestra la magnitud del vector  $S_y$  después de haber cruzado el pentaprisma y nuevamente el paquete no puede resolver los valores para el eje Y.

El valor de uno en la gráfica 2 significa que para los errores empleados, el haz refractado se puede considerar como colineal al eje Y (dentro del límite de resolución del paquete MATHEMATICA). Por lo tanto, se puede concluir que es válido el método empleado para hallar las Ecs. (13) y (19) para los valores propuestos, ya que el haz no se desvía apreciablemente de los planos ortogonales como para creer que es necesario realizar un tratamiento vectorial para resolver el problema.

Hallar un rango específico para saber hasta dónde son válidas las ecuaciones deducidas es muy laborioso, ya que en los cálculos hay que estar modificando cada una de las ecuaciones vectoriales pues dentro de ellas están involucrados los seis errores. Sin embargo, de los resultados obtenidos en las gráficas se puede decir que para los valores dados para  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\varepsilon$ , y  $\omega$ , y para  $\delta$  corriendo en el intervalo  $(-120, 0)$  los resultados concuerdan bastante bien con la deducción vectorial. Debido a que no estamos interesados en todo el intervalo (ver Fig. 9) es por eso que elegimos como rango de validez sólo el intervalo  $(-40, 0)$ .

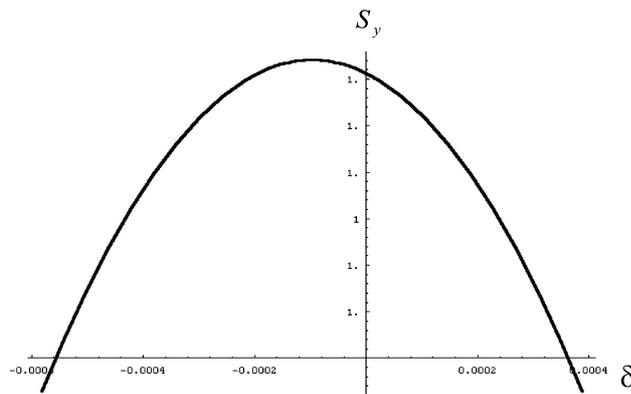


FIGURA 9. Gráfica obtenida con la Ec. (26) y los datos de la segunda columna de la Tabla I. En este caso el intervalo para  $\delta$  es  $(-120, 80)$ .

### 7. Caracterización del plano

Después de tener el pentaprisma se usó un arreglo diferente al empleado la primera vez (ver Fig. 10a). En este caso un haz de láser, el cual es alineado previamente colineal al movimiento de la máquina a lo largo del eje Y, incide en el pentaprisma fabricado y éste desvía el haz de tal manera que es colineal al movimiento del eje X de la máquina. Con el uso del pentaprisma, el haz que emerge de él sólo se requiere alinear en la dirección Z de la máquina (el láser se mantiene siempre fijo durante el proceso de la caracterización) ya que automáticamente el haz queda alineado en la dirección X. Después de terminar la caracterización de estas líneas se pasa a la caracterización de las tres líneas perpendiculares las cuales son necesarias para construir la tabla de corrección. Para caracterizarlas, el pentaprisma fabricado se coloca fuera del área de medición (ver Fig. 10b) y después se emplea otro que desvíe nuevamente el haz de salida, paralelo al movimiento de la máquina a lo largo del eje Y. Para caracterizar las diagonales ya no se emplea el pentaprisma sino que solamente se alinea el haz de láser respecto al movimiento diagonal de la cabeza de medición.

Como se comentó en la Sec. 2, las operaciones que más consumían tiempo en la caracterización fueron el proceso de alinear el haz y el de mover el tripié. Con el pentaprisma construido se redujo el tiempo invertido en el alineamiento del haz y para reducir el de mover el tripié se colocó sobre él una regla de aproximadamente 80 centímetros de longitud la cual se alineó previamente colineal al eje Y de la máquina. Sobre la regla se colocó una platina y sobre ella se colocó el pentaprisma. La regla se usó como riel sobre el cual se desplazó la platina cada cien milímetros, de tal manera que solo fue necesario mover y alinear el tripié 7 veces, en lugar de las 61 hechas la primera vez.

Con las dos modificaciones hechas el tiempo empleado en la segunda caracterización fue de siete días. Si tomamos en cuenta que la caracterización se desea hacer cada tres meses, entonces el ahorro en tiempo es considerable.

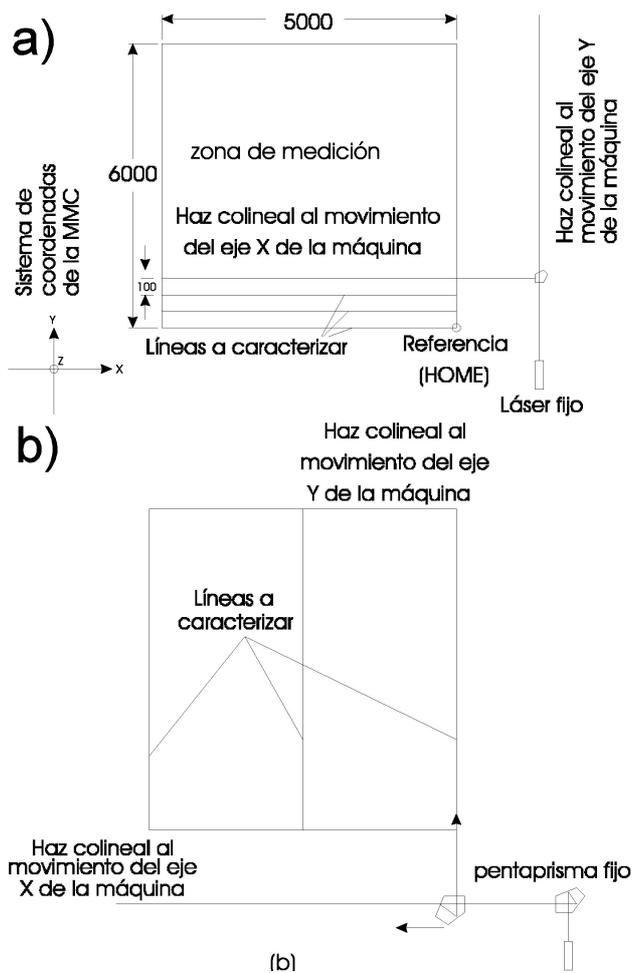


FIGURA 10. Arreglo empleado para caracterizar el plano usando el pentaprisma construido.

## 8. Comentarios

1. La manera en que se verificó la colinealidad entre el haz desviado por el pentaprisma y la trayectoria del desplazamiento del eje X de la máquina es la siguiente. Primero se coloca la sección X de la máquina (ver Fig. 1a) lo más cerca posible del pentaprisma y el detector de cuadrante (DC), colocado en la parte inferior de la sección Z (no se muestra en la Fig. 1a), se ajusta de tal manera que el centroide del haz coincida con los ejes del DC. Después se desplaza la sección X lo más

lejos posible del pentaprisma (aproximadamente 4 m) y se verifica la posición del centroide del haz de láser en el DC. Para el pentaprisma construido este desplazamiento fue del orden de 0 a 250 micras en la dirección X del DC. El resultado se expresa como un intervalo ya que la sección Y de la máquina no conserva siempre el mismo error en la ortogonalidad al desplazarse a lo largo de su trayectoria (ver Fig. 1b), debido a imperfecciones en la rectitud y paralelismo de sus guías, así que el valor depende de que línea se esté caracterizando.

2. Aún cuando la incertidumbre en el valor de  $\alpha$  es grande en nuestro resultado, ésta se puede mejorar empleando un goniómetro con mayor precisión, tal como se especifica claramente en la Ref. 2, ya que son las incertidumbres de  $d\beta$  y  $d\delta$  las que más contribuyen a ella. Sin embargo, en la práctica, el pentaprisma construido nos funcionó ya que en ninguna medición el haz se salió del área sensora del detector de cuadrante, lo cual era lo que más nos interesaba.
3. Para nuestra aplicación, realizar un esfuerzo más en controlar el error piramidal durante la construcción del pentaprisma no nos beneficiaba en nada, ya que los efectos que este defecto ocasionó fueron minimizados ajustando el tripié.

## 9. Conclusiones

Las expresiones derivadas en este trabajo permiten conocer de una manera aproximada el error en el ángulo de desviación de un pentaprisma, a partir del conocimiento de los errores angular y piramidal de cada superficie del prisma. Usándolas, se construyó un pentaprisma con un error particular en el ángulo de desviación el cual se empleó para caracterizar un plano horizontal en el volumen de medición de una máquina de medición de coordenadas.

Se describió también la técnica empleada para fabricar el pentaprisma donde se mostró cómo se pueden usar las expresiones deducidas durante la etapa de fabricación.

La intención de este trabajo no es mostrar que las ecuaciones halladas son mejores o más precisas que las deducidas con algún otro método, sino más bien la de mostrar que nos ayudaron a resolver un problema que se nos presentó.

1. M. Rao and K. Narasimha Rao, *Opt. Eng.* **37** (1998) 1368.
2. A. Jaramillo-Núñez and C. Robledo-Sánchez, *Opt. Eng.* **36** (1997) 2868.
3. O. Prakash and R.S. Ram, *J. Optics* (Paris) **26** (1995) 137.
4. A.F. Wagner, *Experimental Optics* (John Wiley and Sons, New York, USA, 1929) p. 115.
5. R.S. Sirohi and M.P. Kothiyal, *Optical components, systems, and measurement techniques* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1991) p. 194.
6. J. Bosch, *Coordinate measuring machines and systems* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1995) p. 279.
7. D. Whitehouse, *Handbook of surface metrology* (Inst. of physics publishing, London, 1994) pp. 120.
8. D. Malacara, *Optica básica* (Fondo de cultura económica, México, 1989) pp. 59 y 30.
9. A.K. Saxena and L. Yeswant, *Opt. Eng.* **29** (1990) 1516.
10. Schott Glass Technologies Inc., 400 York Avenue, Duryea, PA 18642.
11. R.K. Luneburg, *Mathematical theory of optics* (University of California Press, Los Angeles, USA, 1964) p. 368.