

Estabilidad robusta de la posición vertical de dos péndulos acoplados por un resorte

E. Muñoz Aguirre

*Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Tecnológica de la Mixteca
Km. 2.5, carretera a Acatlima, Huajuapán de León Oaxaca, México, 69000.
e-mail: emunoz@nuyoo.utm.mx*

Facultad de Física y Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

O. Alexandrova

Facultad de Mecánica y Matemática, Universidad Estatal de Moscú

Recibido el 13 de noviembre de 2002; aceptado el 30 de septiembre de 2003

En el presente trabajo se encuentran las ecuaciones que gobiernan el movimiento de dos péndulos acoplados por un resorte con constante de elasticidad K y se realiza un estudio sobre la estabilidad robusta cuando el sistema se somete a una aceleración funcional vertical. Asimismo, se hace un breve análisis sobre la influencia de la constante del resorte en la estabilidad del mismo.

Descriptores: Estabilidad robusta; principio del máximo de Pontriaguin; oscilaciones pequeñas.

In the present work we find the equations governing the movement of two coupled pendulums with a spring of elasticity constant K and we make a study of the robust stability when the system is subjected to a vertical acceleration. Likewise we make an brief analysis of the influence of the spring constant on the stability of the spring.

Keywords: Robust stability; Pontriaguin maximal principle; small oscillations.

PACS: 02.30Hq; 02.30Wd

1. Introducción

Una razón de ser de las matemáticas aplicadas es el aporte que brindan, con apoyo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, a una extensa variedad de situaciones de las ciencias en sus distintas disciplinas clasificadas como ciencias naturales. Dentro de éstas podemos mencionar a las biológicas, químicas y económicas; aunque nos referimos, con especial énfasis por su valiosa aportación sobre la tecnología, a la física. Es en esta última área en donde regularmente se encuentran algunos fenómenos mecánicos y eléctricos (por mencionar sólo dos clases) modelados por esta clasificación de ecuaciones diferenciales, tomando claramente en cada caso los ajustes pertinentes para simplificación de tales modelos. Precisamente este artículo trata de un tema enmarcado en el contexto de las matemáticas aplicadas, concretamente se tratará sobre un sistema de la física regularmente abordado en la bibliografía, como a continuación se describe.

Un fenómeno físico que se encuentra con frecuencia en la literatura científica inmerso en la mecánica, específicamente en el tema de las oscilaciones pequeñas, es la modelación y comportamiento de movimientos oscilatorios acoplados, el cual en diversas situaciones, y en particular en este artículo, consiste de dos péndulos acoplados por un resorte (unidos por un resorte colocado entre las varillas que suspenden las masas). Por ejemplo en las Refs. 1 y 2 tal modelo es empleado para mostrarlo como un sistema fascinante con dos grados de libertad, mientras que en la Ref. 3 se utiliza para estudiar el comportamiento de los modos de oscilación respecto a sus grados de libertad, concluyendo que, efectivamente, coinciden en número. Un tratamiento parecido se realiza en la Ref. 4.

El presente trabajo tiene como objeto de estudio a un sistema físico análogo al descrito en el párrafo anterior, sólo que presentará algunas variantes respecto al mostrado en las referencias enunciadas arriba en lo que se refiere al movimiento vertical del sistema, al lugar en donde es colocado el resorte y al dispositivo en los extremos del mismo para mantenerlo en determinada posición. Para dicho modelo se encuentran las ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el movimiento de las masas, tomando en cuenta las simplificaciones mencionadas en su momento y además se realizará un análisis cualitativo y cuantitativo del modelo matemático, principalmente sobre la estabilidad del sistema cuando interviene una aceleración vertical perteneciente a un conjunto funcional. El hecho de que esta función se mantenga variando en tal conjunto, quiere decir que se estudiará la estabilidad robusta o estabilidad absoluta del sistema. Los conceptos de estabilidad en los términos que se tratarán en este escrito, los podemos encontrar en las Refs. 5 y 6 y en un sentido más amplio, en la Ref. 7.

Nuestro estudio se basa principalmente en el teorema de gran relevancia conocido en la literatura con el nombre de principio del máximo de Pontriaguin [8]. Este resultado se encuentra enunciado en su formulación hamiltoniana en la Ref. 9, justo como se utiliza en el presente trabajo y tal como se utilizó en la mencionada referencia para obtener el teorema principal sobre la resonancia principal generalizada. El enfoque que se abordará para la demostración del resultado preliminar al teorema culminante de este artículo, presenta similitudes al enfoque presentado en la Ref. 9, aunque se toma en consideración que en cierto sentido es “inverso” al ahí efectuado. El adjetivo inverso se explica porque en la ac-

tual presentación se estudia el comportamiento opuesto de las soluciones en lo que respecta a la evolución o comportamiento de las amplitudes de las oscilaciones cuando transcurre el tiempo, ya que mientras en la mencionada referencia se estudia el crecimiento de dichas amplitudes, en el presente escrito estudiamos el decrecimiento de ellas, el cual como inmediatamente se entiende, es un comportamiento opuesto. Es decir; en la Ref. 9 se estudia la resonancia del sistema de ecuaciones con dos perturbaciones, mientras que en el presente texto se estudia la estabilidad de nuestro sistema. Mencionamos que este enfoque se puede realizar, porque en el tratado aquí expuesto se cuenta solamente con una perturbación.

Este artículo se llevará a cabo en tres etapas. En la primera se toma como base la segunda ley de Newton, así como el cálculo de los momentos de inercia respecto del eje de rotación perpendicular al plano de los soportes de las varillas que suspenden las masas, haciendo además algunas consideraciones sobre las masas y el comportamiento del resorte con el fin de simplificar el modelo, y se encuentran las ecuaciones diferenciales ordinarias de oscilaciones pequeñas que gobiernan el movimiento de nuestro modelo físico. Posteriormente, en la segunda etapa, se obtiene un teorema sobre la estabilidad absoluta, cuya demostración se describe muy rápido y sin entrar en mucho detalle, puesto que utiliza las mismas técnicas desarrolladas en la demostración del principal resultado en la Ref. 9. Más adelante, en esta misma etapa, con ayuda del teorema demostrado aquí mismo y junto con algunas transformaciones al sistema obtenido en la etapa previa, obtenemos el resultado principal y motivo del presente trabajo. En la tercera y última parte se hace un breve análisis sobre la influencia que tiene en la estabilidad de nuestro sistema la constante del resorte, obteniéndose algunas desigualdades dependientes de la aceleración, de la constante que aparece en la proporcionalidad de la fuerza de fricción o disipativa, del momento de inercia de las masas y de las magnitudes que tienen las longitudes de los soportes tanto del resorte como de las masas.

2. Ecuación de oscilaciones pequeñas

Como se describió en la Introducción, el modelo físico que se estará estudiando consiste de dos péndulos acoplados por un resorte colocado en la forma y con las características que se ilustran en la Fig. 1.

Con el fin de simplificar el modelo para obtener las ecuaciones diferenciales de oscilaciones pequeñas que rigen el movimiento de las masas de los péndulos, se asumen las siguientes condiciones:

- El resorte permanece siempre horizontal y a la misma distancia l_* respecto de los soportes C y D mostrados en la Fig. 1, lo cual se logra por medio de algún mecanismo implementado en los extremos del resorte en los puntos A y B en la misma figura. Además este mecanismo se implementa de tal manera que no influya en

la estabilidad de nuestro sistema, lo cual quiere decir que lo supondremos sin masa.

- Las varillas que suspenden las masas de los péndulos se presuponen de masa nula y las longitudes de éstas son iguales. Esta distancia se denotará por l .
- Las masas en los extremos de las varillas son de la misma magnitud y en este caso a ambas las denotaremos por m , cumpliéndose la relación $m_1 = m_2 = m$.

Además de lo considerado en la lista previa, se da por hecho que el resorte cumple plenamente la ley de Hooke y que tiene una constante de proporcionalidad K , mientras que la aceleración vertical $a(t)$ pertenece a un conjunto funcional de funciones continuas por tramos o sucesionalmente continuas (denotaremos este último concepto por la abreviatura SC). Tales funciones cuales se relacionarán por una inclusión funcional en su momento.

Con el fin de que el resorte influya en el movimiento de los péndulos, se supone que las condiciones iniciales sobre los ángulos de desviación de cada péndulo respecto de la vertical son $\varphi_1(t_0) \neq \varphi_2(t_0)$, lo cual se traduce en $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$ o en $\varphi_1(t_0) > \varphi_2(t_0)$. Aquí analizaremos el primer caso, el segundo se trata de forma análoga.

Para encontrar las ecuaciones que modelan el movimiento nos remitimos a la segunda ley de Newton, la cual se aplica primero al péndulo con ángulo de desviación φ_1 , tomando en consideración al momento de inercia rotacional de la masa m respecto del eje ubicado hacia afuera del plano en el punto C de la Fig. 1. También se supone que en los soportes de las varillas del péndulo en el sistema, mostrados con los puntos C y D en dicha figura, existe una fuerza de rozamiento o fuerza

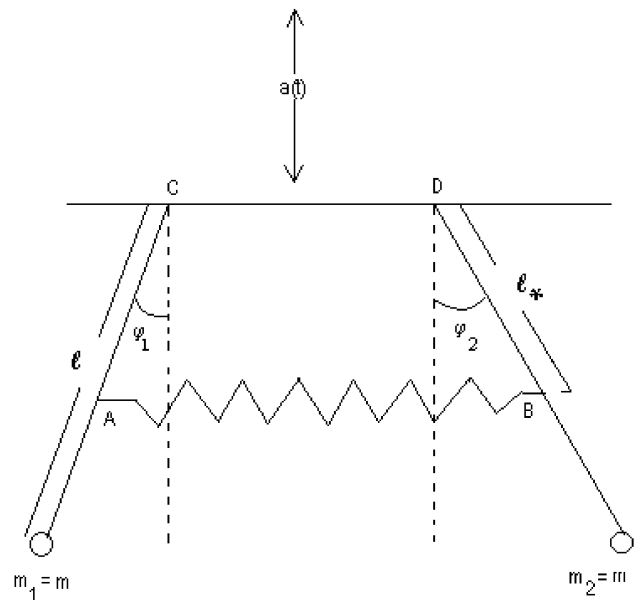


FIGURA 1. En esta figura se muestra un esquema sobre el acoplamiento de los péndulos con el resorte colocado entre ambos, así como cada uno de los componentes del sistema físico involucrados en el modelo matemático.

disipativa proporcional a la primera derivada (velocidad), según se conoce de la teoría clásica. A esta fuerza la denotamos respectivamente, por $\varepsilon\dot{\varphi}_1$ y $\varepsilon\dot{\varphi}_2$ en cada soporte. De esta forma, analizando el diagrama de fuerzas para la masa del péndulo con ángulo φ_1 y resumiendo lo comentado en el presente párrafo, se llega a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal para el primer péndulo:

$$\zeta\ddot{\varphi}_1 = -mgl \operatorname{sen} \varphi_1 + l_*K(\varphi_2 - \varphi_1) - mla(t) \operatorname{sen} \varphi_1 - \varepsilon\dot{\varphi}_1, \quad (1)$$

donde ζ es el momento de inercia de la respectiva masa y K es la constante del resorte proporcionada por la ley de Hooke, siendo precisamente en el segundo término del segundo miembro de la Ec. (1) donde se pone de manifiesto dicha ley.

Trabajando de forma similar para el péndulo de ángulo de desviación φ_2 se tiene la ecuación diferencial

$$\zeta\ddot{\varphi}_2 = -mgl \operatorname{sen} \varphi_2 + l_*K(\varphi_2 - \varphi_1) - mla(t) \operatorname{sen} \varphi_2 - \varepsilon\dot{\varphi}_2. \quad (2)$$

Escribiendo todos los términos de (1) y (2) en el primer miembro, dividiendo por el momento de inercia y considerando ángulos muy pequeños, de tal manera que se cumplan las relaciones $\operatorname{sen} \varphi_1 \approx \varphi_1$ y $\operatorname{sen} \varphi_2 \approx \varphi_2$, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acoplado:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\varepsilon}{\zeta}\dot{\varphi}_1 + \left(\frac{mgl}{\zeta} + \frac{ml}{\zeta}a(t) + \frac{l_*K}{\zeta}\right)\varphi_1 - \frac{l_*K}{\zeta}\varphi_2 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{\varepsilon}{\zeta}\dot{\varphi}_2 + \left(\frac{mgl}{\zeta} + \frac{ml}{\zeta}a(t) + \frac{l_*K}{\zeta}\right)\varphi_2 - \frac{l_*K}{\zeta}\varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

donde

$$a(t) \in W = \{a(t) \in SC \mid |a(t)| \leq a^+, a^+ > 0\}. \quad (4)$$

Es así como se ha encontrado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3), las cuales modelan el movimiento de nuestro sistema. El conjunto restricción W es determinado con anterioridad, así como las propiedades que el posee. Se sabe que la desigualdad para la aceleración $a(t)$ se requiere de este tipo con el fin de garantizar que el problema tenga sentido físico, y de esta forma el desplazamiento del soporte de ambos péndulos, cuando se varía la aceleración dentro del conjunto funcional, no sea infinito. Ahora nos resta analizar y estudiar las ecuaciones de este sistema para encontrar condiciones sobre la estabilidad absoluta, esto último se desarrollará en la siguiente sección.

3. Estabilidad absoluta

3.1. Estabilidad absoluta del sistema de segundo orden

Antes de abordar el proceso para obtener el resultado que se enunciará en esta parte, es conveniente aclarar que los conceptos de estabilidad robusta y el de estabilidad absoluta son

esencialmente equivalentes; es decir, los conceptos absoluto y robusto significarán lo mismo. Ver por ejemplo [6,7]. Por tal razón no debe causar confusión ni extrañeza cuando se intercambien en la misma frase o en distintas frases en lo que sigue del texto.

Veamos un resultado preliminar, el cual será muy importante para llevar a cabo la demostración del teorema principal de este trabajo.

Supongamos que se tiene la siguiente ecuación diferencial perturbada:

$$\ddot{x}_1 + 2\varepsilon\dot{x}_1 + v(t)x_1 = 0, \quad 0 \leq \varepsilon < \sqrt{v_-}, \quad (5)$$

donde la perturbación $v(t)$ en el primer miembro de (5) pertenece a un conjunto funcional de funciones sucesionalmente continuas (denotado por la abreviatura SC), lo cual se representa por la inclusión funcional

$$v(t) \in V = \{v(\cdot) \in SC \mid 0 < v_- \leq v(t) \leq v_+\}, \quad (6)$$

con las indeterminadas v_- y v_+ constantes.

Para el sistema anterior nos planteamos la siguiente pregunta; ¿En qué condiciones este sistema es estable cuando se varía $v(t)$ en el conjunto funcional V ? O la siguiente pregunta equivalente: ¿En qué condiciones existe la estabilidad robusta para nuestro sistema cuando variamos la función $v(t)$ en el conjunto funcional V ? Utilizando la metodología implementada en la Ref. 9, damos a continuación la respuesta a esta interrogante.

Sean el sistema (5) con las condiciones (6) y supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones iniciales para el modelo: $x_1(t_0) = 1$ (en caso de que este valor para la función en el tiempo cero sea distinto de uno, la condición anterior se puede lograr normalizando; es decir, dividiendo entre esta cantidad) y $\dot{x}_1(t_0) = 0$. Todas las soluciones a la ecuación diferencial son oscilatorias cuando variamos la función $v(t)$ en el conjunto funcional V según se muestra en las Refs. 9 y 12. Enseguida nos planteamos la meta de encontrar la primera amplitud β_1 de la solución en donde por vez primera se satisfaga $\dot{x}_1(t_1^0) = 0$ y además se cumpla $x_1(t_1^0) = -\beta_1$; posteriormente se necesitará que la amplitud satisfaga la desigualdad $\beta_1 < 1$ para garantizar el decrecimiento de dicha amplitud de la oscilación. El comportamiento de las restantes amplitudes para tiempos posteriores a este intervalo se puede justificar con un tratamiento similar por un cambio de variable análogo al realizado en la Ref. 9. En la Fig. 2 se tiene un esquema que nos permite visualizar el comportamiento de la solución en el primer intervalo de construcción.

Por lo explicado en el párrafo anterior, el problema es el que a continuación se describe. Se requiere encontrar la perturbación $v_1(\cdot)$ perteneciente al conjunto funcional V de tal manera que $|x_1(t_1^0)|$ corresponda al valor máximo de la amplitud correspondiente a la perturbación óptima. Además, claramente el tiempo t_1^0 es aquel en el cual si se evalúa la derivada de la solución x_1 , ésta es igual a cero por vez primera después del tiempo inicial, el cual sin pérdida de generalidad

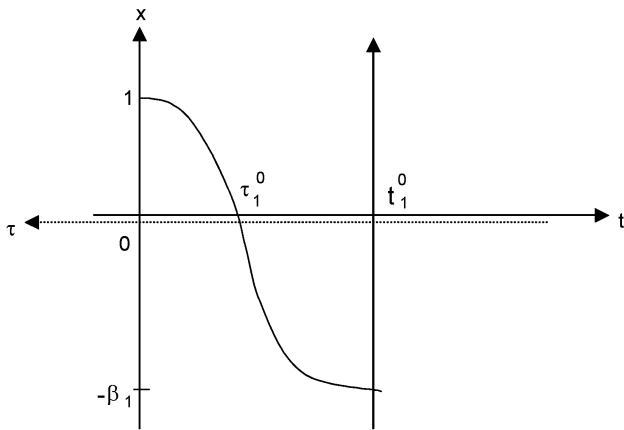


FIGURA 2. La gráfica anterior muestra el comportamiento de la solución del sistema dinámico durante el primer intervalo de construcción. Aquí se puede constatar claramente el papel que desempeñan los ejes "xz" "t", así como la evolución de las amplitudes de la oscilación en el tiempo inicial y el tiempo final.

se tomará como cero de ahora en adelante (el tiempo cero se ilustra en la Fig. 2). Lo anterior conduce a resolver el siguiente problema extremal:

$$\beta_1 = |x_1(t_1^0)| \rightarrow \max_{v(\cdot)} \tag{7}$$

Tomando en cuenta que el valor de $x_1(t_1^0)$ es negativo y como el problema se plantea para optimizar al máximo, la igualdad (7) se transforma en

$$x_1(t_1^0) \rightarrow \min_{v(\cdot)} \tag{8}$$

en el intervalo $[0, t_1^0]$.

Con ayuda del principio del máximo de Pontriaguin, tal como se hizo en la Ref. 9, el problema anterior lo podemos transformar en el problema de contorno:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_1^0) &= -\beta_1, & x_1(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= -2\varepsilon x_2 - v_1^0 x_1, & x_2(t_1^0) &= 0, & x_2(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_1 &= v_1^0 - \psi_2, & \psi_1(t_1^0) &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + 2\varepsilon \psi_2, & \psi_2(t_1^0) &= -1, \end{aligned} \tag{9}$$

en donde ψ_1 y ψ_2 son las soluciones del sistema conjugado, las cuales se desprenden del principio del máximo Pontriaguin [9] y t_1^0 es el tiempo óptimo en el que se tiene la primera amplitud máxima. La perturbación óptima obtenida como resultado de aplicar el mismo principio es

$$v_1^0 = \begin{cases} v_+ & \text{si } \psi_2 x_1 \leq 0 \\ v_- & \text{si } \psi_2 x_1 > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Como en el problema de contorno (9) se tienen desconocidos el tiempo t_1^0 y el valor de la primera amplitud β_1 , para determinar las expresiones de éstos, se procede sobre un tiempo llamado "de regreso." de "retroceso", el cual denotamos como τ en lo sucesivo (y en la Fig. 2), convirtiendo el

problema de contorno en un problema de Cauchy como sigue:

$$\begin{aligned} x_1'' - 2\varepsilon x_1' + v_1^0(t)x_1 &= 0, \\ x_1(0) &= -\beta_1, x_1'(0) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

La perturbación óptima $v_1^0(t)$ se elige de acuerdo a un análisis del comportamiento de las funciones x_1 y ψ_2 en el intervalo $[0, \tau_1^0]$:

$$v_1^0(t) = \begin{cases} v_- , & \tau \in [0, \tau_1^0] \\ v_+ , & \tau \in [\tau_1^0, \tau_1], \end{cases} \tag{12}$$

donde la notación " ' " en (11) denota la derivada con respecto de τ en el tiempo de regreso (Fig. 2).

Procediendo ahora a resolver el sistema (11) con la sustitución de (12) en el lugar pertinente y escribiendo β en vez de β_1 se tiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal con coeficientes constantes, cuya solución se puede encontrar como se hace de manera común en la Ref. 10 y 11. De esta forma, después de algunos cálculos algebraicos y sustituciones adecuadas, se llega a la solución del problema de Cauchy (11)

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= e^{\varepsilon\tau} \beta \cos \omega_- \tau + \frac{\varepsilon}{\omega_-} \beta e^{\varepsilon\tau} \sin \omega_- \tau, \\ \omega_- &= \sqrt{v_- - \varepsilon^2} \text{ y } v_- - \varepsilon^2 > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

En concordancia con nuestro planteamiento y por el comportamiento de la solución según se puede constatar en la figura 2, nos interesa calcular el tiempo τ_1^0 en el que la solución toca por primera vez al eje τ en el sentido positivo de este. Despejando de la Ec. (13), dicho tiempo τ_1^0 se representa por

$$\tau_1^0 = \frac{1}{\omega_-} \arctan \frac{\omega_-}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Ahora nos proponemos calcular la parte de la solución correspondiente al intervalo $[0, \tau_1^0]$ del eje t . Para hacer esto necesitamos de condiciones iniciales en τ_1^0 tales como $x_1(\tau_1^0)$ y $x_1'(\tau_1^0)$, pero éstas las podemos encontrar utilizando (13). Resolviendo (11) y utilizando el control óptimo para el segundo intervalo obtenido en (12); es decir, con v_+ en lugar de v_- y con las condiciones iniciales ya calculadas en τ_1^0 , llegamos a

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= -\beta e^{\varepsilon\tau} \sin \omega_+ \tau_1^0 \cos \omega_+ \tau \\ &+ \beta e^{\varepsilon\tau} \cos \omega_+ \tau_1^0 \sin \omega_+ \tau, \end{aligned} \tag{15}$$

con $\omega_+ = \sqrt{v_+ - \varepsilon^2}$ y $v_+ - \varepsilon^2 > 0$.

Con ayuda de (15) encontramos el tiempo τ_1 del eje τ en el cual la derivada de $x_1(\tau)$ es cero. Tal tiempo resulta ser

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_+} (\pi - \arctan \frac{\omega_+}{\varepsilon}) + \tau_1^0. \tag{16}$$

Como en τ_1 el valor correspondiente de x_1 es 1 (lo que podemos visualizar en la Fig. 2) se despeja β de (15) y se sustituye el valor (16) quedando

$$\beta = \frac{\sqrt{v_+}}{\sqrt{v_-}} e^{-\varepsilon\tau_1}. \tag{17}$$

Similarmente al problema resuelto en la Ref. 9, en donde nos hacía falta que el comportamiento de la amplitud de la oscilación fuera creciendo conforme el tiempo fuera aumentando y, por ende, a nuestro sistema en aquella ocasión le pedimos que se cumpliera la desigualdad $\beta > 1$. Ahora en la situación actual, requerimos que dicha amplitud vaya decreciendo y por este motivo necesitamos que se cumpla la desigualdad inversa $\beta < 1$. Es así como hemos demostrado el teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 1. *La solución trivial del sistema con Ecs. (5) absolutamente oscilante y restricciones (6) es absolutamente estable, si y sólo si, cumple*

$$1) \varepsilon > 0, \quad (18)$$

$$2) v_- > 0, \quad (19)$$

$$3) \varphi(v_-, v_+, \varepsilon) < 1, \quad (20)$$

donde $\varphi(v_-, v_+, \varepsilon)$ está determinada por el segundo miembro de (17); es decir,

$$\begin{aligned} \varphi(v_-, v_+, \varepsilon) = & \frac{\sqrt{v_+}}{\sqrt{v_-}} \left\{ \exp \left[-\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{v_+ - \varepsilon^2}} \right) \right. \right. \\ & \times \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{v_+ - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{v_- - \varepsilon^2}} \arctan \frac{\sqrt{v_- - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \right] \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Antes de retomar el estudio de nuestro sistema original, cabe mencionar que el concepto de oscilación absoluta lo podemos encontrar en las Refs. 9 y 12, aunque en general el término absoluto se refiere a que es oscilante cuando se hacen variar cada una de las funciones pertenecientes al conjunto funcional V . Es precisamente en la Ref. 12 donde nos muestran algunos resultados estableciendo condiciones para que el sistema (5) y (6) sea incluido dentro de la clase de sistemas absolutamente oscilantes; condiciones que cumple nuestro sistema por lo que se permite clasificarlo dentro de esta clase. Una vez aclarado lo anterior, podemos decir que la forma de la solución en la Fig. 2 está acorde con el planteamiento de nuestro problema.

3.1.1. Estabilidad absoluta para los péndulos acoplados

En esta sección se muestra como utilizar el teorema 1 para encontrar la estabilidad robusta del problema que nos hemos propuesto desde el principio del presente trabajo, y lo realizamos manipulando (por decirlo de alguna manera) algebraicamente las ecuaciones del sistema (3) como a continuación se describe.

Primero se suman las dos ecuaciones del sistema (3) y se hace el cambio de variable $x_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ (Claramente $\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$ y $\ddot{x}_1 = \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$). Realizando algunas operaciones algebraicas y sustituciones elementales para x_1, \dot{x}_1 y

\ddot{x}_1 se tiene la ecuación resultante:

$$\ddot{x}_1 + \frac{\varepsilon}{\zeta} \dot{x}_1 + \left[\frac{mgl}{\zeta} + \frac{ml}{\zeta} a(t) \right] x_1 = 0. \quad (22)$$

Si enseguida en el mismo sistema (3) se resta la segunda ecuación de la primera y se efectúa el cambio de variable $x_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ con sus respectivas derivadas como se especifica en el paréntesis del párrafo anterior, después de algunos detalles algebraicos se obtiene

$$\ddot{x}_2 + \frac{\varepsilon}{\zeta} \dot{x}_2 + \left[\frac{mgl}{\zeta} + \frac{ml}{\zeta} a(t) + \frac{2l_*K}{\zeta} \right] x_2 = 0. \quad (23)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (22) y (23) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no acopladas equivalente al sistema (3). De manera particular podemos aplicar el teorema 1 a cada una de las ecuaciones mencionadas, y de esta forma, si ahora renombramos a $\varepsilon = \varepsilon/l$ y $v(t) = (mgl)/(\zeta) + (ml)/(\zeta)a(t)$ en (22), entonces el resultado mencionado nos garantiza que la solución trivial de (22) es absolutamente estable si y sólo si se satisfacen

$$\frac{\varepsilon}{l} > 0, v_- > 0 \text{ y } \varphi(v_-, v_+, \varepsilon). \quad (24)$$

En estas circunstancias, y con el fin de aplicar adecuadamente el teorema 1, v_- y v_+ para el sistema actual se expresan como:

$$v_- = \frac{mgl}{\zeta} \text{ y } v_+ = \frac{mgl}{\zeta} + \frac{ml}{\zeta} a^+. \quad (25)$$

Se necesita que las condiciones (24) y (25) se ajusten a nuestro planteamiento general, principalmente a lo puntualizado en la inclusión funcional (6), todo con el fin de poder aplicar el teorema 1. Así, de ahora en adelante, se tomará a la perturbación cumpliendo

$$a(t) \in W' = \{a(t) \in SC \mid 0 < a(t) \leq a^+\}, \quad (26)$$

donde a^+ es como en (4). Además claramente $W' \subset W$.

Procediendo similarmente para (23), pero ahora con $v(t) = (mgl)/\zeta + (ml)/(\zeta)a(t) + (2l_*K)/\zeta$, la solución es absolutamente estable si y sólo si se cumple

$$\frac{\varepsilon}{l} > 0, \quad v_- > 0 \quad \text{y} \quad \varphi(v_- + K', v_+ + K', \varepsilon). \quad (27)$$

De igual forma como en el análisis anterior, las constantes v_- y v_+ están dadas por (25), mientras que K' tiene como representación algebraica a la igualdad

$$K' = \frac{2l_*K}{\zeta} \quad (28)$$

Por todo lo explicado hasta el momento en la presente sección, estamos preparados para escribir y demostrar el resultado culminante de esta disertación.

Teorema 2. *La solución trivial al sistema absolutamente oscilante representado por las ecuaciones (3) con la restricción (4) es absolutamente estable, si y sólo si, se cumple:*

$$1) \varphi(v_-, v_+, \varepsilon) < 1 \tag{29}$$

$$2) \varphi(v_- + K', v_+ + K', \varepsilon) < 1 \tag{30}$$

donde v_-, v_+ y K' son como en (25) y (28). Además φ está representada como una función de v_-, v_+, K' y ε por la función (21)

4. Demostración

Por el cambio de coordenadas que se realiza en la explicación previa al enunciado de este teorema cuando se encontraron las Ecs. (22) y (23), podemos argumentar que el sistema de ecuaciones diferenciales acoplado (3) es equivalente al sistema no acoplado formado por (22) y (23). Ya se explicó que (22) tiene la solución trivial absolutamente estable si y sólo si se cumple (29) del Teorema 2, puesto que obviamente se satisfacen las condiciones (18) y (19) del Teorema 1. Por la misma razón, la solución trivial de (23) es absolutamente estable si y sólo si se cumple (30) del mismo teorema. Sólo resta demostrar que el cambio de variables preserva la estabilidad, pero como las variables φ_1 y φ_2 las podemos relacionar con x_1 y x_2 por medio de la transformación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

y la matriz de coeficientes (31) es no singular porque claramente su determinante es $-2 \neq 0$, efectivamente se puede asegurar que dicha transformación de variables preserva la estabilidad de las soluciones de los sistemas equivalentes. Como las condiciones para $v(t)$ se pueden obtener de las condiciones para $a(t)$ en (26), se tiene completa la prueba.

5. Influencia de K

Por último, analicemos que tanta influencia puede tener la constante K del resorte proporcionada por la ley de Hooke en la estabilidad absoluta de nuestro sistema físico, o que condiciones debe satisfacer dicha constante en términos de desigualdades.

Si K es muy grande es claro que el sistema se comportará de forma rígida por la dificultad en la deformación del resorte. En este caso resulta muy difícil deformarlo a condiciones iniciales diferentes, es por ello que los péndulos se moverán como si fuesen uno solo y en consecuencia se comportará como tal. Por tanto esta posibilidad queda totalmente descartada. Analicemos la otra situación, en la que es posible deformar el sistema a condiciones iniciales distintas.

La constante K aparece implícitamente en la segunda expresión de la conclusión del Teorema 2. Con el fin de hacer más simples las desigualdades para futuras consideraciones,

se escriben las siguientes expresiones:

$$z = \frac{v_- + K'}{\varepsilon^2} > 1 \tag{32}$$

y

$$\Gamma = \frac{v_- + K'}{v_+ + K'} > 1. \tag{33}$$

Utilizando (32) y (33) se tiene que la segunda desigualdad del Teorema 2 descrita en términos de K' y con la forma explícita de la función φ , se puede reducir a la expresión:

$$\frac{\sqrt{v_+ + K'}}{\sqrt{v_- + K'}} \left\{ \exp \left[-\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{v_+ + K' - \varepsilon^2}} \right) \times \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{v_+ + K' - \varepsilon^2}}{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{v_- + K' - \varepsilon^2}} \right) \times \arctan \frac{\sqrt{v_- + K' - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right] \right\} < 1 \tag{34}$$

la cual podemos escribir más simplificada como

$$\frac{\sqrt{v_+ + K'}}{\sqrt{v_- + K'}} e^{-\chi(z)} < 1 \tag{35}$$

donde la función $\chi(z)$ simplificada y después de realizar algunas operaciones básicas se describe mediante la siguiente igualdad

$$\chi(z) = \frac{\pi - \arctan \sqrt{\Gamma z - 1}}{\sqrt{\Gamma z - 1}} + \frac{\arctan \sqrt{z - 1}}{\sqrt{z - 1}} \tag{36}$$

Ahora, derivando $\chi(z)$ con respecto a la variable z en (35) se obtiene

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{-\sqrt{\Gamma z - 1} - \Gamma z (\pi - \arctan \sqrt{\Gamma z - 1})}{\sqrt{\Gamma z - 1}} + \frac{\arctan \sqrt{z - 1}}{\sqrt{z - 1}} \tag{37}$$

Analizando la igualdad (37) se observa de acuerdo a los parámetros que intervienen en ella, que la derivada siempre será negativa en $(1, \infty)$, y por ende $\chi(z)$ es una función monótona decreciente para dicho intervalo. Por el Teorema de la función implícita, aplicado a la función

$$F(z, \Gamma) = \chi(z) - \frac{1}{2} \ln \Gamma$$

en el punto (z_0, Γ) cuando

$$\chi(z_0) = \frac{1}{2} \ln \Gamma$$

y si además se satisface la hipótesis extra de que

$$\sqrt{v_+} \leq 2\sqrt{v_-}$$

o en su forma equivalente

$$\sqrt{v_+ + K'} \leq 2\sqrt{v_- + K'},$$

la ecuación $\chi(z) = (1/2) \ln \Gamma$ tiene una única solución z_0 . Luego se tienen las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \Gamma < \chi(z) \text{ por (35)} &\iff z < z_0 \\ \iff \frac{v_- + K'}{\varepsilon^2} < z_0 &\iff \varepsilon > \sqrt{\frac{v_- + K'}{z_0}} \end{aligned} \quad (38)$$

Utilizando la última desigualdad en (38) tenemos

$$\varepsilon^2 z_0 > v_- + K' \quad (39)$$

lo cual implica

$$K' < \varepsilon^2 z_0 - v_- \quad (40)$$

Al sustituir (25) y (28) en (40) se tiene

$$\frac{2l_* K}{\zeta} < \varepsilon^2 z_0 - \frac{mgl}{\zeta} \quad (41)$$

o

$$K < \frac{\zeta \varepsilon^2 z_0}{2l_*} - \frac{mgl}{2l_*} \quad (42)$$

La constante K se encuentra además en la definición de K' de la Ec. (28) acompañada de la longitud l_* , y del número 2 como factores, así como del momento de inercia en el papel de denominador. En (3) observamos que se debe cumplir $\varepsilon < \sqrt{v_-}$ y por consiguiente se tiene que

$v_- - \varepsilon^2 > 0$. En la parte 2) del Teorema 2 aparece la relación $\varphi(v_- + K', v_+ + K', \varepsilon) < 1$, y como φ contiene a $v_- + K'$, entonces se debe cumplir $v_- + K' - \varepsilon^2 < 0$ en concordancia con la anterior desigualdad. Así se tendrá

$$K' > \varepsilon^2 - v_- \quad (43)$$

Al sustituir las correspondientes expresiones de (25) y (28) en (43) nos resulta

$$\frac{2l_* K}{\zeta} > \varepsilon^2 - \frac{mgl}{\zeta} \quad (44)$$

o

$$K > \frac{\varepsilon^2 \zeta}{2l_*} - \frac{mgl}{\zeta}, \quad (45)$$

De las desigualdades (41) y (44) podemos formar la desigualdad

$$\frac{\varepsilon^2 \zeta}{2l_*} - \frac{mgl}{\zeta} < K < \frac{\zeta \varepsilon^2 z_0}{2l_*} - \frac{mgl}{2l_*}. \quad (46)$$

Por lo explicado al inicio de esta sección, K no puede ser muy grande pero debe ser delimitada por la desigualdad (45), la cual es equivalente a la desigualdad menos extensa

$$\frac{\varepsilon^2 \zeta}{2l_*} < K + \frac{mgl}{2l_*} < \frac{\zeta \varepsilon^2 z_0}{2l_*} \quad (47)$$

De esta forma se han encontrado restricciones para la constante del resorte, ya sea la desigualdad (46) o la desigualdad más simple (47).

-
1. Hagerdon, *Non Linear Oscilations* (Clarendon Press, Oxford, 1981).
 2. F.S. Crawford Jr, *Waves. Berkeley Physics Course, Volumen 3* (University Berkely Press, Berkely 1968).
 3. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics-Mainly Mechanics, Radiation and Heat* (Addison-Wesley, Massachusetts 1963).
 4. F. Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*. (Traslated from Russian By George Yankowsky). Mir Publishers, Moscow (1975).
 5. S. Lefschetz. *Stability of Nonlinear Control Systems* (Academic Press, New York, 1965).
 6. L. Xiaoxin, *Absolute Stability of Nonlinear control Systems* (Kluwer Academic Publishers, Hong Kong, 1993).
 7. A.M. Letov. *Stability in Nonlinear Control Sitems*. (traslated From The Russian by J George Adashko) (Princeton University Press, Princeton, 1961).
 8. L. Marcus. *Foundations Of Optimal Control Theory*. The SIAM. Series In Applied Mathematics (Jhon Wilwy, New York, 1967).
 9. E. Muñoz Aguirre y V.V. Alexandrov, *Rev. Mex. Fís.*, **47** (2001)1.
 10. P. Blachard, R.L. Devaney, G.R. Hall, *Differential Equations* (Brooks/Cole company, California USA, 1998).
 11. A.N. Thikhonov, A.H. Vasielva y Sueshnikov. *Differential Equations* (Publisher Navea, Moscu, 1982).
 12. V.V. Alexandrov, C.R. Hing y M. Betancourt Mariño, *Inv Op.* **2** (1977).