

# Análisis del proceso de propagación de secuencias de pulsos ultracortos en fibras con inhomogeneidades periódicas

R. Parada-Alfonso<sup>a</sup>, V. Vysloukh<sup>b</sup> y E. Martí-Panameño<sup>c,\*</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.  
Apartado Postal 1152, 72000 Puebla, Pue., México.

e-mail: rparada@fcfm.buap.mx

<sup>b</sup>Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad de las Américas–Puebla,  
Puebla, Pue., México.

e-mail: ua013007@mail.udlap.mx

<sup>c</sup>Instituto de Ciencias Fotónicas y Departamento de Teoría de Señales y Comunicaciones.  
Universitat Politècnica de Catalunya,

08034 Barcelona, España.

e-mail: emarti@fcfm.buap.mx

Recibido el 21 de abril de 2003; aceptado el 5 de septiembre de 2003

Se considera una guía de ondas con un perfil de índice de refracción que varía periódicamente a lo largo del eje longitudinal de ella, a través de la cual se propagan dos secuencias de pulsos ultracortos de duración de picosegundos en diferentes modos cuya interacción es analizada utilizando como soluciones analíticas algunas funciones jacobianas que sirven como modelo de secuencias de pulsos periódicos. Tomando en cuenta los efectos lineales y no lineales, se soluciona el sistema acoplado de ecuaciones no lineales de Schrödinger que permitirá estudiar la propagación de los trenes de pulsos.

*Descriptores:* Propagación de secuencias de pulsos; óptica no lineal; compresión de pulsos; funciones jacobianas.

Ultrashort pulses sequences of picosecond duration are propagated in two different modes through a waveguide which is assumed to have a refraction index that varies periodically along its length. The interaction between the two modes is analyzed using Jacobi functions as analytical solutions serving like a model of periodical pulse trains. Linear and nonlinear effects are considered to solve the nonlinear Schrödinger coupled equations system which let us study the propagation of pulse trains.

*Keywords:* Pulses sequences propagation; nonlinear optics; pulse compression; Jacobian functions.

PACS: 42.65.Re; 42.65.Sf; 42.81.Dp; 42.65.Wi

## 1. Introducción

El interés en el análisis de la propagación de ondas tipo  $cn$  en fibras ópticas con inhomogeneidades periódicas fue estimulado particularmente por lo que se lee en la Ref. 1. En él se considera una fibra óptica bimodal con inhomogeneidades periódicas cuyo perfil de índice de refracción varía periódicamente a lo largo del eje longitudinal de la fibra, a través de la cual se propagan pulsos ultracortos de duración de picosegundos en diferentes modos, tomando en cuenta los efectos lineales, como son la dispersión de primer orden, determinada por la diferencia entre las velocidades de grupo de los dos modos que se propagan a lo largo de la fibra y el acoplamiento entre ellos. También se consideran los efectos no lineales, tales como: la automodulación de fase (SPM, del inglés *Self Phase Modulation*) y la modulación cruzada de fase (XPM, del inglés *Cross Phase Modulation*) en la autocompresión no lineal de pulsos limitados espectralmente, así como la dinámica de formación de pulsos tipo solitón y multisolitón en las fibras. Se fundamentan teóricamente la creación de compresores compactos y la formación de solitones ópticos en el intervalo de longitud de onda del visible. Las perspectivas futuras de investigación teórica están relacionadas con una consideración más detallada de la dispersión del material, análisis de la contribución Raman inercial en la res-

puesta no lineal, así como otros factores que aparecen en el intervalo de duración de los femtosegundos [1].

Las soluciones para pulsos que se propagan a través de fibras ópticas son bien conocidas y han sido ampliamente estudiadas [2–4], en donde se utilizan, por ejemplo, modelos de solitones. Existen varios métodos [5–7] para modelar y/o analizar la propagación de pulsos ópticos ultracortos en estructuras periódicas. Recientemente, Liu *et al.* [8] propusieron métodos de funciones jacobianas tipo  $sn$  para encontrar soluciones de onda periódica a ecuaciones de evolución no lineal. Posteriormente, Fu *et al.* [9] mostraron que el método funciona con otras funciones elípticas de Jacobi como las funciones  $cn$ ,  $dn$  y  $cs$ . Más recientemente, Parkes *et al.* [10] presentaron métodos de funciones elípticas jacobianas  $sn$  y  $cn$  para encontrar soluciones de onda periódica a ecuaciones de evolución no lineal. En los casos límites, cuando  $m$  es muy cercano a 1, estas funciones son análogas a las que describen a los pulsos tipo solitón; mientras que cuando  $m$  se acerca a 0, se comportan como ondas armónicas (para  $cn$  y  $sn$ ) y como ondas planas (para  $dn$ ). En la Ref. 11 se muestra la posibilidad de crear altos picos de transmisión con la banda *gap* de rejillas de Bragg uniformes, con la consideración de poder controlar el índice de refracción promedio de las estructuras, cuyo perfil varía periódicamente a lo largo de la rejilla.

En el presente trabajo se analiza la propagación de secuencias (o trenes) de pulsos a través de fibras con inhomogeneidades periódicas; es decir, fibras cuyo perfil de índice de refracción varía periódicamente a lo largo del eje longitudinal de la fibra. Nos interesa hallar soluciones periódicas para tales secuencias (o trenes) de pulsos, para lo cual se usan los modelos de ondas tipo  $cn$ ,  $dn$  y  $sn$  (las cuales son producidas por funciones jacobianas). Se muestra también que tales funciones son útiles en la solución del sistema acoplado de ecuaciones no lineales de Schrödinger, tomando en cuenta que pueden comportarse de diferente manera dependiendo de su módulo  $m$  y de su parámetro de amplitud. Se presenta el comportamiento de la secuencia de pulsos mientras se propaga a través de la fibra, observando la influencia del parámetro  $\nu$ , que caracteriza la diferencia entre las velocidades de grupo de los modos que se propagan a lo largo de la fibra, y la influencia del parámetro de amplitud de la función Jacobiana sobre la propagación y la autocompresión (“enfocamiento en el tiempo”) de los pulsos.

En la Sec. 2 presentamos el modelo matemático utilizado para analizar el proceso de propagación de ondas tipo  $cn$  y en la Sec. 3 las soluciones analíticas para el problema. En la Sec. 4 planteamos el método de solución y mostramos las soluciones numéricas utilizando algunas funciones elípticas. Se exhiben los resultados de la simulación para diversos valores de los parámetros involucrados en la Sec. 5, mientras que las conclusiones del presente trabajo se encuentran en la Sec. 6.

## 2. Modelo matemático

El objeto de este análisis es una fibra óptica bimodal con un perfil de índice de refracción que varía periódicamente a lo largo de su eje longitudinal en la forma (ver, por ejemplo, la Ref. 11)

$$n^2(\omega, r, z) = n_0^2(\omega) \{1 + f(r)[1 + l \cos(2\pi z/d)]\}, \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la luz,  $r$  y  $z$  son las coordenadas cilíndricas,  $n_0(\omega)$  es el índice de refracción del recubrimiento;  $f(r)$  es una función que describe el perfil del índice de refracción del núcleo;  $d$  es el período espacial;  $l \ll 1$  es la profundidad de modulación. A la entrada de esta fibra lanzamos una secuencia de pulsos que excitarán los dos modos de la fibra. En la medida que crece la intensidad del tren de pulsos a la entrada, los efectos de la automodulación de fase y modulación cruzada comienzan a influenciar la dinámica de transformación de la envolvente temporal; estos efectos son generados por la dependencia cúbica en el campo de la no linealidad electrónica del material de la fibra. Actuando de manera análoga con las Refs. 1 y 2, obtenemos la generalización no lineal del sistema de ecuaciones de modos acoplados para las amplitudes complejas de las envolventes temporales,

que servirá de modelo para el análisis:

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial A_1}{\partial \zeta} - \nu \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \right) &= s A_2 + R(\gamma_{11}|A_1|^2 + \gamma_{12}|A_2|^2) A_1, \\ i \left( \frac{\partial A_2}{\partial \zeta} + \nu \frac{\partial A_2}{\partial \tau} \right) &= s^{-1} A_1 + R(\gamma_{21}|A_1|^2 + \gamma_{22}|A_2|^2) A_2, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\zeta = z/L_b$  y  $\tau = (t - z/u)/\tau_0$  son reescalamientos en el espacio y tiempo, respectivamente;  $L_b$  es una escala espacial característica y se define como el período al cual se intercambia la potencia entre los dos modos mientras se propagan dentro de la fibra [12];  $\tau_0$  es la duración inicial del pulso;  $u = (u_1 + u_2)/2$  es el promedio de las velocidades de grupo de los dos modos;  $s$  es un parámetro adimensional  $\sim 1$  que caracteriza el acoplamiento de los modos;  $A_1$  y  $A_2$  son funciones complejas de variación lenta que representan a la envolvente temporal de los campos eléctricos de los pulsos que se propagan en el primer y segundo modo, respectivamente, y están normalizadas al valor pico de entrada,  $\nu$  es un parámetro adimensional que caracteriza el desentonamiento de las velocidades de grupo.  $R = L_b/L_{NL}$  es el parámetro de no linealidad (SPM y XPM);  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{22}$ , son coeficientes  $\sim 1$  definidos por las integrales de intersección de los modos transversales. La influencia de los efectos no lineales se vuelve muy importante cuando la escala espacial característica de no linealidad (la longitud de automodulación de fase):  $L_{NL} = (\beta n_2 A_0^2 / 2)^{-1}$  (donde  $\beta$  es el promedio de las constantes de propagación de los dos modos que se propagan a lo largo de la fibra;  $n_2$  es el coeficiente de no linealidad cuyo orden de magnitud es  $10^{-13}$  unidades CGSE para las guías de onda de cuarzo y  $A_0$  es el valor pico de la amplitud del campo eléctrico de la onda) es comparable con la longitud de dispersión. El sistema de ecuaciones anterior (2) involucra a la dispersión de primer orden a través de  $\nu$ , el acoplamiento a través de  $s$  y las no linealidades a través de  $R|A_1|^2 A_1$  y  $R|A_2|^2 A_2$  para SPM y de  $R|A_2|^2 A_1$  y  $R|A_1|^2 A_2$  para XPM.

Se puede buscar la solución aproximada del sistema (2) cuando  $\nu \ll 1$ , en la forma

$$\begin{aligned} A_1(\tau, \zeta) &= a(\tau, \zeta) \exp(i\zeta) + b(\tau, \zeta) \exp(-i\zeta), \\ A_2(\tau, \zeta) &= -a(\tau, \zeta) \exp(i\zeta) + b(\tau, \zeta) \exp(-i\zeta), \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $a(\tau, \zeta)$  y  $b(\tau, \zeta)$  son amplitudes complejas. El proceso de segundo truncamiento basado en la transición a las amplitudes parciales, conlleva a un sistema acoplado de ecuaciones no lineales de Schrödinger

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + R[(1 + \gamma)|a|^2 + 2|b|^2]a, \\ i \frac{\partial b}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} + R[2|a|^2 + (1 + \gamma)|b|^2]b, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\gamma = \gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 1$  Las condiciones iniciales para (4) son determinadas por las condiciones de excitación de la fibra. En el caso de excitación antisimétrica de la fibra ( $b = 0, A_1 = -A_2$ ), el sistema (4) se degenera en una ecuación no lineal de Schrödinger que describe la dinámica no lineal del pulso en un medio con dispersión de la velocidad de grupo (DVG) anómala ( $\partial^2\beta/\partial\omega^2 < 0$ ):

$$i \frac{\partial a}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + R(1 + \gamma)|a|^2 a, \tag{5}$$

para el cual, de manera detallada, se han investigado la dinámica de formación de pulsos solitón y multisolitón, efectos de autocompresión, etc. [2]. La excitación simétrica ( $a = 0, A_1 = A_2$ ) conlleva a una ecuación análoga en su estructura,

$$i \frac{\partial b}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} + R(1 + \gamma)|b|^2 b, \tag{6}$$

que describe la automodulación de fase dispersiva en un medio con DVG normal ( $\partial^2\beta/\partial\omega^2 > 0$ ), acelerado en comparación con el caso de ensanchamiento lineal del pulso, formación de frecuencia lineal, etc. [2]. En el caso de excitación unimodal, uno de los pulsos parciales se comprime al mismo tiempo que el otro se ensancha.

Consideramos las condiciones iniciales tomando en cuenta que buscamos soluciones periódicas:  $a(\zeta, \tau) = a(\zeta, \tau + T)$  y  $b(\zeta, \tau) = b(\zeta, \tau + T)$ , donde  $T$  es el período. En la siguiente sección encontraremos las soluciones analíticas para estas ecuaciones.

### 3. Soluciones analíticas

En la sección anterior se presentó el modelo matemático del problema, para el cual existen soluciones bien conocidas para la propagación de pulsos; sin embargo, nos interesa encontrar soluciones para las Ecs. (5) y (6), utilizando modelos de ondas periódicas en estado estacionario de la forma

$$a(\zeta, \tau) = u(\tau) \exp(-i\beta\zeta), \tag{7}$$

$$b(\zeta, \tau) = v(\tau) \exp(-i\beta\zeta), \tag{8}$$

los cuales representan trenes de pulsos con perfiles que permanecen sin cambio durante la propagación y son análogos periódicos de los solitones. Entonces, al sustituir (7) y (8) en (5) y (6), respectivamente, obtenemos el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:

$$\frac{\nu^2}{2} \frac{d^2 u}{d\tau^2} - \beta u + R(1 + \gamma)u^3 = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\nu^2}{2} \frac{d^2 v}{d\tau^2} + \beta v - R(1 + \gamma)v^3 = 0. \tag{10}$$

Ahora queremos conocer los valores para  $u$  en (9) y  $v$  en (10), por lo que proponemos utilizar funciones jacobianas para solucionar (5) y (6) [10]. Consideremos, por ejemplo, las si-

guientes funciones jacobianas (las cuales producen ondas conocidas como tipo  $cn, dn$  y  $sn$ , respectivamente):

$$u(\tau) = U_c \operatorname{cn}(\tau; m), \tag{11}$$

$$u(\tau) = U_d \operatorname{dn}(\tau; m), \tag{12}$$

$$v(\tau) = V_s \operatorname{sn}(\tau; m), \tag{13}$$

donde  $U_c, U_d$  y  $V_s$  son parámetros de amplitud y  $m$  ( $0 \leq m \leq 1$ ) es el módulo de la función Jacobiana y es responsable de la localización de la energía de los modos.

En las siguientes figuras se exponen la influencia del módulo  $m$  en los perfiles de las funciones jacobianas ( $cn, dn$  y  $sn$ ) en los casos límites; es decir, cuando  $m \rightarrow 1$  y cuando  $m \rightarrow 0$ . En la Fig. 1, observamos que la función  $cn$  se comporta como una secuencia de  $\operatorname{sech} \tau$  con fases opuestas,  $dn$  también como una secuencia de  $\operatorname{sech} \tau$  con fases iguales y  $sn$  como una secuencia de  $\operatorname{tanh} \tau$  con fases opuestas, mientras  $m$  se acerca a 1. En la Fig. 2, vemos el comportamiento de las funciones como un  $\cos \tau$  para  $cn$ , una constante igual a 1 para  $dn$  y un  $\sin \tau$  para  $sn$ , para cuando  $m$  es muy cercano a 0. Los valores mostrados en la gráficas son cantidades adimensionales [13].

Nuestro objetivo es establecer una relación entre la amplitud y el módulo de las funciones jacobianas y los parámetros de la solución analítica. Así, siguiendo con la solución, sustituimos la Ec. (11) en la Ec. (9), y luego ésta en la Ec. (5), para obtener que  $-1/2\nu^2 \leq \beta \leq 1/2\nu^2$ , y entonces  $U_c^2 = m^2\nu^2/R(1+\gamma) = (\beta+\nu^2/2)/R(1+\gamma)$ . Considerando los casos límites para el parámetro  $m$ , cuando  $m \rightarrow 0$  encontramos que  $\beta \rightarrow -\nu^2/2$ , y por lo tanto  $U_c^2 = 0$ . Así mismo, cuando  $m \rightarrow 1, \beta \rightarrow \nu^2/2$ , y entonces  $U_c^2 = \nu^2/R(1 + \gamma)$ . De esta manera, ahora podemos determinar la familia de valores para la amplitud  $U_c$  y el módulo  $m$ , puesto que los valores de los parámetros involucrados son conocidos.

De la misma manera, usamos la función Jacobiana  $dn$  (12) para  $u(\tau)$  en (9). Sustituimos (12) en (9), y después ésta en (5). De aquí obtenemos que  $\nu^2/2 \leq \beta \leq \nu^2$ , y enton-

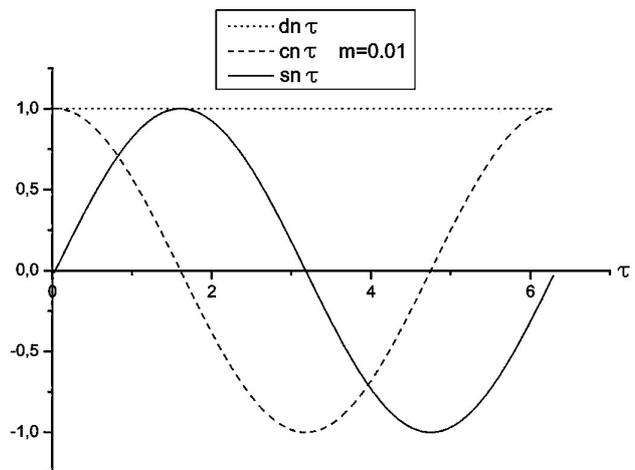


FIGURA 1. Funciones elípticas Jacobianas ( $m = 0.01$ ).

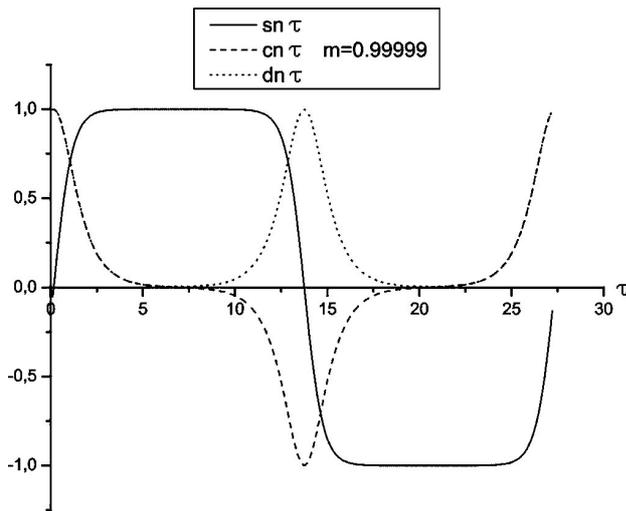


FIGURA 2. Funciones elípticas Jacobianas ( $m = 0.99999$ ).

ces  $U_d^2 = 1/2\nu^2 m^2 + \beta/R(1+\gamma)$ . Si consideramos ahora los casos límites para  $m$ , encontramos que  $\beta \rightarrow \nu^2$ , y entonces  $U_d^2 = \nu^2/R(1+\gamma)$ , para cuando  $m \rightarrow 0$ . Y cuando  $m \rightarrow 1$ , hallamos que  $\beta \rightarrow \nu^2/2$ , y entonces  $U_d^2 = 1/2\nu^2/R(1+\gamma)$ . Con esta información, ahora podemos encontrar la familia de valores para la amplitud  $U_d$  y el módulo  $m$ .

Siguiendo el mismo procedimiento, sustituyendo ahora (13) en (10) y después ésta en (6), obtenemos que  $\nu^2/2 \leq \beta \leq \nu^2$ , y entonces

$$V_s^2 = \frac{\nu^2 m^2}{R(1+\gamma)} = \frac{(2\beta - \nu^2)}{R(1+\gamma)}$$

Considerando los casos límites para  $m$ , tenemos que  $\beta \rightarrow \nu^2/2$  y entonces  $V_s^2 = 0$ , cuando  $m \rightarrow 0$ . Y cuando  $m \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow \nu^2$  y entonces  $V_s^2 = \nu^2/R(1+\gamma)$ . Podemos determinar el valor de la amplitud  $V_s$  para algún valor de  $m$  de la ecuación anterior, pues los valores de los parámetros involucrados son conocidos.

Hemos encontrado las soluciones analíticas para las Ec. (5) y (6) usando modelos de ondas periódicas e involucrando a las funciones jacobianas, relacionando su amplitud y su módulo con los parámetros conocidos de las soluciones analíticas.

#### 4. Método de solución numérica

Hemos visto que la solución del sistema de Ec. (2) en la Sec. 2 puede resolverse analíticamente, como se detalla en la

sección anterior, en el cual, para resolverlo se toma en cuenta el sistema de Ecs. (4) que considera valores para  $\nu \ll 1$ . Sin embargo, también es posible encontrar soluciones numéricas, las cuales serán exhibidas en esta sección. La solución numérica explicada en esta sección es para la ecuación (2); esta solución es válida para valores arbitrarios de  $\nu$ , a diferencia de las soluciones analíticas halladas en la sección anterior. En esta solución numérica utilizamos el método de partición de pasos de Fourier [12] y que explicamos a continuación. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$i \frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta} = (\hat{D} + \hat{N}) \vec{A},$$

donde

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} i\nu \frac{\partial}{\partial \tau} & s \\ s^{-1} & -i\nu \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$$

y

$$\hat{N} = R \begin{pmatrix} \gamma_{11}|A_1|^2 + \gamma_{12}|A_2|^2 & 0 \\ 0 & \gamma_{21}|A_1|^2 + \gamma_{22}|A_2|^2 \end{pmatrix}$$

donde  $\hat{D}$  es un operador diferencial que explica la dispersión y el acoplamiento en un medio lineal y  $\hat{N}$  es un operador no lineal que gobierna el efecto de no linealidades de la fibra (SPM y XPM) en la propagación de pulsos. Este método obtiene una solución aproximada suponiendo que los efectos dispersivos, acoplamiento y no lineales actúan independientemente uno de otro mientras el campo óptico se propaga una distancia pequeña  $h \ll 1$ . Es decir, la propagación de  $\zeta$  a  $\zeta + h$  se realiza en dos pasos. En el primer paso, la no linealidad actúa sola y  $\hat{D} = 0$ . En el segundo paso, la dispersión y el acoplamiento actúan solos y  $\hat{N} = 0$ .

En este caso particular, para el paso lineal consideramos sólo la dispersión de primer orden y el acoplamiento en (2), de donde se obtiene una matriz de transmisión para las componentes en frecuencia de las amplitudes complejas:

$$\begin{pmatrix} A_1(\Omega, \zeta) \\ A_2(\Omega, \zeta) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1(\Omega, 0) \\ A_2(\Omega, 0) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

con

$$M = \begin{pmatrix} \cos(p\zeta) - i(\nu\Omega/p) \sin(p\zeta) & -ip^{-1} \sin(p\zeta) \\ -ip^{-1} \sin(p\zeta) & \cos(p\zeta) + i(\nu\Omega/p) \sin(p\zeta) \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{1,2}(\Omega, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{1,2}(\tau, \zeta) \exp(-i\Omega\tau) d\tau$$

son las transformadas de Fourier directa;  $\Omega = (\omega - \omega_0)\tau_0$  es la frecuencia normalizada;  $p = (1 + \nu^2\Omega^2)^{1/2}$ . Podemos regresar al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Fourier

$$A_{1,2}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{1,2}(\Omega, \zeta) \exp(i\Omega\tau) d\Omega.$$

Por otro lado, considerando sólo los efectos no lineales (SPM y XPM) en (2), se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{pmatrix} A_1(\tau, \zeta) \\ A_2(\tau, \zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-iR|A_0|^2\zeta) & 0 \\ 0 & \exp(-iR|A_0|^2\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(\tau, 0) \\ A_2(\tau, 0) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

donde  $|A_0(\tau, 0)|^2 = |A_1(\tau, 0)|^2 + |A_2(\tau, 0)|^2$ . De esta manera, con la ayuda de (14) y (15), podemos estudiar, por medio de simulaciones numéricas computacionales, el comportamiento del tren de pulsos mientras se propaga a través de la fibra con las consideraciones de dispersión, acoplamiento y no linealidad.

### 5. Resultados de la simulación

Uno de los objetivos de estas simulaciones es observar el comportamiento de la secuencia de pulsos mientras se propaga a través de la fibra, considerando la influencia del parámetro  $\nu$ , que caracteriza la diferencia entre las velocidades de grupo de los modos que se propagan a lo largo de la fibra. Es necesario aclarar que las simulaciones están basadas en las soluciones numéricas de (2) halladas en la sección anterior. Veremos que las soluciones analíticas halladas en la Sec. 3 son efectivamente válidas para valores de  $\nu \ll 1$ . Los resultados de las simulaciones se muestran en las siguientes figuras. Los valores de los parámetros involucrados en las gráficas son valores normalizados. La intensidad está normalizada al valor pico de entrada  $A_0$ , la distancia a  $\zeta$  y el tiempo a la duración inicial  $\tau_0$ .

En la Fig. 3, se presenta la suma de las intensidades de los dos pulsos acoplados,  $I_s(\zeta, \tau) = |a|^2 + |b|^2$ , mientras se propagan diferentes distancias  $\zeta$ . Consideramos valores para  $m = 0.9999$  (Fig. 3) y  $m = 0.5$  (Fig. 4) para ondas tipo  $cn$ , con  $\nu = 0.1$ .

La razón por la que se eligieron estos valores específicos para  $m$  es que para valores cercanos a 1 se tienen altas localizaciones de energía, mientras que para  $m = 0.5$  resultan ondas casi armónicas, como se observan en las figuras. Cuando  $m = 1$  tenemos solamente un pulso (y no trenes de pulsos, como nos interesa), para el cual las soluciones son bien conocidas y han sido ampliamente estudiadas [2-4]. Cuando  $m = 0$ , se pierden las no linealidades y este comportamiento se sale de nuestro análisis.

Para valores de  $m = 0.99999$  (Figs. 3 y 5), los perfiles son análogos a una rejilla de solitones, mientras que para  $m = 0.5$  (Figs. 4 y 6), los perfiles son como los de una onda armónica. En ambos casos, los pulsos se propagan sin sufrir cambios. Podemos observar cómo se comportan los perfiles temporales de las intensidades de los pulsos mientras se van propagando a través de la fibra diferentes distancias  $\zeta$ ; por

ejemplo, presentamos las gráficas de la suma de las intensidades para ondas tipo  $cn$ :  $m = 0.9999$  (Fig 5) y  $m = 0.5$

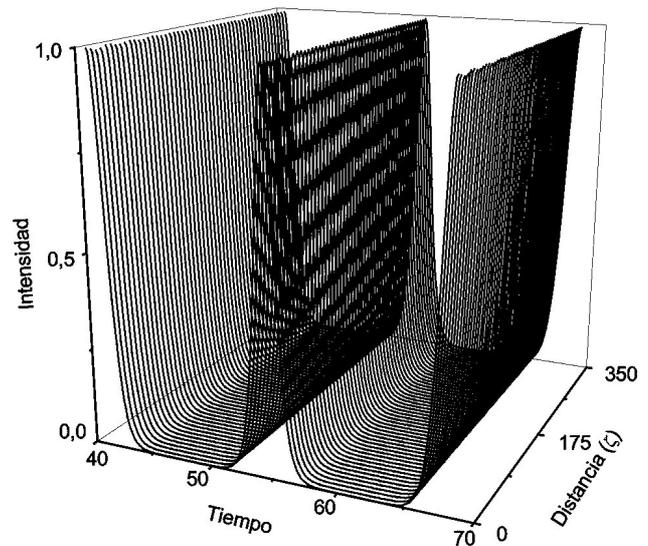


FIGURA 3. Suma de las intensidades de los dos modos para una onda  $cn$  ( $m = 0.99999$ ) mientras se propagan diferentes distancias  $\zeta$ .

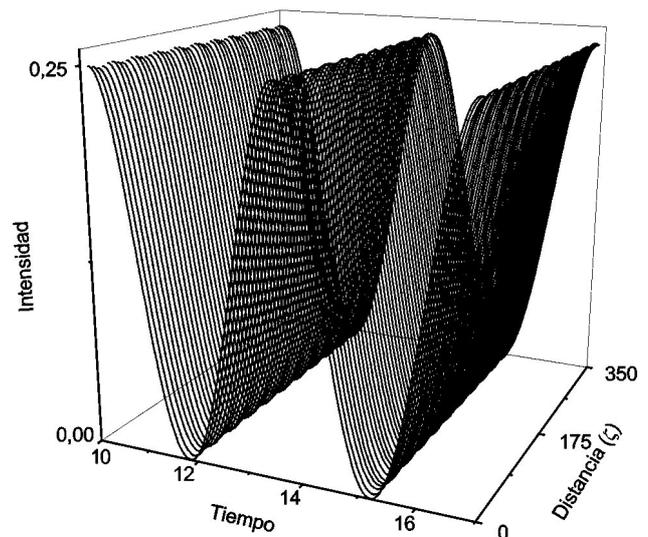


FIGURA 4. Suma de las intensidades de los dos modos para una onda  $cn$  ( $m = 0.5$ ) mientras se propagan distintas distancias  $\zeta$ .

(Fig 6), con  $\nu = 0.1$ , propagándose distintas distancias  $\zeta$ . Haremos énfasis en la Fig. 7, en donde se exhibe la gráfica de la suma de las intensidades pico de los dos modos al final de la propagación,  $I_p(\zeta) = \max\{|a|^2 + |b|^2\}$ , para valores diferentes del parámetro  $\nu$  hasta el punto crítico donde se destruye el acoplamiento, es decir, desde  $\nu = 0.1$  hasta  $\nu = 2.3$ , considerando  $m = 0.99999$ , para ondas del tipo  $cn$ , junto con un ajuste polinomial de tercer orden. Se observa en la gráfica que la intensidad pico disminuye conforme aumenta el desentonamiento entre las velocidades de grupo de los dos modos que se propagan a lo largo de la fibra, hasta el punto en que se rompe el acoplamiento entre ellos. Es claro que para valores de  $\nu < 0.5$  se tiene un error menor que el 10 % entre las soluciones numéricas y las soluciones analíticas, y para  $\nu < 0.4$  el error es menor que el 5 %, como se distingue en la Fig. 7. Esto demuestra la validez de las soluciones analíticas halladas en la sección 3 donde se consideran las ecuaciones (4) y se hallan soluciones para  $\nu \ll 1$ . Por otro lado, vemos que para valores de  $\nu < 2$  se obtiene un acoplamiento no lineal entre los modos y que a partir de  $\nu > 2$  comienza a romperse este acoplamiento. Se da un comportamiento idéntico entre las ondas tipo  $cn$  y  $dn$  para los mismos valores de los parámetros  $\nu$  y  $m$ , así como para  $m = 0.5$ .

Así mismo, es de nuestro interés exponer la influencia del parámetro de amplitud de la función Jacobiana en la propagación de los pulsos, lo cual hacemos en las siguientes figuras. Es bien conocido el fenómeno de la autocompresión de solitones [12]; sin embargo, nos interesa investigar otros casos en los que intervienen funciones periódicas. En la Fig. 8 presentamos la gráfica de la intensidad de uno de los modos para la función  $cn$ , considerando un factor de  $N = 1$  en  $u(\tau) = N \cdot U_c cn(\tau; m)$ , donde  $N$  es un número entero ( $1 \leq N \leq 4$ ). En la Fig. 9 se exhibe la gráfica de la intensidad considerando  $N = 2$ , observándose la autocompresión

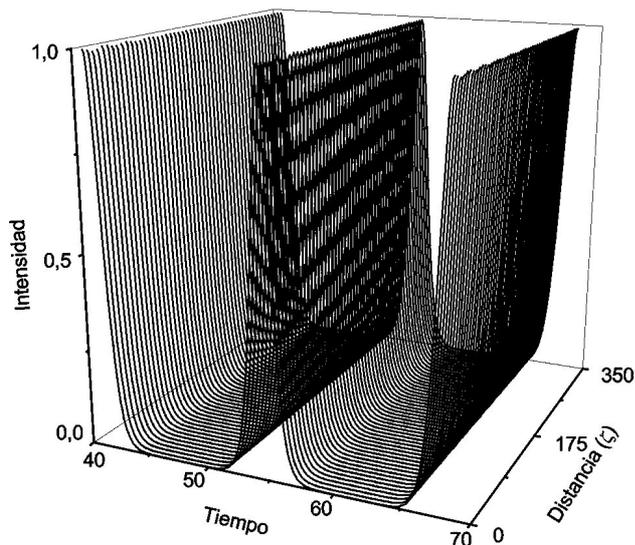


FIGURA 5. Suma de las intensidades de los dos modos para una onda  $dn$  ( $m = 0.99999$ ) mientras se propagan diferentes distancias  $\zeta$ .

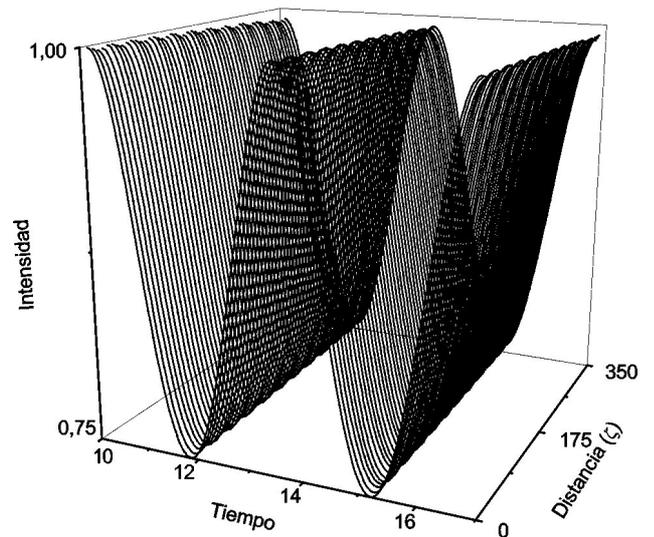


FIGURA 6. Suma de las intensidades de los dos modos para una onda  $dn$  ( $m = 0.5$ ) mientras se propagan distintas distancias  $\zeta$ .

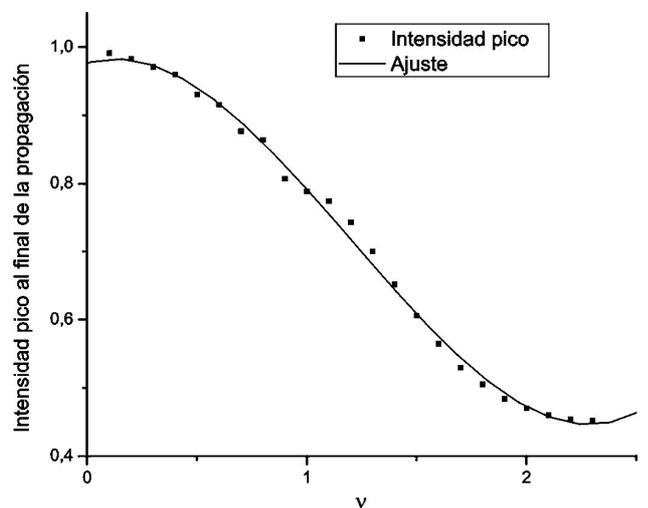


FIGURA 7. Suma de las intensidades pico de los dos modos al final de la propagación para diferentes valores del parámetro  $\nu$ .

(“enfocamiento en el tiempo”) del modo mientras se propaga a través de la fibra. En la Fig. 10 exponemos la gráfica de la intensidad considerando  $N = 3$ , donde vemos que el modo se comprime mientras se propaga a través de la fibra. La Fig. 11 es de particular interés, pues en ella presentamos las gráficas de la intensidad pico de uno de los modos mientras se propaga diferentes distancias  $\zeta$  para distintos valores de  $N$ . Observamos, primero, que la intensidad pico al inicio de la propagación es mayor mientras mayor es el parámetro de amplitud. También podemos ver que la autocompresión ocurre a distancias más cortas de propagación mientras mayor es el parámetro de amplitud, y además, que el ancho a la mitad del máximo del pulso disminuye conforme aumenta el parámetro de amplitud; esto significa que el tiempo de duración de la autocompresión disminuye conforme aumenta ese parámetro. Aún más, podemos darnos cuenta que la intensidad pico aumenta casi 6 veces su valor inicial en la autocom-

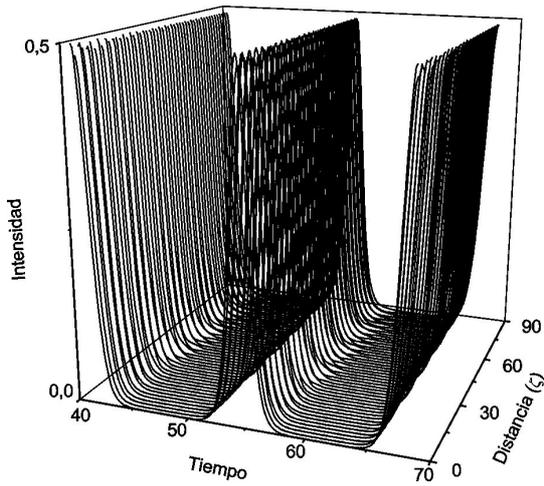


FIGURA 8. Intensidad de uno de los modos para una onda  $cn$  mientras se propaga a varias distancias  $\zeta$ , considerando  $N = 1$ ,  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ .

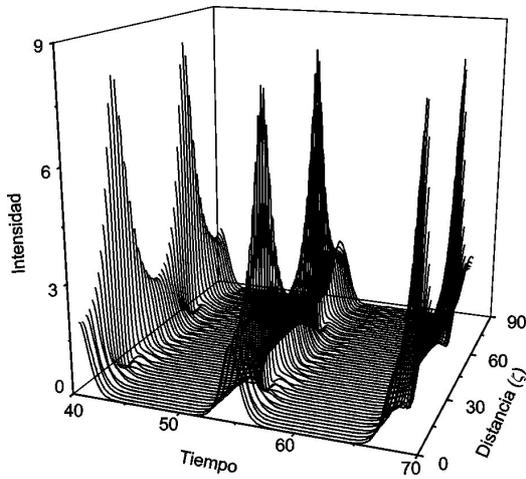


FIGURA 9. Intensidad de uno de los modos para una onda  $cn$  mientras se propaga a varias distancias  $\zeta$ , considerando  $N = 2$ ,  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ .

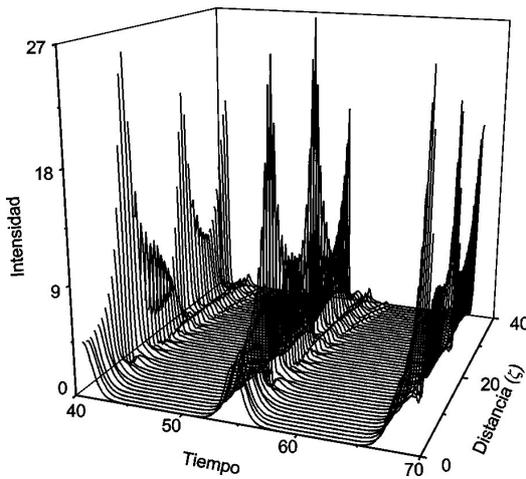


FIGURA 10. Intensidad de uno de los modos para una onda  $cn$  mientras se propaga una distancia  $\zeta$ , considerando  $N = 3$ ,  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ .

presión para el valor de  $N = 4$ , casi 5 veces para  $N = 3$ , y casi 3 veces para  $N = 2$ . Estas observaciones se plantean mejor en las siguientes gráficas. La Fig. 12 muestra la gráfica de la relación entre la distancia focal y el factor  $N$ , viendo que la distancia (focal) a la que se da la autocompresión es menor mientras mayor es el factor  $N$ . Por último, en la Fig. 13 mostramos la relación de la intensidad pico del pulso con el factor  $N$ , en la cual podemos notar un aumento en la intensidad pico mientras mayor es el valor del factor  $N$ , esto es, mientras más grande es el parámetro de amplitud. Con estos resultados representados en las figuras anteriores, podemos decir que estas guías de onda con inhomogeneidades periódicas pueden ser empleadas para comprimir efectivamente los pulsos y obtener pulsos ultracortos.

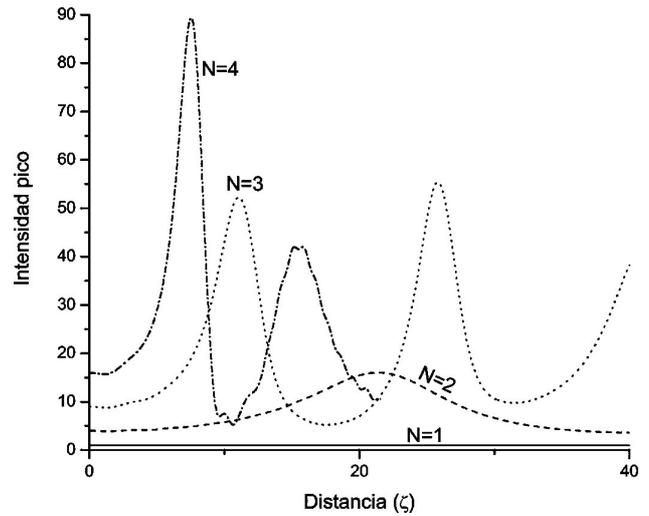


FIGURA 11. Autocompresión de una onda  $cn$  para  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 3$ ,  $N = 4$ ,  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ , para diferentes distancias  $\zeta$ .

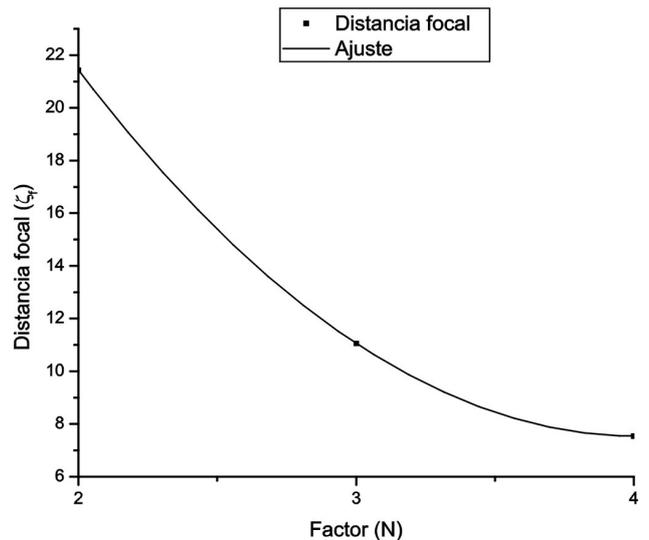


FIGURA 12. Relación entre la distancia focal y el factor  $N$  para una onda  $cn$ , tomando en cuenta que  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ .

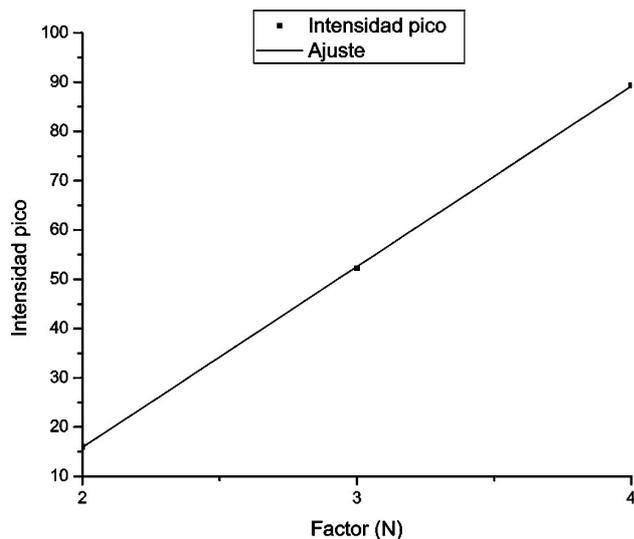


FIGURA 13. Relación entre la intensidad de uno de los modos para una onda  $cn$  y el factor  $N$ , tomando en cuenta que  $m = 0.99999$  y  $\nu = 0.6$ .

## 6. Conclusiones

Se propusieron funciones jacobianas del tipo  $cn$ ,  $dn$  y  $sn$  como soluciones de las ecuaciones no lineales (5) y (6). Hemos mostrado que las funciones jacobianas funcionan muy bien en la solución de ondas periódicas para ecuaciones de evolución no lineales, en concordancia con lo expuesto por

Liu *et al.* en la Ref 8 y por Fu *et al.* en la Ref 9. Se observa que para valores de  $\nu \ll 1$ , las soluciones numéricas son muy parecidas a las soluciones analíticas. Al modelar una secuencia de pulsos ópticos utilizando tales funciones jacobianas, es posible el acoplamiento no lineal para valores del parámetro  $\nu < 2$ , mientras que para valores mayores, el acoplamiento se destruye. Al obtener un acoplamiento entre los dos modos, existe un intercambio de energía entre ellos mientras viajan a lo largo de la fibra, permitiendo que se propaguen sin cambios mayores distancias.

Por otro lado, al tener un factor dentro de la solución que modifica al parámetro de amplitud de la función Jacobiana, observamos autocompresión del pulso mientras se propaga a lo largo de la fibra. Mientras más grande es el parámetro de amplitud, la autocompresión se da más localizada, el valor de la intensidad pico es mayor y la distancia a la cual ocurre es menor.

Finalmente, podemos mencionar que una de las aplicaciones para guías de ondas con características de inhomogeneidades periódicas más importantes es, por ejemplo, la posibilidad de obtener pulsos de muy corta duración usando a las fibras como compresores de pulsos.

## Agradecimientos

RPA agradece a Arnulfo Luis Ramos por su invaluable ayuda en la preparación y revisión del manuscrito.

\*. De estancia sabática por parte de la FCFM-BUAP.

1. V. Vysloukh, L.P. Gevork'ian, *Izv. Akad. Nauk, USSR*. **55** (1991) 322.
2. S.A. Akhmanov, V.A. Vysloukh y A.S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses*, American Institute of Physics, New York. (1992).
3. S. Chi, B. Luo, H. Tseng, *Opt. Comm.* **206** (2002) 115.
4. J.D. Ania-Castañón, P. García-Fernández, J.M. Soto-Crespo, *Opt. Lett.* **25** (2000) 159.
5. W. Nakagawa, R. Tyan, P. Sun, F. Xu, Y. Fainman, *J. Opt. Soc. Am. A*. **18** (2001) 1072.
6. M. Yamada, K. Sakuda, *Appl. Opt.* **26** (1987) 3474.
7. R.W. Ziolkowski, M. Tanaka, *J. Opt. Soc. Am. A* **16** (1999) 930.
8. S. Liu, Z. Fu, S. Liu, Q. Zhao, *Phys. Lett. A*. **289** (2001) 69.
9. Z. Fu, S. Liu, Q. Zhao, *Phys. Lett. A*. **290** (2001) 72.
10. E.J. Parkes, B.R. Duffy, and P.C. Abbott, *Phys. Lett. A*. **295** (2002) 280.
11. M.A. Rodriguez, M.S. Malcuit, J.J. Butler, *Opt. Comm.* **177** (2000) 251.
12. G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press. 1995) Cap. 1-7.
13. M. Abramowitz, I.A. Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications 1965) Cap. 16.