

# Transmisión de pulsos luminosos ultracortos que inciden oblicuamente sobre un medio absorbente y/o dispersivo

H. Ramírez Díaz

*Escuela de Ciencias Físico Matemáticas,  
Universidad Autónoma de Sinaloa,  
e-mail: hramirez@fcfm.buap.mx*

E.A. Martí Panameño y M.M. Méndez Otero  
*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
e-mail: emarti@fcfm.buap.mx, motero@fcfm.buap.mx*

C.A. Alejo Armenta

*Centro de Ciencias de Sinaloa,  
Culiacán, Sinaloa, México,  
e-mail: castulo@computo.ccs.net.mx*

Recibido el 3 de octubre de 2002; aceptado el 14 de octubre de 2003

Se estudia la transmisión, a través de un medio material, de pulsos ópticos polarizados linealmente, los cuales inciden oblicuamente desde el vacío. La geometría analizada considera que el campo eléctrico tiene componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia. Se encuentran expresiones analíticas para los campos eléctrico y magnético dentro del medio material; la forma funcional de dichas expresiones permite relacionar las partes imaginaria y real del vector de onda, tanto con la pérdida de la amplitud espectral del pulso como con su dirección de propagación. Se encuentra una relación integral generalizada para el vector de Poynting, en el dominio del tiempo, la cual es válida para medios dispersivos y absorbentes.

*Descriptores:* Electromagnetismo; propagación de ondas; pulsos luminosos ultracortos.

In this work is studied the transmission of linearly polarized optical pulses, which arrive from vacuum into a material medium at arbitrary angle of incidence. The considered geometry take into account that the electric field has parallel and perpendicular components to the plane of incidence. Analytical expressions are obtained for electrical and magnetic fields inside the material medium, the functional form of the expressions allow to relate the imaginary and real parts of the wave vector with the loss of the pulse spectral amplitude and with its propagation direction, respectively. It is found a generalized integral relation for the Poynting vector, in the time domain, which is valid for dispersive and absorbent media.

*Keywords:* Electromagnetism; wave propagation; ultrashort light pulses.

PACS: 41.20.-q

## 1. Introducción

El estudio de la interacción del campo electromagnético con los medios materiales ha cobrado gran actividad, sobre todo en el caso en que la radiación es pulsada. De central importancia son los fenómenos ultrarrápidos [1–4]. La investigación de esta clase de eventos ha dado lugar a la observación de fenómenos *superluminales* [El término *superluminal* es aplicado en aquellas situaciones en donde la velocidad del pulso óptico es mayor que la velocidad de la luz en el vacío], los cuales aparentan violar aspectos tan fundamentales como el principio de causalidad [5–7]. Se ha establecido la relación de la interacción de la radiación y la materia con los fenómenos de tunelamiento cuántico [8] y particularmente en la Ref. 9 se muestra la identidad formal que existe entre los modos evanescentes de una guía de onda y el tunelamiento unidimensional. Esta analogía ha sido empleada para el estudio del tunelamiento en experimentos con microondas, dando como resultado la observación de velocidades de tunelamiento

superluminales [10]. Steinberg establece en [11], que esta violación aparente de la causalidad no surge por el hecho de que se está trabajando con la ecuación de Schrödinger no relativista, dado que esta situación también se presenta con las soluciones de las ecuaciones de Maxwell, las cuales son invariantes ante las transformaciones de Lorentz.

Así, un aspecto importante de primer orden, en los estudios teóricos y numéricos, es el relacionado con el significado de la velocidad de grupo en situaciones donde ésta es mayor que la velocidad de la luz en el vacío o incluso donde llega a ser negativa, lo cual ha conducido a muchos investigadores a revisar con mayor detenimiento el principio de causalidad de Einstein, pues parecería que este tipo de fenómeno viola dicho principio. En este contexto Heitmann y Nimtz en la Ref. 12 hacen una revisión de los diferentes conceptos de velocidad relacionados con ondas electromagnéticas y afirman que el principio de causalidad no es violado, dado que la velocidad a la que se hace referencia en el principio de relatividad no es la velocidad de grupo, sino la velocidad del frente de la

onda, la cual es deducible de la invariancia de las ecuaciones de Maxwell. También en las Refs. 13 y 14 se afirma que la invariancia lorentziana se puede romper, debido a la existencia de condiciones a la frontera.

Es una idea común pensar que la velocidad de grupo ( $v_g$ ) de un paquete de ondas, en el vacío, es siempre  $c$ , sin embargo, Esposito [15] comenta que no existe prueba alguna de que los pulsos con  $v_g = c$  sean las únicas soluciones de las ecuaciones de Maxwell, y plantea un método general para la construcción de soluciones de las ecuaciones de Maxwell que se propagan con  $v_g \neq c$ . Por otro lado, en algunos textos [16, 17] el problema de las velocidades *superluminales* se pretende resolver suponiendo que bajo las condiciones en que esto ocurre, la velocidad de grupo pierde su significado físico. Otro enfoque más reciente [18], establece que la velocidad de grupo se puede calcular, a través del tiempo de tránsito, en forma análoga a como se calculan en la mecánica cuántica los valores esperados de las variables dinámicas, empleando al vector de Poynting como una función de distribución. Por otro lado, en la velocidad de transporte de energía [19] que viene definida por  $v_E = S/\eta$ , en donde  $S$  es la densidad de flujo de energía y  $\eta$  es la densidad de energía total, no se considera que  $\eta$  esté conformada por contribuciones con orígenes diferentes y por ello mismo con un comportamiento de transporte distinto, así Diener [20] modifica la definición de la velocidad de transporte de energía tomando en cuenta que hay una parte de la energía del campo que se propaga y otra que no lo hace, y por ello considera que para que el concepto de velocidad tenga sentido, la definición sólo debería considerar aquella parte de la densidad de energía que es realmente transportada en lugar de considerar la densidad de energía total.

En la mayoría de los trabajos citados, tanto la velocidad de grupo como el vector de Poynting aparecen de manera reiterada como dos conceptos fundamentales para la descripción de la propagación de las ondas.

Tradicionalmente el concepto de velocidad de grupo se basa en el desarrollo del vector de onda alrededor de la frecuencia portadora,

$$\vec{k}(\omega) = \vec{k}(\omega_0) + \left. \frac{\partial \vec{k}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \vec{k}}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots,$$

y se establece la relación del inverso de  $(\partial k)/(\partial \omega)$  con la velocidad de grupo, así entonces, el significado de la velocidad de grupo está limitado, pues si el ancho de banda del pulso abarca una parte importante de la región de resonancia será necesario incluir un mayor número de términos para describir de manera apropiada los cambios en la fase del mismo. Es más, si el ancho de banda excede el módulo de la diferencia entre la frecuencia portadora y el polo más cercano del índice de refracción, este desarrollo ya no converge [21].

El vector de Poynting desde su establecimiento ha sido empleado en tal cantidad de situaciones que en muchas ocasiones se pierden de vista las limitaciones que tiene. Así en la Ref. 22 se establece que la validez general del vector de Poynting en la forma  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$  está fundamentada en la continuidad de su componente normal a través de la interfase entre dos medios, sin embargo, D.F. Nelson en la Ref. 23 afirma que esta condición, aunque es necesaria no resulta suficiente para garantizar el carácter general de la definición de este vector. También J. Peatross y colaboradores en la Ref. 18 parten del hecho de que la densidad de energía no es el elemento directamente importante, en el cálculo de la velocidad del pulso, sino el vector de Poynting, es decir el tiempo de llegada o de arribo de la energía del pulso a un punto determinado, después de haber recorrido una distancia dada y posteriormente afirman que el vector de Poynting en el dominio de las frecuencias se puede definir como  $\vec{S}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}, \omega) \times \vec{B}(\vec{r}, \omega)$  [La flecha bidireccional se refiere a un vector en el dominio de frecuencia]. Pero este enfoque presenta un defecto fundamental que consiste en pensar que el vector de Poynting en la forma  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$  sigue siendo válida en medios dispersivos con absorción.

En virtud de lo anterior, en el presente trabajo hay dos aspectos que requieren una amplia discusión, pues son de fundamental importancia en el estudio de la propagación en medios materiales de pulsos ultracortos de forma arbitraria, estos aspectos son:

- El conocimiento en detalle de los campos en el medio material, para el caso en que está siendo iluminado oblicuamente desde el vacío.
- La determinación de la forma del vector de Poynting, para pulsos de forma arbitraria, en un medio material dispersivo y absorbente.

En este artículo presentamos un análisis detallado y sencillo basado en la representación de los campos en el dominio espectral. Así, pues, mediante la transformación de la ecuación de onda al dominio espectral (ecuación de Helmholtz) y aplicando las condiciones a la frontera, se obtiene la forma funcional de los campos eléctrico y magnético que se propagan en un medio homogéneo de espesor arbitrario. El análisis que se presenta considera el caso de incidencia oblicua para ondas con polarización lineal. Por otro lado, para el tratamiento del vector de Poynting, se busca una ecuación que tenga la forma de una ley de conservación, pero en el dominio de las frecuencias, y a partir de allí se encuentra la expresión que debe tener el vector de Poynting en el dominio del tiempo.

## 2. Pulsos ópticos en el espacio de fourier

Para un medio no magnético, homogéneo, isótropo, lineal y sin fuentes, las ecuaciones de Maxwell adoptan la siguiente

forma simplificada [16]:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0. \tag{4}$$

Las ecuaciones materiales para los vectores de campo eléctrico  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  y para los vectores de campo magnético  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  vienen dadas por

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \epsilon(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau, \tag{5}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{6}$$

Es conveniente transformar cada uno de los campos vectoriales anteriores del dominio temporal al dominio de las frecuencias empleando la transformada de Fourier siguiente:

$$F(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \tag{7}$$

Al aplicar la transformada (7) a las Ecs. (1) - (6) se obtiene [En lo sucesivo, los vectores en el dominio temporal se denotarán con una flecha simple y los vectores en el dominio de la frecuencia con una flecha bidireccional].

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B}, \tag{8}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \vec{D}, \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \tag{11}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \vec{E}, \tag{12}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{13}$$

Aquí  $\epsilon(\omega)$  es la permitividad relativa o “constante dieléctrica”; esta es una función compleja dependiente de la frecuencia, cuya forma explícita depende del medio material o del modelo matemático empleado,  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío, y  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  denotan los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

Combinando de manera apropiada las Ecs. (8)–(13) se encuentra que cada componente  $\tilde{\Psi}$  de  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  satisface la ecuación

$$\nabla^2 \tilde{\Psi} + \frac{\epsilon\omega^2}{c^2} \tilde{\Psi} = 0. \tag{14}$$

Empleando el método de separación de variables la solución de (14) es de la forma

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega) = G(\omega) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}), \tag{15}$$

donde  $G(\omega)$  da la dependencia explícita de  $\tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega)$  con respecto a la frecuencia y el vector de onda  $\vec{k}$  debe cumplir que

$$k^2(\omega) = k_0^2 \epsilon(\omega). \tag{16}$$

Entonces, si se encuentra  $\vec{k}(\omega)$  y se conoce la función  $G(\omega)$ , se pueden determinar los campos y el vector de Poynting en todos los puntos dentro del medio material. Para el caso de medios inhomogéneos, la función dieléctrica y el vector de onda  $\vec{k}$  serían funciones tanto de  $\vec{r}$  como de  $\omega$ , esto es consecuencia de la Ec. (16).

Considerando la geometría planteada en la Fig.1, en la cual el plano de incidencia es el plano  $x - z$ , el eje  $x$  se encuentra a lo largo de la interfase, el eje  $z$  apunta hacia el interior del medio y el eje  $y$  es perpendicular al plano de incidencia; exigiendo continuidad de las componentes de  $\vec{k}$  a lo largo de la interfase se tiene que

$$k_x = k_0 \sin \theta_0, \tag{17}$$

en donde  $k_0 = \omega/c$  es la magnitud del vector de onda en el vacío. Esta componente debe ser continua a través de la interfase [16]. Como el plano de incidencia es el plano  $x - z$ , entonces  $k_y = 0$ , y así la componente normal del vector de onda dentro del medio vendrá dada por

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2. \tag{18}$$

Sustituyendo las Ecs. (16) y (17) en esta última expresión se tiene que

$$k_z^2 = k_0^2 [\epsilon(\omega) - \sin^2 \theta_0]. \tag{19}$$

Como  $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$ , entonces  $k_z$  se puede escribir en la forma

$$k_z = k_{z1} + ik_{z2}, \tag{20}$$

y la substitución de la Ec. (20) y  $\epsilon(\omega)$  en la Ec. (19) da

$$k_{z1}^2 - k_{z2}^2 = k_0^2 [\epsilon_1 - \sin^2 \theta_0] \tag{21}$$

y

$$2k_{z1}k_{z2} = k_0^2 \epsilon_2. \tag{22}$$

Formalmente, la solución simultánea de las Ecs. (21) y (22) da  $k_{z1}$  y  $k_{z2}$ , en términos de la frecuencia, el vector de onda en el vacío  $k_0$  y el ángulo de incidencia  $\theta_0$ . Así entonces, el vector de onda en el medio tomará la siguiente forma:

$$\vec{k}(\omega) = k_x(\omega) \hat{x} + k_{z1}(\omega) \hat{z} + ik_{z2}(\omega) \hat{z},$$

donde  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$  son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes  $x$  y  $z$  respectivamente.

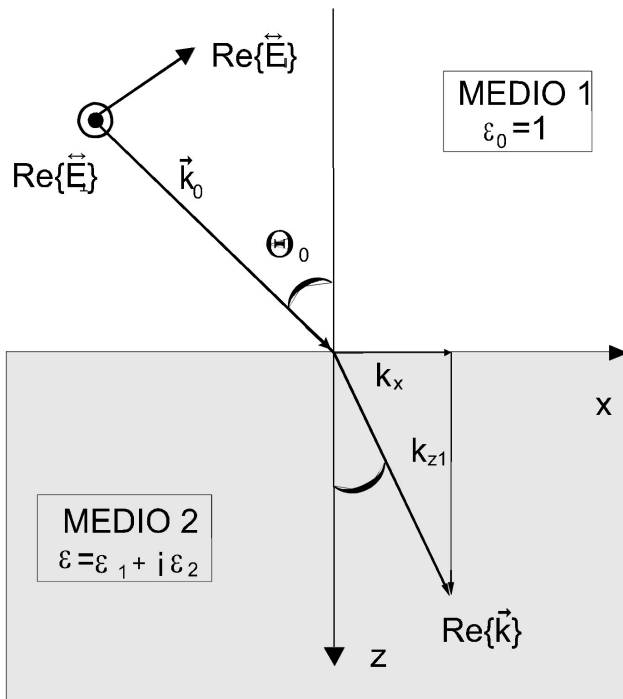


FIGURA 1. Configuración de las componentes paralela ( $Re\{\vec{E}_\parallel\}$ ) y perpendicular ( $Re\{\vec{E}_\perp\}$ ) del campo eléctrico del pulso incidente y de los vectores de onda incidente ( $\vec{k}_0$ ) y refractado ( $\vec{k}$ ), con respecto al plano de incidencia (plano  $x - z$ ). El pulso incidente se encuentra polarizado linealmente y cruza la interfase desde el medio 1 ( $\epsilon_0 = 1$ ) al medio 2 ( $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$ ). En la figura no se muestran las componentes del campo magnético.

Por lo cual la solución (15) toma la siguiente forma:

$$\tilde{\Psi}(\vec{r}, \omega) = [G(\omega) \exp(-k_{z2}(\omega)z)] \exp(i(k_x(\omega)\hat{x} + k_{z1}(\omega)\hat{z}) \cdot \vec{r}). \quad (23)$$

Así, claramente  $k_{z2}(\omega)$  está relacionado con la atenuación de cada una de las componentes de frecuencia individuales de la onda y  $k_{z1}(\omega)$  con los cambios de fase espectrales del campo, al penetrar en el medio material, a través de los procesos de absorción o amplificación. Por otro lado, debido a que  $k_y = 0$ , entonces las Ecs. (10) y (11) se pueden escribir como

$$k_x B_{\omega_x}^z + k_z B_{\omega_z}^z = 0, \quad (24)$$

$$k_x E_{\omega_x}^z + k_z E_{\omega_z}^z = 0. \quad (25)$$

Estas relaciones se deben de cumplir tanto en el vacío como en el medio material.

Así entonces, hasta el momento, se han establecido las condiciones que el vector de onda debe satisfacer como consecuencia de exigir el cumplimiento de las condiciones en la frontera. Además, las dos últimas ecuaciones proporcionan una relación entre estas componentes del vector de onda y las componentes de los vectores de campo magnético y de campo eléctrico. De aquí en adelante es necesario ser más específico con relación a la orientación de los campos respecto

del plano de incidencia, es decir, plantear la polarización del pulso incidente. Esto es realizado en la próxima sección.

### 3. Pulsos incidentes polarizados linealmente

En el estudio de la propagación de pulsos en medios materiales, al analizar la evolución del estado de polarización, el procedimiento estándar válido para sistemas lineales, consiste en tratar los casos de polarización arbitraria como una superposición de polarizaciones lineales mutuamente perpendiculares, a saber, polarización **p** y polarización **s**. Como se sabe, el caso de polarización **p**, ocurre cuando el campo eléctrico se encuentra en el plano de incidencia y el campo magnético es perpendicular a dicho plano, mientras que el caso de polarización **s** es cuando el campo magnético se encuentra en el plano de incidencia y el campo eléctrico es perpendicular a dicho plano. Sin embargo y con el fin de dar una mayor utilidad a los resultados mostrados más abajo, en este artículo se considerará una onda polarizada linealmente con componentes perpendicular y paralela al plano de incidencia.

#### 3.1. Transmisión de pulsos polarizados linealmente

De forma explícita la Ec. (23) para los campos eléctrico y magnético, toma la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \hat{E}_1 [F(\omega) \exp(-k_{z2}z)] \exp(i\phi), \quad (26)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \hat{B}_1 [L(\omega) \exp(-k_{z2}z)] \exp(i\phi), \quad (27)$$

donde  $\phi = (k_x x + k_{z1} z)$  y  $\hat{E}_1, \hat{B}_1$  son vectores unitarios que dan la polarización de los campos. O, de manera abreviada, se pueden reescribir las Ecs. anteriores como

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_\omega^z \exp(i\phi), \quad (28)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \vec{B}_\omega^z \exp(i\phi), \quad (29)$$

donde los módulos de  $\vec{E}_\omega^z$  y  $\vec{B}_\omega^z$  dan las amplitudes de los campos en la posición  $z$ . Así pues, en general se tiene que

$$\vec{E}_\omega^z = (E_{\omega_x}^z, E_{\omega_y}^z, E_{\omega_z}^z), \quad (30)$$

$$\vec{B}_\omega^z = (B_{\omega_x}^z, B_{\omega_y}^z, B_{\omega_z}^z). \quad (31)$$

Así, los campos eléctrico y magnético en el medio vendrán dados por

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = (E_{\omega_x}, E_{\omega_y}, E_{\omega_z}), \quad (32)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = (B_{\omega_x}, B_{\omega_y}, B_{\omega_z}), \quad (33)$$

donde

$$E_{\omega l} = E_{\omega l}^z \exp(i\phi), \quad (34)$$

$$B_{\omega l} = B_{\omega l}^z \exp(i\phi), \quad (35)$$

con

$$E_{\omega l}^z = E_{\omega l}^0 \exp(-k_{z2}z), \tag{36}$$

$$B_{\omega l}^z = B_{\omega l}^0 \exp(-k_{z2}z), \tag{37}$$

donde  $l = x, y, z$ .

Para simplificar el análisis, se puede suponer que: o el par de componentes  $E_{\omega x}^z$  y  $E_{\omega y}^z$ , son reales, o bien que cualesquiera otro par de componentes del campo son reales. Si se toma la primera opción, y recordando que los campos físicos vienen dados por la parte real de estas expresiones, entonces en el medio material los campos vendrán dados por

$$Re(E_{\omega x}) = E_{\omega x}^z \cos \phi, \tag{38}$$

$$Re(E_{\omega y}) = E_{\omega y}^z \cos \phi, \tag{39}$$

$$Re(E_{\omega z}) = |E_{\omega z}^z| \cos(\phi - \pi - \alpha), \tag{40}$$

donde

$$|E_{\omega z}^z| = \frac{k_x E_{\omega x}^z}{|k_z|}$$

y

$$\alpha = \arctan \frac{k_{z2}}{k_{z1}}. \tag{41}$$

Así las Ec. (38), (39) y (40) dan las componentes del campo eléctrico dentro del medio material. Por otro lado, las componentes del campo magnético se obtienen usando la Ec. (8) y vienen dadas por

$$H_{\omega x} = \frac{k_z}{\omega \mu_0} E_{\omega y}, \tag{42}$$

$$H_{\omega y} = \frac{k_x^2 + k_z^2}{\omega \mu_0 k_z} E_{\omega x} \tag{43}$$

$$H_{\omega z} = \frac{k_x}{\omega \mu_0} E_{\omega y}. \tag{44}$$

Nuevamente las partes reales de estas tres últimas ecuaciones nos proporcionan los campos físicos.

Así entonces, los campos eléctrico y magnético en el dominio espectral se pueden ver como los vectores columna

$$Re(\vec{E}) = \begin{pmatrix} Re(E_{\omega x}) \\ Re(E_{\omega y}) \\ Re(E_{\omega z}) \end{pmatrix},$$

$$Re(\vec{B}) = \begin{pmatrix} Re(B_{\omega x}) \\ Re(B_{\omega y}) \\ Re(B_{\omega z}) \end{pmatrix}.$$

Hasta el momento se ha obtenido una solución para los campos dentro del medio material para el caso de incidencia oblicua del campo electromagnético, en virtud de que se tienen las expresiones analíticas de los campos eléctrico y magnético dentro del medio material en función de la profundidad de penetración.

### 3.2. Empalme de los campos en la interfase

Para completar la solución al problema de incidencia oblicua sólo resta empalmar las ondas incidente, reflejada y refractada en la interfase. Así, si  $E_{0\omega x}$ ,  $E_{0\omega y}$  y  $E_{0\omega z}$  son las amplitudes del campo eléctrico incidente polarizado linealmente, entonces la aplicación de las condiciones a la frontera proporciona las relaciones

$$\frac{E_{\omega x}^0}{E_{0\omega x}} = \frac{2k_0}{k_0 + \frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z} \cos \theta_0}, \tag{45}$$

$$\frac{E_{\omega y}^0}{E_{0\omega y}} = \frac{2}{1 + \frac{k_z}{k_0} \cos \theta_0}, \tag{46}$$

$$\frac{E_{\omega z}^0}{E_{0\omega z}} = -\frac{k_x}{k_z}. \tag{47}$$

Estas tres últimas relaciones son válidas para pulsos de forma arbitraria y representan una generalización de las ecuaciones de Fresnel. Se encuentran expresadas en el dominio espacio-frecuencia.

A partir de aquí, la atención será enfocada en los procesos de transporte de energía en el medio material, esto es, se estudiará el vector de Poynting. Es importante mencionar que la forma en que se realiza el cálculo no es la que se sigue convencionalmente, sino que se toma ventaja de la simplicidad que adquieren las relaciones de los campos en el dominio de la frecuencia.

### 4. El vector de Poynting

Como ya se mencionó en la Introducción, el vector de Poynting juega un papel destacado en la búsqueda de una explicación del origen de los fenómenos superluminales, pues es empleado en algunas de las definiciones de velocidad para los pulsos ópticos y por ello resulta relevante contar con una expresión que sea válida para medios con dispersión y absorción (amplificación).

El vector de Poynting está dado como

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

para el caso en que los campos electromagnéticos son representados por cantidades reales y cuando los medios de propagación son lineales, no dispersivos y sin pérdidas. Cuando se permite una representación compleja de los campos electromagnéticos, el vector de Poynting para trenes de onda infinitos viene dado por

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}^*(\vec{r}, t)]$$

y se debe tomar la parte real de esta cantidad para obtener el promedio temporal del flujo de energía del campo. Esta última ecuación es válida para propagación en medios lineales,

no dispersivos y sin pérdidas. Cuando se intenta obtener una expresión para el vector de Poynting que sea válida para campos de forma arbitraria que se propagan en medios lineales, absorbentes y dispersivos, generalmente se enfrentan diversas dificultades. El procedimiento común consiste en combinar de manera apropiada las ecuaciones de Maxwell en el dominio temporal con el objetivo de establecer una ecuación que tenga la forma de una ley de conservación [23], tal como

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = f(\vec{E}, \vec{J}), \tag{48}$$

donde  $U$  es la densidad de energía,  $\vec{S}$  es el vector de Poynting y  $f(\vec{E}, \vec{J})$  se encuentra relacionada con el trabajo realizado por los campos, esto es, representa la conversión de energía electromagnética en mecánica, térmica, etc. Trabajando con los campos en el dominio espacio-temporal y suponiendo que la función dieléctrica y la permeabilidad magnética son funciones reales resulta bastante sencillo obtener tal ecuación de balance. Por otro lado, en el caso en que la función dieléctrica y la permeabilidad magnética son funciones complejas, ya no es posible separar los términos relacionados con la densidad y flujo de energía de los relacionados con el trabajo que realizan los campos. Sin embargo, si la ecuación de conservación (48) y las ecuaciones de Maxwell se transforman al dominio espacio-frecuencia las dificultades desaparecen y es posible entonces obtener la expresión buscada para el vector de Poynting. Así, pues, si consideramos que en esta derivación tenemos que  $\vec{J} \neq 0$  y se parte de

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*), \tag{49}$$

empleando las ecuaciones de Maxwell tenemos que

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) + i\omega \vec{H}^* \cdot \vec{B} - i\omega \vec{E} \cdot \vec{D}^* = -\vec{E} \cdot \vec{J}^*. \tag{50}$$

También se tiene que

$$\nabla \cdot (\vec{E}^* \times \vec{H}) + i\omega \vec{E}^* \cdot \vec{D} - i\omega \vec{H} \cdot \vec{B}^* = -\vec{E}^* \cdot \vec{J}. \tag{51}$$

Combinando las Ecs. (50) y (51) se encuentra que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}}{2} \right) \\ + 2i\omega \left( \frac{\vec{H}^* \cdot \vec{B} - \vec{H} \cdot \vec{B}^* - \vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{E}^* \cdot \vec{D}}{4} \right) \\ = -\left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{J}^* + \vec{E}^* \cdot \vec{J}}{2} \right). \end{aligned} \tag{52}$$

Comparando la Ec. (52), con la ecuación de continuidad en el dominio de frecuencia, entonces el vector de Poynting tendrá la forma

$$\vec{S}(\vec{r}, \omega) = \frac{\vec{E}(\vec{r}, \omega) \times \vec{H}^*(\vec{r}, \omega) + \vec{E}^*(\vec{r}, \omega) \times \vec{H}(\vec{r}, \omega)}{2}. \tag{53}$$

Aplicando la transformada inversa de (7) a la Ec. (53) el vector de Poynting en el dominio del tiempo será de la forma

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{E}(\vec{r}, t' + t) \times \vec{H}^*(\vec{r}, t') \\ + \vec{E}^*(\vec{r}, t' - t) \times \vec{H}(\vec{r}, t')) dt'. \end{aligned} \tag{54}$$

Esta última ecuación puede ser el punto de partida para abordar problemas tan generales como aquellos relacionados con el estudio de la propagación de pulsos ópticos de forma arbitraria en medios materiales reales, esta expresión contiene como casos particulares las definiciones del vector de Poynting, para el caso de medios no absorbentes y no dispersivos, cuando los campos eléctrico y magnético son representados por campos vectoriales reales y cuando ambos son representados por campos vectoriales complejos, éste y otros aspectos relacionados con el vector de Poynting, dado por la Ec. (54), son analizados en la Ref. 24.

### 5. Discusión y conclusiones

Para la descripción de la propagación de pulsos ópticos de forma arbitraria en medios absorbentes y dispersivos se ha comentado que se presentan situaciones en donde la velocidad de grupo toma valores mayores que la velocidad de la luz en el vacío o incluso donde llega a ser negativa, esto sucede particularmente en la región de dispersión anómala, la cual aparece dentro de una banda de absorción. Como ya se comentó anteriormente, esta situación es una aparente violación de la causalidad relativista, además en los libros de texto se comenta que cuando la velocidad de grupo presenta estas anomalías deja de ser un concepto útil. En este contexto en la literatura se ha dado una discusión bastante amplia y se ha visto la necesidad de dar una revisión cuidadosa de los diferentes conceptos de la velocidad de la ondas, aunado a ello muchos investigadores han propuesto experimentos que ayudarían al esclarecimiento de estas disyuntivas [6].

Peatross y colaboradores [18] plantean un esquema en el cual la velocidad de grupo mantiene siempre un significado, aún para pulsos de banda ancha. Ellos utilizan el concepto de tiempo de arribo, el cual lo definen a través de una integral de valores esperados, empleando para ello el vector de Poynting como una función de distribución; sólo que cometen un error, el cual consiste en suponer que el vector de Poynting para medios dispersivos y absorbentes sigue teniendo la forma

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t).$$

Asimismo Diener [20] establece una nueva definición alternativa para la velocidad de transporte de energía, la cual sin embargo se encuentra limitada a medios dispersivos y débilmente absorbentes, pero nuevamente parte de una expresión del vector de Poynting que no es válida para esta situación.

Una observación similar puede hacerse del trabajo de Bolda y colaboradores [6].

En este trabajo discutimos un tratamiento general para abordar el problema de la propagación de pulsos luminosos que inciden oblicuamente sobre un medio dieléctrico que puede presentar tanto dispersión como pérdidas, el pulso se encuentra polarizado linealmente, y se considera que tiene componentes tanto paralela como perpendicular al plano de incidencia. Este tratamiento no depende de algún modelo en particular que describa al medio dieléctrico. El punto de partida es la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, de la cual se plantea una solución, en donde se separa la dependencia explícita de la frecuencia respecto de la dependencia espacial. Las condiciones a la frontera dan tanto el vector de

onda como los campos eléctrico y magnético en el medio. De la forma funcional adoptada por los campos dentro del medio material, se puede ver que la parte real del vector de onda,  $Re\vec{k}(\omega)$ , está relacionada con la dirección de propagación de la onda y, por ello, con la velocidad de la misma. La otra dirección,  $Im\vec{k}(\omega)$ , es perpendicular al plano de amplitud constante, para una frecuencia fija, y da cuenta de la pérdida de amplitud espectral durante la propagación. Finalmente, las expresiones funcionales de los campos eléctrico y magnético y la ecuación integral para el vector de Poynting encontradas pueden ser empleadas en conjunto con las ideas de Peatross o con las de Diener para obtener una descripción más apropiada de la velocidad del pulso en cualquier medio real del cual se conozca su función dieléctrica.

- 
1. S.A. Akhmanov, V.A. Vysloukh, and A.S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses*, AIP, USA,(1992).
  2. J.C. Diels and W. Rudolph *Ultrashort Laser Pulse Phenomena* (Academic Press, USA, 1996).
  3. A. Baltuska, Z. Wei, M. Pshenichnikov, and D.A. Wiersma, *Optics Letters* **22** (1997) 102.
  4. Mufei Xiao, *Optics Letters* **25** (2000) 995.
  5. Y. Japha and G. Kurizki, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 586.
  6. E.L. Bolda, J.C. Garrison, and R.Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 2938.
  7. Wang Yung-ping and Zhang Dian-lin, *Phys. Rev. A* **52** (1995) 2597.
  8. H.M. Brodowsky, W. Heitmann y G. Nimtz, *Phys. Lett. A* **222** (1996) 125.
  9. Th. Martin and R. Landauer, *Phys. Rev. A* **45** (1992) 2611.
  10. R.Y. Chiao, *Phys. Rev. A* **48** (1993) R34.
  11. A.M. Steinberg, P.G. Kmiat, and R.Y. Chiao *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 708.
  12. W. Heitmann and G. Nimtz, *Phys. Lett. A* **196** (1994) 154.
  13. G. Barton and K. Scharnhorst, *J. Phys. A* **26** (1993) 2037.
  14. C.R. Leavens and W.R. McKinnon, *Phys. Lett. A* **194** (1994) 12.
  15. S. Esposito, *Phys. Lett. A* **225** (1997) 203.
  16. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* 3rd. ed., (J. Wiley & Sons, New York, USA 1998).
  17. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., (University Press, Cambridge 1980).
  18. J. Peatross, S.A. Glasgow, and M. Ware, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2370.
  19. L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, New York, (1960).
  20. G. Diener, *Phys. Lett. A* **235** (1997) 118.
  21. Hong Xiao and K.E. Oughstun, *J. Opt. Soc. Am. B* **16** (1999) 1773.
  22. L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Electrodynamics of Continuos Media* 2nd Ed., (Pergamon Press, England 1984).
  23. D.F. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4713.
  24. H. Ramírez y E.A. Martí (a ser publicado)