Estudio del número de pares creados por un campo eléctrico*

J. Haro
Dpt. Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya,
Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain,
e-mail: Jaime.Haro@upc.es

Recibido el 12 de febrero de 2003; aceptado el 23 de septiembre de 2003

En este trabajo estudiamos el número de pares creados en un campo eléctrico usando la aproximación semiclásica. Veremos que en la aproximación semiclásica el proceso estocástico $N(t)$="número de pares creados en el instante t", es un proceso estocástico de Poisson con esperanza $(\alpha\mathcal{E}(t))/(64mc^2)$, donde α es la constante de estructura fina y $\mathcal{E}(t)$ es la energía del campo eléctrico en el instante t.

Descriptores: Producción de pares; comportamiento asintótico de la teoría de perturbaciones; aproximación semiclásica.

In this work we study the number of produced pairs in an electric field using the semiclassical aproach. We see that the stochastic process $N(t)$="net number of produced pairs at time t", is an stochastic Poisson process with expected value $(\alpha\mathcal{E}(t))/(64mc^2)$, where α is the fine structure constant and $\mathcal{E}(t)$ is the energy of the electric field at time t.

Keywords: Pair production; large-order behaviour of perturbation theory; semiclassical aproach.

PACS: 02.30.Mv; 03.65.Sq; 11.15.Bt; 12.20.Ds

1. Introducción

Nuestro objetivo es estudiar la creación de pares debida a la aparición de un campo eléctrico de energía finita. Este problema ha sido estudiado por diversos autores [4,7,12,13,17-19] cuando el campo eléctrico es constante y, por tanto, con energía infinita. Evidentemente se trata de una situación ideal que no se da en la realidad, pero tiene la ventaja de que se puede calcular exactamente el número esperado de pares creados por unidad de tiempo y de volumen. El resultado que se obtiene es

$$\frac{E^2\alpha}{\pi^3\hbar}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\exp\left(-\frac{n\pi m^2c^4}{\hbar c|eE|}\right).$$

Este resultado se conoce como "fórmula de Schwinger" y es la confirmación del resultado obtenido por F. Sauter, que en 1931 calculó el número esperado de pares creados en un campo eléctrico constante usando una versión relativista del efecto túnel.

La creación de pares en un campo eléctrico no constante fue también estudiada posteriormente por Schwinger [20] y por Feynman [5]. En esos trabajos los autores querían mostrar que la creación de pares es un proceso estocástico de Poisson, al igual que pasa con la radiación de fotones producida por un cuerpo clásico cargado eléctricamente [13]. El problema es muy complicado de estudiar ya que hay que usar la teoría de perturbaciones en todos sus órdenes y no es seguro que la serie que se obtiene sea convergente (es el llamado "*renormalon problem*" [2,14]). De hecho, la fórmula de Schwinger como función de la carga eléctrica no es analítica en el punto $e=0$, y como función de la constante de Planck tampoco lo es en el punto $\hbar=0$ y, por tanto, no puede expresarse en serie de potencias, ni de la carga eléctrica, ni de la constante de Planck.

Lo que haremos en este trabajo será demostrar que la probabilidad de que se creen N pares en el instante t es

$$\frac{1}{N!}\left(\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)^N\exp\left(-\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)+O(\hbar^{\frac{1}{2}}),\tag{1}$$

donde $\alpha=(e^2)/(\hbar c)\sim(1)/(137)$ es la constante de estructura fina y $\mathcal{E}(t)$ es la energía del campo eléctrico en el instante t.

Es decir, la creación de pares es un proceso estocástico de Poisson salvo un error del orden de $\hbar^{\frac{1}{2}}$. De hecho, al inicio de la Sec. 3 veremos que la creación de pares no es exactamente un proceso estocástico de Poisson, sino que solamente lo es en la aproximación semiclásica, es decir, cuando se desprecian los términos en $\hbar$.

Los pasos que seguiremos para demostrar la fórmula (1) son los siguientes: Primero cuantizaremos el campo de Klein-Gordon, con lo cual obtendremos el hamiltoniano cuántico; seguidamente daremos el método para la construcción de los diagramas de Feynman para este problema y luego estudiaremos la dinámica del vacío cuántico. De hecho, con la ayuda de la teoría de perturbaciones, construiremos la solución "formal" de la ecuación de la segunda cuantización para el campo de Klein-Gordon, cuando la condición inicial es el vacío cuántico. A partir de esta solución formal es muy difícil obtener la fórmula (1). Por este motivo, lo que haremos será construir una solución semiclásica para este problema a partir de la cual deduciremos la fórmula (1).
La notación que usaremos es la siguiente:

- $||.||_2$ es la norma en $\mathcal{L}^2$ (espacio de las funciones de cuadrado integrable).
- $\langle .,.\rangle_2$ es el producto escalar en $\mathcal{L}^2$.
- $||.||_1$ es la norma en $\mathcal{L}^1$ (espacio de las funciones integrables).
- $\mathcal{C}_0^\infty$ espacio de las funciones con soporte compacto que son derivables en todos los órdenes.

2. Cuantización del campo de Klein-Gordon

Consideremos la ecuación de Klein-Gordon

$$(i\hbar\partial_t - eV)^2\psi = -c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi, \quad \text{en } \mathbb{R}^3,$$

donde e es la carga eléctrica, m es la masa, y c es la velocidad de la luz. El potencial que consideraremos es de la siguiente forma: $V(\vec{x},t) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3,(0,\infty))$.

Para cuantizar este campo hay que considerar los operadores [1,7]

$$\hat{\psi}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon(\vec{p})}}\Big(\hat{a}(\vec{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-\epsilon(\vec{p})t)} + \hat{b}^+(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-\epsilon(\vec{p})t)}\Big)d\vec{p},$$

$$\hat{\bar{\psi}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p})}{2}}\Big(\hat{a}(\vec{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-\epsilon(\vec{p})t)} - \hat{b}^+(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-\epsilon(\vec{p})t)}\Big)d\vec{p},$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix}\hat{\psi}\\ \hat{\bar{\psi}}\end{pmatrix} \qquad \hat{\bar{\phi}} = (\hat{\bar{\psi}}^+, \hat{\psi}^+),$$

donde $\epsilon(\vec{p}) = \sqrt{c^2|\vec{p}|^2 + m^2c^4}$ y $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}, \hat{b}^+$ son los operadores de creación y de aniquilación.

Usando estos operadores, la ecuación cuántica en la imagen de interacción se escribe $i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}(t)|\psi\rangle$, con $\hat{H}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} eV(t,\vec{x}) : \hat{\bar{\phi}}(t,\vec{x})\hat{\phi}(t,\vec{x}) : d\vec{x}$, donde :: denota al operador de orden normal.

2.1. Cálculo del operador energía

El operador $\hat{H}(t)$ se descompone en tres partes:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_C(t) + \hat{H}_A(t) + \hat{H}_S(t);$$

$$\hat{H}_C(t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\hat{a}^+(\vec{p})\hat{b}^+(-\vec{q}) \times e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t}\Omega(\vec{p},\vec{q},t)d\vec{q}d\vec{p}$$

es la parte que corresponde a la creación de un par;

$$\hat{H}_A(t) = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\hat{a}(\vec{p})\hat{b}(-\vec{q}) \times e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t}\Omega(\vec{q},\vec{p},t)d\vec{q}d\vec{p}$$

es la parte que corresponde a la aniquilación de un par;

$$\hat{H}_S(t) = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\Big(\hat{b}^+(-\vec{p})\hat{b}(-\vec{q})e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{q})-\epsilon(\vec{p}))t} - \hat{a}^+(\vec{q})\hat{a}(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})-\epsilon(\vec{q}))t}\Big)\Gamma(\vec{q},\vec{p},t)d\vec{q}d\vec{p}$$

es la parte que corresponde a los choques (*scatterings*).

Las funciones Ω y Γ se definen del siguiente modo:

$$\Omega(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{e}{2}\left(\sqrt{\frac{\epsilon(\vec{q})}{\epsilon(\vec{p})}} - \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p})}{\epsilon(\vec{q})}}\right)\tilde{V}(\vec{p}-\vec{q},t),$$

$$\Gamma(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{e}{2}\left(\sqrt{\frac{\epsilon(\vec{q})}{\epsilon(\vec{p})}} + \sqrt{\frac{\epsilon(\vec{p})}{\epsilon(\vec{q})}}\right)\tilde{V}(\vec{p}-\vec{q},t),$$

donde $\tilde{V}(\vec{y},t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} V(\vec{x},t)e^{\frac{i}{\hbar}\vec{y}.\vec{x}}d\vec{x}$.

2.2. Diagramas de Feynman

Para simplificar, usaremos notación relativista, pongamos:

$$p = \left(\vec{p}, \frac{\epsilon(\vec{p})}{c}\right) \equiv \left(\vec{p}, p^0\right),$$
$$x = (\vec{x}, ct) \equiv \left(\vec{x}, x^0\right),$$
$$px = \vec{x}.\vec{p} - \epsilon(\vec{p})\,t,$$
$$V(x) = V\left(\vec{x}, \frac{x^0}{c}\right),$$
$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}\left(\vec{x}, \frac{x^0}{c}\right) \qquad \text{y}$$
$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\bar{\psi}}\left(\vec{x}, \frac{x^0}{c}\right).$$

Con esta notación el propagador se escribe del siguiente modo: $D_{j,k} = \langle 0|T\hat{\phi}(x_j)\hat{\bar{\phi}}(x_k)|0\rangle$, donde $x_j = (\vec{x}_j, ct_j)$ y T es el operador de orden cronológico.

Usando el propagador podemos definir las amplitudes correspondientes a la **agrupaciones** de diagramas de Feynman con el mismo número de vértices:

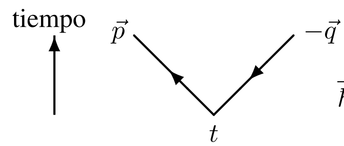
$$a_k(t) = \frac{1}{k}\left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)^k\int\limits_0^{ct}\cdots\int\limits_0^{ct}\int\limits_{\mathbb{R}^{3k}} Tr\left(D_{1,k}D_{k,k-1}\cdots D_{2,1}\right) \times V(x_1)\cdots V(x_k)dx_1\cdots dx_k,$$

$$b_k(\vec{p},\vec{q},t) = \left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)^k\int\limits_0^{ct}\cdots\int\limits_0^{ct}\int\limits_{\mathbb{R}^{3k}}\langle 1^+_{\vec{p}}1^-_{-\vec{q}}| : \hat{\bar{\phi}}(x_1) \times D_{1,2}D_{2,3}\cdots D_{k-1,k}\hat{\phi}(x_k) : |0\rangle \times V(x_1)\cdots V(x_k)dx_1\cdots dx_k.$$

Observemos que $a_k(t)$ es la amplitud que corresponde a la agrupación de todos los diagramas de Feynman conexos y cerrados que tienen k vértices, y $b_k(\vec{p},\vec{q},t)$ es la amplitud correspondiente a la agrupación de todos los diagramas de Feynman conexos con k vértices que describen la creación de un par $(\vec{p},-\vec{q})$. El método para calcular la amplitud que corresponde a un diagrama cualquiera es el siguiente: a cada proceso elemental le asociamos el valor dado en la tabla:

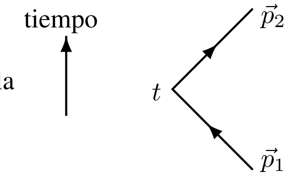
Proceso — Gráfico — Valor

creación de un par



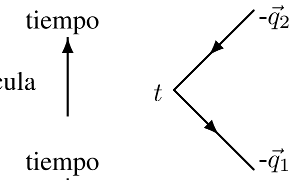
$$\frac{-\,i}{\hbar(2\pi\hbar)^3}\Omega(\vec{p},\vec{q},t)e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t}$$

scattering de una partícula



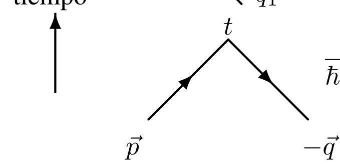
$$\frac{-\,i}{\hbar(2\pi\hbar)^3}\Gamma(\vec{p}_2,\vec{p}_1,t)e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p}_1)-\epsilon(\vec{p}_2))t}$$

scattering de una antipartícula



$$\frac{i}{\hbar(2\pi\hbar)^3}\Gamma(\vec{q}_1,\vec{q}_2,t)e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{q}_1)-\epsilon(\vec{q}_2))t}$$

aniquilación de un par



$$\frac{i}{\hbar(2\pi\hbar)^3}\Omega(\vec{q},\vec{p},t)e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{p}))t}$$

Entonces, para calcular la amplitud correspondiente a un diagrama de Feynman con N vértices, se multiplican los valores asociados a los procesos elementales que componen el diagrama, se integra respecto a los impulsos internos y finalmente se integra en el dominio temporal

$$t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_N.$$

Observación. Es importante diferenciar las amplitudes correspondientes a diferentes diagramas dentro de una misma agrupación. Por ejemplo, en la amplitud $b_3(\vec{p},\vec{q},t)$ está $b_{3,1}(\vec{p},\vec{q},t)$ que es la amplitud que corresponde a los diagramas de tres vértices con una creación y ninguna aniquilación, y está $b_{3,2}(\vec{p},\vec{q},t)$ que corresponde a los diagramas de tres vértices con dos creaciones y una aniquilación.

En general, para $s \geq 2m-1$ tenemos que $b_{s,m}(\vec{p},\vec{q},t)$ corresponde a los diagramas de s vèrtices con m creaciones y $m-1$ aniquilaciones. Y en las agrupaciones de diagramas cerrados, para $s \geq 2m$, tenemos que $a_{s,m}(t)$ es la amplitud correspondiente a los diagramas de s vértices con m creaciones y m aniquilaciones.

3. Solución semiclásica de la ecuación cuántica del campo de Klein-Gordon

Usando la teoría de perturbaciones y el teorema de Wick se ve que la solución **formal** del problema,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle &=& \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \\ |\psi(t)\rangle &=& |0\rangle, \end{array} \right. \tag{2}$$

es [8,21]

$$T^t|0\rangle = e^{\sum_{k=2}^{\infty} a_k(t)}\left[|0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\right.$$
$$\left.\times\int_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_N\right].$$

Usando que $||T^t|0\rangle||_2^2 = 1$, encontramos una serie de ecuaciones que relacionan las diferentes amplitudes que aparecen en la expresión de $T^t|0\rangle$. Estas ecuaciones se obtienen igualando las potencias de la carga eléctrica en la ecuación $||T^t|0\rangle||_2^2 = 1$. Las tres primeras ecuaciones que se obtienen son [6]:

$$2Re(a_2(t)) + ||b_1(t)||_2^2 = 0,$$
$$2Re(a_3(t)) + 2Re\langle b_1(t), b_2(t)\rangle_2 = 0,$$
$$2Re(a_4(t)) + ||b_2(t)||_2^2 + 2Re\langle b_1(t), b_3(t)\rangle_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{12}} b_1(\vec{p}_1,\vec{q}_1,t)b_1(\vec{p}_2,\vec{q}_2,t)b_1^*(\vec{p}_1,\vec{q}_2,t)b_1^*(\vec{p}_2,\vec{q}_1,t)=0.$$

Por lo tanto, como

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{12}} b_1(\vec{p}_1,\vec{q}_1,t)b_1(\vec{p}_2,\vec{q}_2,t)b_1^*(\vec{p}_1,\vec{q}_2,t)b_1^*(\vec{p}_2,\vec{q}_1,t) \neq 0,$$

deducimos que

$$2Re(a_2(t)+a_3(t)+a_4(t))+||b_1(t)||_2^2$$
$$+2Re\langle b_1(t),b_2(t)\rangle_2+||b_2(t)||_2^2$$
$$+2Re\langle b_1(t),b_3(t)\rangle_2\neq 0.$$

Por consiguiente,

$$-2Re\sum_{k=2}^{\infty}a_k(t)\neq\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\right|\right|_2^2,$$

con lo cual, el proceso estocástico $N(t)=$*"número de pares creados en el instante t"* no puede ser exactamente un proceso estocástico de Poisson. Efectivamente, según la expresión de $T^t|0\rangle$, la probabilidad de que en el instante t se cree un par es

$$\int_{R^6}|\langle 1^+_{\vec{p}}1^-_{-\vec{q}}|T^t|0\rangle|^2d\vec{p}d\vec{q}$$
$$=\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\right|\right|_2^2\exp\left(2Re\sum_{k=2}^{\infty}a_k(t)\right).$$

En cambio, si $N(t)$ fuese un proceso estástico de Poisson, entonces la probabilidad de que se crease un par en el instante t seria $A(t)\exp(-A(t))$, donde $A(t)$ seria el número esperado de pares creados en el instante t. Por lo tanto, ya vemos que no puede ser exactamente un proceso estocástico de Poisson.

Dicho esto, ahora veremos que $N(t)$ tiende a un proceso estocástico de Poisson cuando la constante de Planck tiende hacia cero, es decir, $N(t)$ es un proceso estocástico de Poisson en la aproximación semiclásica.

Ante todo observemos que es muy dificil obtener la fórmula (1) a partir de la solución formal de (2), ya que ésta contiene demasidos términos. Por este motivo, lo que haremos será buscar una solución aproximada de (2), que contendrá menos término y con la cual podremos demostrar la fórmula (1).

Para hallar la solución semiclásica usaremos el siguiente resultado [1,16]: "dada una función $|\phi(t)\rangle$, tal que $|\phi(0)\rangle$=$|0\rangle$, entonces

$$||T^t|0\rangle-|\phi(t)\rangle||_2$$
$$\leq\frac{1}{\hbar}\int_0^t\left|\left|\left(i\hbar\partial_\tau-\hat{H}(\tau)\right)|\phi(\tau)\rangle\right|\right|_2d\tau\equiv R(t),\quad(3)$$

y por tanto

$$||P_NT^t|0\rangle-P_N|\phi(t)\rangle||_2\leq R(t),$$

donde P_N es el proyector en el espacio de N pares."

Según la interpretación de la mecánica cuántica, $||P_NT^t|0\rangle||_2^2$ es la probabilidad de que en el instante t haya N pares. Entonces, como

$$||P_NT^t|0\rangle||_2^2=||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2+f(t),$$

(donde $f(t)=2||P_N|\phi(t)\rangle||_2R(t)+R^2(t)$), lo que hay que hacer es encontrar $|\phi(t)\rangle$, de manera que $f(t)$ sea una cantidad despreciable, con lo cual podremos aproximar $||P_NT^t|0\rangle||_2^2$ por $||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2$.

Probemos como solución aproximada la función

$$|\phi(t)\rangle=e^{a_2(t)}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\hat{H}_C(\tau)d\tau}|0\rangle$$
$$\equiv e^{a_2(t)}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\hat{H}_C(\tau)d\tau\right)^N|0\rangle$$
$$=e^{a_2(t)}\Bigg[|0\rangle+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_N\Bigg].$$

Entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\hat{H}_S(t)|\phi(t)\rangle=\int_{\mathbb{R}^6}i\hbar\dot{b}_2(\vec{p},\vec{q},t)a^+(\vec{p})b^+(-\vec{q})d\vec{p}d\vec{q}|\phi(t)\rangle\quad(4)$$

$$\hat{H}_A(t)|\phi(t)\rangle=\Bigg[i\hbar\dot{a}_2(t)+\int_{\mathbb{R}^6}i\hbar\dot{b}_{3,2}(\vec{p},\vec{q},t)$$
$$\times a^+(\vec{p})b^+(-\vec{q})d\vec{p}d\vec{q}\Bigg]|\phi(t)\rangle\quad(5)$$

Para obtener la Ec. (4), lo mejor es sustituir la solución formal en la Ec. (2), proyectar sobre el espacio de N pares e igualar las amplitudes correspondientes a los diagramas de $N+1$ vértices. Entonces, se obtiene

$$\frac{i\hbar}{(N-1)!}\int_{\mathbb{R}^{6N}}\dot{b}_2(\vec{p}_1,\vec{q}_1,t)$$
$$\times\prod_{j=2}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots .d\vec{q}_N$$
$$=\frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)$$
$$\times\hat{H}_S(t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_N.$$

Finalemente, multiplicando por $e^{a_2(t)}$ y sumando respecto N se obtiene (4).

Para obtener (5), hay que igualar las amplitudes que corresponden a los diagramas de $N+2$ vértices con una aniquilación. Entonces se obtiene

$$\frac{i\hbar}{N!}\dot{a}_2(t)\int\limits_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_N+\frac{i\hbar}{(N-1)!}\int\limits_{\mathbb{R}^{6N}}\dot{b}_{3,2}(\vec{p}_1,\vec{q}_1,t)\prod_{j=2}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_N}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_N$$
$$=\frac{1}{(N+1)!}\int\limits_{\mathbb{R}^{6(N+1)}}\prod_{j=1}^{N+1}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)\hat{H}_A(t)|1^+_{\vec{p}_1}\dots 1^-_{-\vec{q}_{N+1}}\rangle d\vec{p}_1\dots d\vec{q}_{N+1}.$$

Finalemente multiplicando por $e^{a_2(t)}$ y sumando respecto N se obtiene (5).

Así pues, aplicando el operador $(i\hbar\partial_t-\hat{H}(t))$ a $|\phi(t)\rangle$ se obtiene

$$(i\hbar\partial_t-\hat{H}(t))|\phi(t)\rangle$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^6}i\hbar(\dot{b}_2(\vec{p},\vec{q},t)+\dot{b}_{3,2}(\vec{p},\vec{q},t))a^+(\vec{p})b^+(-\vec{q})d\vec{p}d\vec{q}|\phi(t)\rangle$$

En el Apéndice C, veremos que

$$||(i\hbar\partial_\tau-\hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2=O(\hbar^{\frac{3}{2}}),$$

por lo tanto, según (3) se cumplirá

$$||T^t|0\rangle-|\phi(t)\rangle||_2=O(\hbar^{\frac{1}{2}}),$$

con lo cual

$$||P_NT^t|0\rangle||_2^2=||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2+O(\hbar^{\frac{1}{2}}). \quad (6)$$

Así pues en la aproximación semiclásica, para calcular la probabilidad de que en el instante t haya N pares, solamente hay que calcular $||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2$.

En el Apéndice B demostraremos que

$$||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2=\frac{1}{N!}||b_1(t)||_2^{2N}e^{-||b_1(t)||_2^2}+O(\hbar^3),$$

con lo cual, usando que $||b_1(t)||_2^2=(\alpha\mathcal{E}(t))/(64mc^2)+O(\hbar)$, llegamos al siguiente resultado

$$||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2=\frac{1}{N!}\left(\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}+O(\hbar)\right)^N$$
$$\times\exp\left(-\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}+O(\hbar)\right)+O(\hbar^3)$$
$$=\frac{1}{N!}\left(\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)^N\exp\left(-\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)+O(\hbar).$$

Finalmente, de (6) se deduce que

$$||P_NT^t|0\rangle||_2^2=\frac{1}{N!}\left(\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)^N\exp\left(-\frac{\alpha\mathcal{E}(t)}{64mc^2}\right)+O(\hbar^{\frac{1}{2}}).$$

Apéndice A

En este Apéndice veremos que se cumple

$$\hbar^2||\dot{b}_2(\tau)||_2^2=O(\hbar^3);\qquad \hbar^2||\dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2=O(\hbar^6).$$

Este resultado nos será muy útil en el Apéndice C.

Integrando por partes respecto a la variable temporal se ve que

$$i\hbar\dot{b}_2(\vec{p},\vec{q},t)=\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t}}{(2\pi\hbar)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\Omega(\vec{p},\vec{r},t)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)}{\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r})}-\frac{\Omega(\vec{r},\vec{q},t)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)}{\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q})}\right]d\vec{r}$$
$$-\frac{\hbar}{i}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t}}{(2\pi\hbar)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\dot{\Omega}(\vec{p},\vec{r},t)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}-\frac{\dot{\Omega}(\vec{r},\vec{q},t)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)}{(\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q}))^2}\right]d\vec{r}$$
$$+\frac{\hbar}{i}\frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_0^t\left[\frac{\ddot{\Omega}(\vec{p},\vec{r},\tau)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))\tau}e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{r})-\epsilon(\vec{q}))t}\right.$$
$$\left.-\frac{\ddot{\Omega}(\vec{r},\vec{q},\tau)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)}{(\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q}))^2}e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))\tau}e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{r})-\epsilon(\vec{p}))t}\right]d\tau d\vec{r}.$$

Entonces

$$\hbar^2|\dot{b}_2(\vec{p},\vec{q},t)|^2 \leq \frac{3}{(2\pi\hbar)^{12}}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\Omega(\vec{p},\vec{r},t)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)}{\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r})} - \frac{\Omega(\vec{r},\vec{q},t)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)}{\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q})}\right]d\vec{r}\right|^2$$
$$+\frac{6\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{12}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\dot{\Omega}(\vec{p},\vec{r},t)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)|}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}d\vec{r}\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\dot{\Omega}(\vec{r},\vec{q},t)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)|}{(\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q}))^2}d\vec{r}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\frac{|\ddot{\Omega}(\vec{p},\vec{r},\tau)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)|}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}d\tau d\vec{r}\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\frac{|\ddot{\Omega}(\vec{r},\vec{q},\tau)\Gamma(\vec{p},\vec{r},t)|}{(\epsilon(\vec{r})+\epsilon(\vec{q}))^2}d\tau d\vec{r}\right)^2\right] \equiv A + B_1 + B_2 + C_1 + C_2.$$

Ahora ya estamos en condiciones de acotar $\hbar^2||\dot{b}_2(\tau)||_2^2$.
Los términos $||B_j||_1$ y $||C_j||_1$ con $j=1,2$, son fáciles de acotar. Acotemos por ejemplo $||B_1||_1$

$$||B_1||_1 = \frac{6\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{12}}\int_{\mathbb{R}^{12}}\frac{|\dot{\Omega}(\vec{p},\vec{r},t)\Gamma(\vec{r},\vec{q},t)|}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}\frac{|\dot{\Omega}(\vec{p},\vec{s},t)\Gamma(\vec{s},\vec{q},t)|}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{s}))^2}d\vec{r}d\vec{s}d\vec{p}d\vec{q}$$
$$= \frac{6\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{12}}\left(\frac{e}{2}\right)^4\int_{\mathbb{R}^{12}}\frac{|\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{r})|(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))|\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{s})|(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{s}))}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^3(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{s}))^3\epsilon(\vec{p})\epsilon(\vec{q})\epsilon(\vec{r})\epsilon(\vec{s})}$$
$$\times|\dot{\tilde{V}}(\vec{r}-\vec{p},t)||\tilde{V}(\vec{q}-\vec{r},t)||\dot{\tilde{V}}(\vec{s}-\vec{p},t)||\tilde{V}(\vec{q}-\vec{s},t)|d\vec{r}d\vec{s}d\vec{p}d\vec{q}.$$

Observemos que

$$\frac{(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{s}))}{\epsilon(\vec{q})\epsilon(\vec{r})\epsilon(\vec{s})} \leq \left[\frac{\epsilon(\vec{q})}{\epsilon(\vec{r})\epsilon(\vec{s})}+\frac{3}{mc^2}\right],$$

si usamos la desigualdad

$$\epsilon(\vec{q}) \leq \epsilon(\vec{s}) + c|\vec{q}-\vec{s}|,$$

se llega al siguiente resultado

$$\frac{(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{s}))}{\epsilon(\vec{q})\epsilon(\vec{r})\epsilon(\vec{s})} \leq \frac{1}{mc^2}\left[4+\frac{c|\vec{q}-\vec{s}|}{mc^2}\right].$$

Por lo tanto

$$||B_1||_1 \leq \frac{6\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{12}}\left(\frac{e}{2}\right)^4$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{12}}\frac{|\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{r})||\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{s})|}{64\epsilon^6(\vec{p})}$$
$$\times\frac{1}{(mc^2)^2}\left[4+\frac{c|\vec{q}-\vec{s}|}{mc^2}\right]$$
$$\times|\dot{\tilde{V}}(\vec{r}-\vec{p},t)||\tilde{V}(\vec{q}-\vec{r},t)||\dot{\tilde{V}}(\vec{s}-\vec{p},t)|$$
$$\times|\tilde{V}(\vec{q}-\vec{s},t)|d\vec{r}d\vec{s}d\vec{p}d\vec{q}.$$

Hagamos el cambio de variable

$$\vec{r} = \vec{p} - 2\pi\hbar\vec{u},$$
$$\vec{s} = \vec{p} - 2\pi\hbar\vec{v},$$
$$\vec{q} = \vec{p} - 2\pi\hbar\vec{w},$$

entonces se obtiene

$$||B_1||_1 \leq \frac{6\hbar^3\alpha^2c^5}{32\pi(mc^2)^2}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{12}}\frac{|2\vec{p}-2\pi\hbar\vec{u}||\vec{u}||2\vec{p}-2\pi\hbar\vec{v}||\vec{v}|}{64\epsilon^6(\vec{p})}$$
$$\times\left[4+\frac{2\pi\hbar c|\vec{w}-\vec{v}|}{mc^2}\right]|\dot{\hat{V}}(\vec{u},t)||\hat{V}(\vec{w}-\vec{u},t)||\dot{\hat{V}}(\vec{v},t)|$$
$$\times|\hat{V}(\vec{w}-\vec{v},t)|d\vec{u}d\vec{v}d\vec{w}d\vec{p} = O(\hbar^3).$$

Es decir

$$||B_1||_1 = O(\hbar^3).$$

Acotemos ahora el término $||A||_1$, en este caso tenemos

$$\frac{3}{(2\pi\hbar)^{12}}\left(\frac{e}{2}\right)^4\int\limits_{\mathbb{R}^{12}}\left[\frac{(\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{r}))(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))^2}-\frac{(\epsilon^2(\vec{r})-\epsilon^2(\vec{q}))(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{r}))}{(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{r}))^2}\right]$$
$$\times\left[\frac{(\epsilon^2(\vec{p})-\epsilon^2(\vec{s}))(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{s}))}{(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{s}))^2}-\frac{(\epsilon^2(\vec{s})-\epsilon^2(\vec{q}))(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{s}))}{(\epsilon(\vec{q})+\epsilon(\vec{s}))^2}\right]$$
$$\times\frac{\tilde{V}(\vec{q}-\vec{r},t)\tilde{V}(\vec{r}-\vec{p},t)\tilde{V}(\vec{s}-\vec{q},t)\tilde{V}(\vec{p}-\vec{s},t)}{\epsilon(\vec{p})\epsilon(\vec{q})\epsilon(\vec{r})\epsilon(\vec{s})}d\vec{r}d\vec{s}d\vec{p}d\vec{q}.$$

Hagamos el cambio de variable

$$\vec{q}=\vec{r}-2\pi\hbar\vec{u},\quad \vec{p}=\vec{r}-2\pi\hbar\vec{v},\quad \vec{s}=\vec{r}-2\pi\hbar\vec{w}.$$

Entonces en el orden más bajo en $\hbar$ se obtiene

$$\frac{3\hbar c^2\alpha^2}{64}\int\limits_{\mathbb{R}^{12}}\frac{(\vec{v}.\vec{r}+\vec{u}.\vec{r})((\vec{v}-\vec{w}).\vec{r}+(\vec{u}-\vec{w}).\vec{r})}{\epsilon^6(\vec{r})}$$
$$\times\hat{V}(\vec{u},t)\hat{V}(\vec{w}-\vec{u},t)\hat{V}(-\vec{v},t)\hat{V}(\vec{v}-\vec{w},t)d\vec{u}d\vec{v}d\vec{w}d\vec{r}.$$

Como esta cantidad es real, la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{3\hbar c^2\alpha^2}{128}\int\limits_{\mathbb{R}^{12}}\frac{(\vec{v}.\vec{r}+\vec{u}.\vec{r})((\vec{v}-\vec{w}).\vec{r}+(\vec{u}-\vec{w}).\vec{r})}{\epsilon^6(\vec{r})}$$
$$\times\Big[\hat{V}(\vec{u},t)\hat{V}(\vec{w}-\vec{u},t)\hat{V}(-\vec{v},t)\hat{V}(\vec{v}-\vec{w},t)$$
$$+\hat{V}(-\vec{u},t)\hat{V}(\vec{u}-\vec{w},t)\hat{V}(\vec{v},t)\hat{V}(\vec{w}-\vec{v},t)\Big]d\vec{u}d\vec{v}d\vec{w}d\vec{r}.$$

Si ahora hacemos el cambio $\vec{w}=\vec{v}-\vec{y}$, obtendremos

$$\frac{3\hbar c^2\alpha^2}{128}\int\limits_{\mathbb{R}^{12}}\frac{(\vec{v}.\vec{r}+\vec{u}.\vec{r})(\vec{y}.\vec{r}+(\vec{u}-\vec{v}+\vec{y}).\vec{r})}{\epsilon^6(\vec{r})}$$
$$\times\Big[\hat{V}(\vec{u},t)\hat{V}(\vec{v}-\vec{u}-\vec{y},t)\hat{V}(-\vec{v},t)\hat{V}(\vec{y},t)$$
$$+\hat{V}(-\vec{u},t)\hat{V}(\vec{u}-\vec{v}+\vec{y},t)\hat{V}(\vec{v},t)\hat{V}(-\vec{y},t)\Big]d\vec{u}d\vec{v}d\vec{y}d\vec{r}.$$

Ahora cambiemos $\vec{y}$ por $-\vec{y}$ y permutemos $\vec{u}$ con $\vec{v}$, entonces obtendremos la misma cantidad cambiada de signo, por lo tanto, en el orden más bajo en $\hbar$, $||A||_1$ vale cero. En el siguiente orden, $||A||_1$ también vale cero ya que en el numerador aparecen potencias cúbicas de $\vec{r}$ mientras que en el denominador es función de $\epsilon(\vec{r})$, entonces al integrar respecto $\vec{r}$ el resultado que se obtiene es cero. Así pues

$$||A||_1=O(\hbar^3).$$

Y por consiguiente,

$$\hbar^2||\dot{b}_2(\tau)||_2^2=O(\hbar^3).$$

Comprobar que

$$\hbar^2||\dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2=O(\hbar^6),$$

es mucho más sencillo, por lo tanto no lo haremos.

Apéndice B

En este Apéndice vamos a probar que

$$||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2=\frac{1}{N!}||b_1(t)||_2^{2N}e^{-||b_1(t)||_2^2}+O(\hbar^3),$$

Usemos que $2Re(a_2(\tau))=-||b_1(\tau)||_2^2$, (véase [6]). Entonces

$$||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2=\frac{1}{(N!)^2}\sum_{\gamma,\beta\in\sigma_N}\int\limits_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^N b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)b_1^*(\vec{p}_{\gamma(j)},\vec{q}_{\beta(j)},t)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N e^{-||b_1(t)||_2^2}$$
$$=\frac{1}{N!}\sum_{\beta\in\sigma_N}\int\limits_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^N b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)b_1^*(\vec{p}_j,\vec{q}_{\beta(j)},t)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N e^{-||b_1(t)||_2^2}.$$

Sea ahora $\beta\in\sigma_N$ tal que β deja fijos $N-2$ elementos, podemos suponer sin perder generalidad, que $\beta(1)=2$ y $\beta(2)=1$. Nos interesa acotar

$$A\equiv\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{6N}}\prod_{j=1}^N b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,t)b_1^*(\vec{p}_j,\vec{q}_{\beta(j)},t)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N\right|.$$

Claramente,

$$A \leq ||b_1(t)||_2^{2(N-2)} \int\limits_{\mathbb{R}^{12}} |b_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1, t)||b_1(\vec{p}_2, \vec{q}_2, t)| \times |b_1(\vec{p}_1, \vec{q}_2, t)||b_1(\vec{p}_2, \vec{q}_1, t)|$$

Así pues hay que acotar

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{12}} |b_1(\vec{p}_1, \vec{q}_1, t)||b_1(\vec{p}_2, \vec{q}_2, t)||b_1(\vec{p}_1, \vec{q}_2, t)||b_1(\vec{p}_2, \vec{q}_1, t)|.$$

Para poder acotar esta cantidad, primero necesitamos acotar

$$|b_1(\vec{p}, \vec{q}, t)|.$$

Integrando por partes se ve que

$$b_1(\vec{p}, \vec{q}, t) = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Omega(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{q})} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t} - \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^3 i} \frac{\dot{\Omega}(\vec{p}, \vec{q}, t)}{(\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{q}))^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))t} + \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^3 i} \int\limits_0^t \frac{\ddot{\Omega}(\vec{p}, \vec{q}, \tau)}{(\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{q}))^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon(\vec{p})+\epsilon(\vec{q}))\tau} d\tau.$$

A partir de las siguientes acotaciones:

$$|\epsilon(\vec{p}) - \epsilon(\vec{q})| \leq c|\vec{p} - \vec{q}|,$$
$$\frac{1}{\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{q})} \leq \frac{1}{2mc^2},$$
$$\frac{1}{\epsilon(\vec{p}) + \epsilon(\vec{q})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\epsilon(\vec{p})\epsilon(\vec{q})}},$$

deducimos que

$$|b_1(\vec{p}, \vec{p} - 2\pi\hbar\vec{u}, t)| \leq \frac{ec}{(2\pi\hbar)^2 \epsilon(\vec{p})\epsilon(\vec{p} - 2\pi\hbar\vec{u})} g(\vec{u}, t), \quad (7)$$

con

$$g(\vec{u}, t) = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} \left[|\hat{\vec{E}}(\vec{u}, t)| + \hbar \frac{|\dot{\hat{\vec{E}}}(\vec{u}, t)|}{2mc^2} + \hbar \int\limits_0^t \frac{|\ddot{\hat{\vec{E}}}(\vec{u}, \tau)|}{2mc^2} d\tau \right],$$

donde $\vec{E}(\vec{x}, t)$ es el campo eléctrico en el instante t.

Ahora ya estamos en condiciones de acotar definitivamente A. Hagamos el cambio

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - 2\pi\hbar\vec{v}_2;$$
$$\vec{q}_j = \vec{p}_j - 2\pi\hbar\vec{u}_j, \quad j = 1, 2$$

usemos (7) y la acotación

$$\frac{1}{(\epsilon(\vec{p})} \leq \frac{1}{mc^2},$$

entonces se obtiene

$$A \leq \frac{(ec)^4 2\pi\hbar}{(mc^2)^4} ||b_1(t)||_2^{2(N-2)} \times \int\limits_{\mathbb{R}^{12}} \frac{g(\vec{u}_1, t) g(\vec{u}_2 + \vec{v}_2) g(\vec{u}_1 - \vec{v}_2) g(\vec{u}_2, t)}{\epsilon^2(\vec{p}_1)\epsilon^2(\vec{p}_1 - 2\pi\hbar\vec{u}_1)}.$$

Integremos respecto $\vec{p}_1$, usando que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\epsilon^4(\vec{p})} d\vec{p} = \frac{\pi^2}{c^3 mc^2}$$

y la desigualdad de Schwarz, se obtiene

$$A \leq \frac{(ec)^4 2\pi\hbar}{(mc^2)^4} \frac{\pi^2}{c^3 mc^2} ||b_1(t)||_2^{2(N-2)} ||g(t)||_2^2 ||g(t)||_1^2.$$

Ahora bien

$$||g(t)||_2^2 = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E}(t) + O(\hbar);$$
$$||g(t)||_1^2 = \frac{1}{32\pi^2} ||\hat{\vec{E}}(t)||_1^2 + O(\hbar).$$

Así pues

$$A \leq ||b_1(t)||_2^{2(N-2)} \alpha^2 \hbar^3 \left(\frac{||\hat{\vec{E}}||_1^2 c^3}{8(mc^2)^4} + O(\hbar) \right) \times \left(\frac{\mathcal{E}(t)}{8mc^2} + O(\hbar) \right).$$

En general, si β deja fijos $N - k$ elementos, entonces

$$A \leq ||b_1(t)||_2^{2(N-k)} \left(\alpha^2 \hbar^3 \left(\frac{||\hat{\vec{E}}||_1^2 c^3}{8(mc^2)^4} + O(\hbar) \right) \left(\frac{\mathcal{E}(t)}{8mc^2} + O(\hbar) \right) \right)^{r(k)},$$

donde

$$r(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si} \quad k = 2\mathbb{Z} \\ \frac{k-1}{2} & \text{si} \quad k \neq 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

De aquí deducimos que

$$\left| ||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2 - \frac{||b_1(t)||_2^{2N}}{N!}e^{-||b_1(t)||_2^2} \right| \leq$$

$$\sum_{j=0}^{N-2} \frac{||b_1(t)||_2^{2j}}{j!}\left(\alpha^2\hbar^3\left(\frac{||\hat{\vec{E}}||_1^2 c^3}{8(mc^2)^4}+O(\hbar)\right)\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{8mc^2}+O(\hbar)\right)\right)^{r(N-j)} e^{-||b_1(t)||_2^2}$$

$$\leq \alpha^2\hbar^3\left(\frac{||\hat{\vec{E}}||_1^2 c^3}{8(mc^2)^4}+O(\hbar)\right)\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{8mc^2}+O(\hbar)\right)\sum_{j=0}^{N-2}\frac{||b_1(t)||_2^{2j}}{j!}e^{-||b_1(t)||_2^2}$$

$$\leq \alpha^2\hbar^3\left(\frac{||\hat{\vec{E}}||_1^2 c^3}{8(mc^2)^4}+O(\hbar)\right)\left(\frac{\mathcal{E}(t)}{8mc^2}+O(\hbar)\right).$$

Así pues, acabamos de probar que

$$||P_N|\phi(t)\rangle||_2^2 = \frac{||b_1(t)||_2^{2N}}{N!}e^{-||b_1(t)||_2^2} + O(\hbar^3).$$

Apéndice C

En este Apéndice, veremos que $||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2 = O(\hbar^{\frac{3}{2}})$.

Calculemos $||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2$, usando que $2Re(a_2(\tau)) = -||b_1(\tau)||_2^2$, entonces se obtiene

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 = \hbar^2 e^{-||b_1(\tau)||_2^2}\Big[||\dot{b}_2(\tau)+\dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2$$

$$+\sum_{N=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(N-1)!}\right)^2\sum_{\gamma,\beta\in\sigma_N}\int_{\mathbb{R}^{6N}}\left(\dot{b}_2(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)+\dot{b}_{3,2}(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)\right)$$

$$\times\left(\dot{b}_2^*(\vec{p}_{\gamma(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)+\dot{b}_{3,2}^*(\vec{p}_{\gamma(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)\right)\prod_{j=2}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,\tau)b_1^*(\vec{p}_{\gamma(j)},\vec{q}_{\beta(j)},\tau)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N\Big].$$

Escribamos esta ecuación del siguiente modo:

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 = \hbar^2 e^{-||b_1(\tau)||_2^2}\Big[||\dot{b}_2(\tau)+\dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2 +$$

$$\sum_{N=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(N-1)!}\right)^2\sum_{\beta\in\sigma_N}\int_{\mathbb{R}^{6N}}\left(\dot{b}_2(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)+\dot{b}_{3,2}(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)\right)$$

$$\times\left(\dot{b}_2^*(\vec{p}_{\beta(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)+\dot{b}_{3,2}^*(\vec{p}_{\beta(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)\right)\prod_{j=2}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,\tau)b_1^*(\vec{p}_{\beta(j)},\vec{q}_{\beta(j)},\tau)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N$$

$$+\sum_{N=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(N-1)!}\right)^2\sum_{\substack{\gamma,\beta\in\sigma_N\\ \gamma\neq\beta}}\int_{\mathbb{R}^{6N}}\left(\dot{b}_2(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)+\dot{b}_{3,2}(\vec{p}_1,\vec{q}_1,\tau)\right)$$

$$\times\left(\dot{b}_2^*(\vec{p}_{\gamma(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)+\dot{b}_{3,2}^*(\vec{p}_{\gamma(1)},\vec{q}_{\beta(1)},\tau)\right)\prod_{j=2}^{N}b_1(\vec{p}_j,\vec{q}_j,\tau)b_1^*(\vec{p}_{\gamma(j)},\vec{q}_{\beta(j)},\tau)d\vec{p}_1\ldots d\vec{q}_N\Big].$$

Ahora aplicando la desigualdad de Schwarz al segundo término de la derecha y sumando respecto de N se obtiene

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 \leq \hbar^2 \Bigg[||\dot{b}_2(\tau) + \dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2(1 + ||b_1(\tau)||_2^2) + e^{-||b_1(\tau)||_2^2} \sum_{N=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(N-1)!}\right)^2 \sum_{\substack{\gamma,\beta\in\sigma_N \\ \gamma\neq\beta}} \int_{\mathbb{R}^{6N}} \left(\dot{b}_2(\vec{p}_1, \vec{q}_1, \tau) + \dot{b}_{3,2}(\vec{p}_1, \vec{q}_1, \tau)\right)$$
$$\times \left(\dot{b}_2^*(\vec{p}_{\gamma(1)}, \vec{q}_{\beta(1)}, \tau) + \dot{b}_{3,2}^*(\vec{p}_{\gamma(1)}, \vec{q}_{\beta(1)}, \tau)\right) \prod_{j=2}^{N} b_1(\vec{p}_j, \vec{q}_j, \tau) b_1^*(\vec{p}_{\gamma(j)}, \vec{q}_{\beta(j)}, \tau) d\vec{p}_1 \ldots d\vec{q}_N \Bigg].$$

Sea ahora $f(\vec{p}, \vec{q}, \tau) = \hbar|\dot{b}_2(\vec{p}, \vec{q}, \tau) + \dot{b}_{3,2}(\vec{p}, \vec{q}, \tau)| + |b_1(\vec{p}, \vec{q}, \tau)|$, entonces se obtiene

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 \leq \hbar^2||\dot{b}_2(\tau) + \dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2(1 + ||b_1(\tau)||_2^2) + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{N}{(N-1)!} \sum_{\substack{\beta\in\sigma_N \\ \beta\neq Id}} \int_{\mathbb{R}^{6N}} \prod_{j=1}^{N} f(\vec{p}_j, \vec{q}_j, \tau) f(\vec{p}_j, \vec{q}_{\beta(j)}, \tau) d\vec{p}_1 \ldots d\vec{q}_N e^{-||b_1(\tau)||_2^2}$$

Ahora bien, como en el Apéndice B, se ve que si β deja fijos $N-k$ elementos, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{6N}} \prod_{j=1}^{N} f(\vec{p}_j, \vec{q}_j, \tau) f(\vec{p}_j, \vec{q}_{\beta(j)}, \tau) d\vec{p}_1 \ldots d\vec{q}_N \leq (\alpha^2\hbar^3 C)^{r(k)} ||f||_2^{2(N-k)},$$

donde C es una constante independiente de α y $\hbar$, y la función r es la misma del Apéndice B. Por lo tanto,

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 \leq \hbar^2||\dot{b}_2(\tau) + \dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2(1 + ||b_1(\tau)||_2^2) + e^{-||b_1(\tau)||_2^2} \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{N^2}{(N-k)!} (\alpha^2\hbar^3 C)^{r(k)} ||f||_2^{2(N-k)}$$

Ahora bien, es un cálculo un poco tedioso aunque sencillo ver que

$$\sum_{N=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{N^2}{(N-k)!} X^{N-k} Y^{r(k)} = e^X(2X^2 + 4X + 1)\frac{Y}{1-Y} + 4e^X(2X+1)\frac{Y}{(1-Y)^2} + 8e^X \frac{Y+Y^2}{(1-Y)^3} \leq 16e^X(X+1)^2 \frac{Y+Y^2}{(1-Y)^3}.$$

Así pues,

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 \leq \hbar^2||\dot{b}_2(\tau) + \dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2(1 + ||b_1(\tau)||_2^2) + 16e^{-||b_1(\tau)||_2^2 + ||f(\tau)||_2^2}(||f(\tau)||_2^2 + 1)^2 \frac{\alpha^2\hbar^3 C(1 + \alpha^2\hbar^3 C)}{(1 - \alpha^2\hbar^3 C)^3}.$$

Y como en el Apéndice A, hemos visto que $\hbar^2||\dot{b}_2(\tau) + \dot{b}_{3,2}(\tau)||_2^2 = O(\hbar^3)$, llegamos al siguiente resultado

$$||(i\hbar\partial_\tau - \hat{H}(\tau))|\phi(\tau)\rangle||_2^2 = O(\hbar^3).$$

$*$. Partially supported by DGESIC (Spain), project PB98-0932-C02-01.

1. J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965).
2. R.E. Borcherds and A. Barnard, *Quantum Fields Theory*, (Notes takes from a course of R.E. Borcherds, Berkeley, 2001).
3. P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, (Oxford University Press, 1958).
4. J.M. Eisenberg, G. Kälbermann, *Physical Review D* **35** (1988) 368.
5. R.P. Feynman, *Quantum electrodynamics*, (Frontiers in Physics, 1961).

6. R.P. Feynman, S. Weinberg, *Elementary particles and the Laws of Physics*, (Cambirdge University Press, 1987).
7. W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, (Springer-Verlang, 1985).
8. E.K.U. Gross, E. Runge, O. Heinonen, *Many-Particle Theory*, (IOP Pubishing, 1991).
9. G.A. Hagedorn, *Comm. Math. Phys.* **71** (1980) 77.
10. J. Haro, *El límit clàssic de la mecànica quàntica*, (Tesi Doctoral, U.A.B. 1997).
11. J. Harthong, ´´Etudes sur la mécanique quantique", *Asterisque* **111** (1984).
12. B.R. Holstein, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 499.
13. C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum field theory*, (McGraw-Hill International Editions, 1980).
14. J.C. Le Gillou and J. Zinn-Justin, *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory*, (Current Physics-Sources and Comments, 1990).
15. S.M. Marinov, V.S. Popov, *Fortschritte der Physik* **25** (1977) 375.
16. V.P. Maslov and M.V. Fedoriuk, *Semi-classical aproximation in quantum mechanics*, (D.Riedel Publishing Compay, Dordrecht, Holland 1981).
17. A.I. Nikishov, *Nuclear Physics B* **21** (1970) 346.
18. V.S. Popov, *Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 709.
19. J.S. Schwinger, *Physical Review* **82** (1951) 664.
20. J.S. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, (Addison-Wesley Series in Physics, 1970).
21. R. Ticciati, *Quantum field theory for mathematicians*, (Encyclopedia of mathematics and its applications 72, Cambridge University Press, 1999).