

# Uso de programación lineal para conocer los parámetros geométricos de superficies cónicas convexas

A. Santiago-Alvarado<sup>a,\*</sup>, S. Vázquez-Montiel<sup>b</sup>, R. Nivón-Santiago<sup>a</sup> y C. Castañeda-Roldán<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad Tecnológica de la Mixteca, 69000, Huajuapán de León Oaxaca,

\*e-mail: [santiago@nuyoo.utm.mx](mailto:santiago@nuyoo.utm.mx)

<sup>b</sup>Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica,

Apartado Postal 51 y 216, Tonatzintla, Puebla.

e-mail: [svazquez@inaoep.mx](mailto:svazquez@inaoep.mx)

Recibido el 6 de mayo de 2003; aceptado el 5 de marzo de 2004

En este trabajo se propone un método para conocer la forma analítica de una superficie óptica convexa, a partir de las coordenadas de algunos puntos medidos sobre esta. Es decir, encontrar la forma analítica de la superficie que mejor se ajusta a una distribución de puntos medidos sobre la superficie que se desea caracterizar (en particular, se desea aplicar al espejo secundario del Gran Telescopio Milimétrico, que es una superficie cónica convexa de 2.57 m de diámetro, constante de conicidad  $K=-1.14$  y  $f/0.4$ ). El método consiste en resolver el problema de ajuste como un problema de aproximación polinomial en norma uniforme, el cual se resuelve por medio de programación lineal. Finalmente se presentan los resultados obtenidos al evaluar algunas superficies cónicas con el método propuesto.

*Descriptores:* Pruebas ópticas; programación lineal; metrología aplicada.

In this paper we proposed a method to obtain the analytic shape of an optical convex surface starting from the coordinates of some points measured on the surface. In other words, we want to find the analytic shape of the surface that best fits a distribution of points measured on a surface (in particular, we want to apply the method to the secondary mirror of the Large Millimeter Telescope; this mirror is a convex surface of 2.57 m diameter, conic constant  $K=-1$ , and  $f/0.4$ ). The method consists of solving the adjustment problem as a problem of polynomial approximation in uniform norm and it is solved by means of linear programming. Finally, we present the result obtained when we evaluate some conical surfaces with the proposed method.

*Keywords:* Optical testing; linear programming; applied metrological.

PACS: 81.70Fy, 6.60, 42.62Eh

## 1. Introducción

De los métodos de pruebas ópticas que existen actualmente, muy pocos pueden aplicarse con éxito a superficies cónicas convexas mayores a 70 cm de diámetro y  $f/0.4$ , dado que la mayoría de estos métodos utilizan componentes ópticas auxiliares que tienen tamaños iguales o mayores a las superficies bajo prueba. Éste es el caso de la prueba de Newton, la cual utiliza una placa de prueba que tiene el mismo tamaño que la superficie a probar [1]; otras pruebas como las holográficas reemplazan a la superficie patrón (*master*) por un holograma que tiene almacenado el frente de onda que se utilizará como referencia [2,3]; las pruebas nulas, a diferencia de las anteriores, insertan un sistema óptico (lente nula) para compensar a la onda esférica de tal manera que al final se forme una onda esférica o plana [4]. Estos métodos son frecuentemente utilizados para probar superficies que se fabrican en serie o tienen tamaños de 1 a 20 cm. Existen métodos que obtienen el perfil de la superficie bajo prueba con ayuda de un perfilómetro, el cual casi siempre es diseñado especialmente para la aplicación deseada [5].

Otros métodos caracterizan a las superficies por partes, toman información de la misma por zonas, para que integrando esta, sea posible conocer su forma, como sucede en la prueba de superficies planas [6], donde la superficie de referencia (*master*) es al menos un orden menor en tamaño que

la superficie bajo prueba. Estos métodos tienen la desventaja de que requieren un sistema de referencia confiable, ya que de lo contrario surgen errores al integrar la información, resultando una tarea difícil, costosa, meticulosa y que involucra mucho tiempo para su implementación.

Con la construcción del Gran Telescopio Milimétrico (GTM) en el INAOE [7], surge la necesidad de probar su espejo secundario, que es una superficie cónica convexa de 2.57 metros de diámetro y  $f/0.4$ . Para probar este tipo de superficies, el INAOE ha construido una máquina medidora de coordenadas (mmc) [8], la cual cuenta con un sistema de referencia guiado por láser con un volumen de medición de  $5\text{m} \times 6.5\text{m} \times 5.1\text{m}$  de capacidad y una precisión menor a  $10 \mu\text{m}$ , que no realiza ningún instrumento en su tipo hasta el momento. También cuenta con una estructura mecánica que permite colocar cualquier tipo de sensor para realizar pruebas.

En este trabajo se propone un método para probar el espejo secundario del GTM, el cual consiste en utilizar la máquina medidora de coordenadas y con ayuda de un palpador óptico medir las coordenadas de algunos puntos en la superficie bajo prueba. Posteriormente se obtiene la forma de la superficie que mejor se ajusta a ese conjunto de datos, utilizando aproximación polinomial en norma uniforme resuelta por programación lineal. Esto se hace en lugar de buscar directamente la forma analítica de la superficie que pasa por todos los pun-

tos, ya que resulta una tarea difícil de realizar, y en muchas ocasiones la forma obtenida no es la esperada. (superficies cónicas de revolución).

Comenzaremos mencionando cuál es la representación matemática de una superficie cónica, posteriormente se explicará cómo se modela mediante un programa lineal el problema de encontrar la superficie de mejor aproximación uniforme a los datos experimentales. Finalmente se muestran los resultados obtenidos al evaluar algunas superficies.

### 2. Superficies cónicas

El interés de esta prueba es caracterizar superficies cónicas convexas, debido a que cada vez son empleadas con más frecuencia en los sistemas ópticos (como los telescopios), con el propósito de mejorar la calidad de la imagen usando pocos elementos, permitiendo así que el sistema sea compacto y ligero.

Las secciones cónicas surgen de la intersección de un plano con un cono circular recto; variando la posición del plano se pueden obtener las diversas cónicas. Al rotar una sección cónica alrededor de su eje de simetría se obtiene la superficie cónica deseada, la cual es una superficie de revolución. Dichas superficies tienen diversas representaciones matemáticas, nosotros tomaremos la representación más empleada en óptica [9]:

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}}, \tag{1}$$

donde Z es la sagita,  $S^2 = X^2 + Y^2$ ,  $c = 1/r$ , con r el radio de curvatura paraxial y K la constante de conicidad definida como  $K = -e^2$ , siendo una función de la excentricidad, e.

De acuerdo a la Ec. (1) y a nuestra convención de signos (c es positiva si el centro de curvatura se encuentra a la derecha del vértice de la superficie y negativa si se encuentra del otro lado), quedan completamente representadas dichas superficies cónicas.

### 3. Aproximación y programación lineal

#### 3.1. Planteamiento del problema de aproximación

Para calcular los parámetros de la superficie del tipo (1) que mejor se ajustan a los datos experimentales mediante la solución de un problema de aproximación de tipo lineal, necesitamos definir la función que se va a aproximar y la clase de funciones por medio de las cuales pretendemos aproximarla. Esta clase es un espacio lineal de funciones y, por lo tanto, el mejor aproximante debe ser una combinación lineal de ciertas funciones pertenecientes a esta espacio. Se observa en (1) que Z no depende linealmente de funciones en las variables X e Y; pero tomando en cuenta la forma de la expresión en cuestión, es conveniente considerar que T es el conjunto de tríadas  $(x_i, y_i, z_i)$  obtenidas experimentalmente, y considerar la función  $f = z_{exp}$  definida en T por

$$f(x_i, y_i, z_i) = z_i \tag{2}$$

como la función que se va a aproximar; y como elementos de la base del espacio lineal de funciones aproximadoras las funciones  $v_1$  y  $v_2$  definidas por:

$$v_1(x_i, y_i, z_i) = x_i^2 + y_i^2, \tag{3}$$

y

$$v_2(x_i, y_i, z_i) = z_i^2. \tag{4}$$

Podemos plantear el problema de aproximación consistente en determinar  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que  $\alpha(x_i^2 + y_i^2) + \beta z_i$  sea la mejor aproximación en norma uniforme a  $z_{exp} = z_i$ , más adelante explicaremos el sentido preciso de esta última frase, pero por ahora escribamos informalmente

$$z_i \approx \alpha(x_i^2 + y_i^2) + \beta z_i^2. \tag{5}$$

Despejando  $z_i$  tenemos

$$z_i \approx \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha\beta(x_i^2 + y_i^2)}}{2\beta},$$

o bien, tomando el signo negativo:

$$z_i \approx \frac{2\alpha(x_i^2 + y_i^2)}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta(x_i^2 + y_i^2)}}, \tag{6}$$

ésta es la aproximación que nos interesa pues corresponde a una superficie cónica de la forma (1), con  $c = 2\alpha$  y  $K = (\beta/\alpha) - 1$ . La expresión lineal de esta aproximación esta dada por (5), y puede realizarse bajo diferentes criterios, el más conocido es el denominado mínimos cuadrados, nosotros utilizaremos el de norma uniforme, el cual permite una solución eficiente por programación lineal.

Aclaremos ahora el significado de la aproximación en norma uniforme. En nuestro caso nos interesa aproximar funciones definidas en un conjunto finito de puntos (el caso infinito requiere un tratamiento especial [10], y no es pertinente para ajustar a un conjunto de datos experimentales). Sea T un subconjunto finito de  $R^k$ , y sean  $f : T \rightarrow R$ ,  $v_i : T \rightarrow R, i = 1, \dots, n$  funciones de valores reales.

El problema de aproximación uniforme lineal (o aproximación uniforme por polinomios generalizados) consiste en determinar los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de la combinación lineal  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  que mejor aproxime a f en el sentido de minimizar la cantidad:

$$\max_{P \in T} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i(P) - f(P) \right|, \tag{7}$$

la cual representa la máxima discrepancia observada entre el valor de la función aproximadora  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  y el valor de la

función  $f$  que está siendo aproximada, en todos y cada uno de los puntos de  $T$ .

Con las funciones dadas por (2), (3), (4), el planteamiento de (5) como un problema de aproximación uniforme (7) queda de la siguiente manera:

Determinar los coeficientes  $\alpha, \beta$  de la combinación lineal  $\alpha v_1 + \beta v_2$  que mejor aproxime a  $z_{exp}$ , en el sentido de alcanzar el valor extremal:

$$\min \max_{i \in I} |\alpha (x_i^2 + y_i^2) + \beta z_i^2 - z_i|, \tag{8}$$

donde  $I$  es el conjunto de índices de los puntos observados. La existencia de solución para este problema está fundamentada teóricamente [11]. A continuación explicaremos como se resuelve (8) por Programación Lineal.

### 3.2. Solución por programación lineal

La programación lineal estudia la optimización (minimización o maximización) de una función lineal, cuyas variables están sujetas a un conjunto de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad.

En particular, se ocupa de encontrar solución (si es que existe una) a programas lineales como el siguiente:

Minimizar

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \tag{9}$$

En notación matricial:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cX \\ \text{s.a.} \quad & AX \geq b \end{aligned}$$

donde

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

El vector  $c$  es el vector de costos,  $cX$  es la función objetivo,  $x$  es el vector de variables de decisión y  $A$  es la matriz de restricciones.

Un programa lineal puede ser resuelto por diferentes métodos. En este trabajo se hizo una implementación del método Símplex revisado [12]. Los pasos seguidos por este método son mostrados en el diagrama de flujo de la figura 1; no damos más detalles del mismo por ser ampliamente conocido, sólo mencionaremos que previamente a su aplicación, el programa lineal (9) debe llevarse a la forma denominada estándar, caracterizada por tener únicamente restricciones de igualdad y variables no negativas, lo cual se logra introduciendo variables adicionales, si es necesario [12].

Ahora veremos como modelar el problema de aproximación dado por (8) como un programa lineal de la forma (9), para que posteriormente y mediante el método Símplex revisado pueda hallarse su solución. Obsérvese primero que un programa lineal tiene restricciones que son funciones lineales de las variables, por lo tanto el valor absoluto que aparece en (8) no puede trasladarse como tal a nuestro programa lineal. Debe hacer un cambio previo considerando que el hecho que dado un número real  $t$  y un número no negativo  $k$ , la desigualdad  $|t| \leq k$  es equivalente al par de desigualdades simultáneas:  $t \leq k$  y  $t \geq -k$ , tomando en cuenta este hecho, e introduciendo una nueva variable  $\chi$  el problema (8) puede expresarse como un programa lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \chi \\ \text{sujeta a} \quad & \alpha_1 (x_i^2 + y_i^2) + \alpha_2 z_i + \chi \geq z_i \quad i \in I \\ & -\alpha_1 (x_i^2 + y_i^2) - \alpha_2 z_i + \chi \geq -z_i \quad i \in I \end{aligned} \tag{10}$$

Éste es un programa lineal de la forma (9) con tres variables  $\alpha_1, \alpha_2, \chi$  y con  $2m$  restricciones, donde  $m$  es el número de puntos registrados. Obsérvese que la nueva variable  $\chi$ , al estar sujeta a las restricciones dadas en (10), representa una cota superior para el valor absoluto que aparece en (8); este programa lineal puede ser ahora resuelto por el método Símplex revisado.

### 4. Ejemplos

Para ilustrar el funcionamiento del algoritmo desarrollado, presentamos algunos ejemplos: en los primeros cuatro, se obtuvieron las coordenadas de algunos puntos de manera analítica, a partir de superficies cónicas determinadas (es decir, con  $k$  y  $c$  conocidos), pero en los ejemplos 3 y 4 se introducen errores en las coordenadas de manera aleatoria. Las superficies que se consideraron tienen un diámetro de 200 cm, un radio de curvatura paraxial  $R = 200$  cm; solamente se

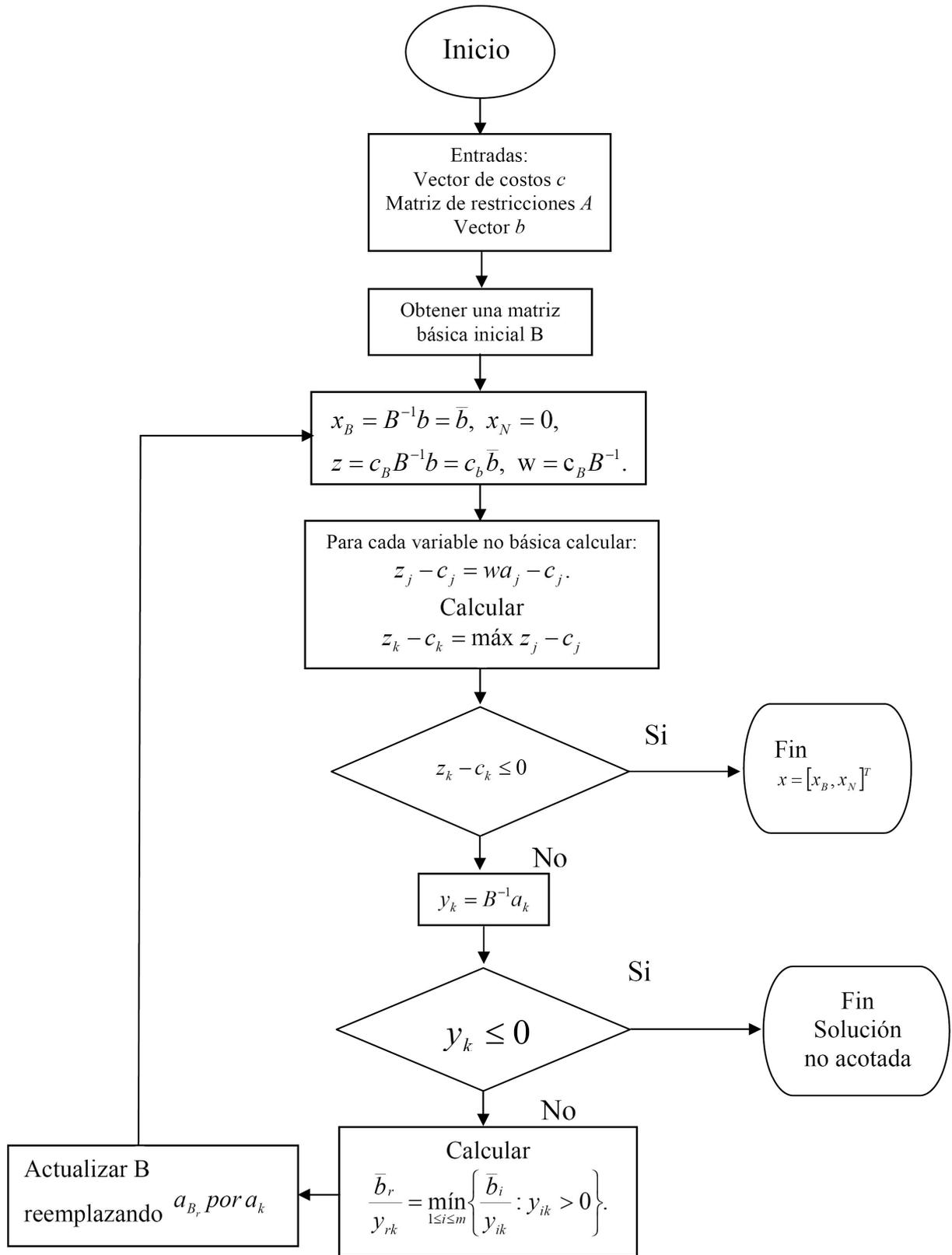


FIGURA 1. Diagrama de flujo del método Simplex Revisado.

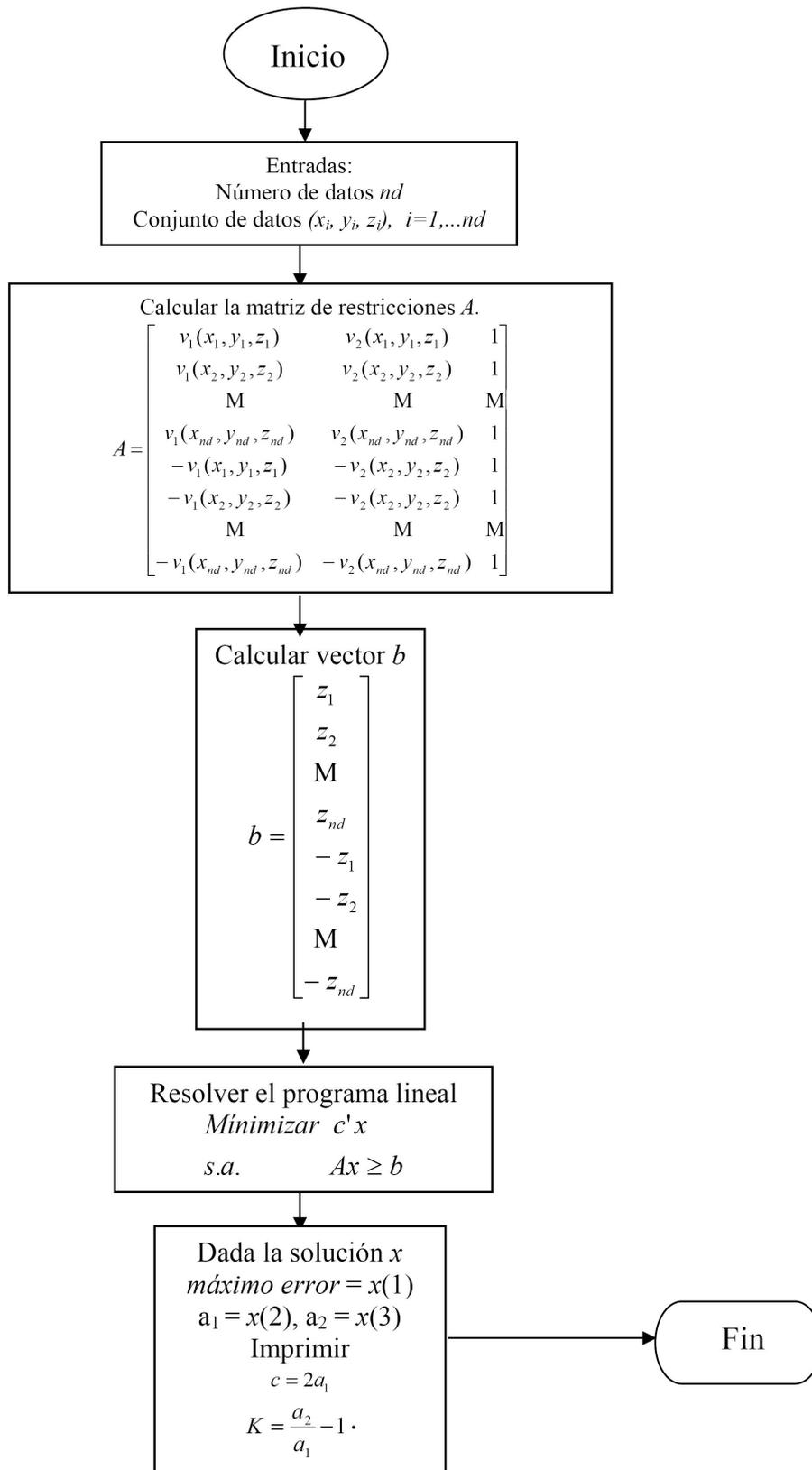


FIGURA 2. Diagrama de flujo del algoritmo de optimización.

cambio la constante de conicidad y el número de puntos medidos. Se eligieron estos valores debido a que la superficie a probar tendrá estas características. Finalmente, en el ejemplo 5, se midieron las coordenadas de 49 puntos en una superficie real para su caracterización.

Ejemplo 1.

Se generaron las coordenadas de 100 puntos distribuidos homogéneamente sobre toda la superficie de un elipsoide, con constante de conicidad  $K=1$  y radio de curvatura paraxial  $R = 200$ . El programa implementado obtuvo los siguientes parámetros geométricos para la superficie que mejor se ajustó en el proceso de optimización,  $K = 1.000007$  y  $R = 200.0003$  cm, con una desviación (error máximo de ajuste) de  $0.00003188$ . La Fig. 3 muestra el ajuste obtenido de la función encontrada a los datos generados.

Ejemplo 2.

Se generaron las coordenadas de 50 puntos distribuidos homogéneamente sobre toda la superficie de un paraboloide, con constante de conicidad  $K=-1$  y radio de curvatura paraxial  $R = 200$ . El programa implementado obtuvo los siguientes parámetros geométricos de la superficie que mejor se ajustó en el proceso de optimización:  $K = -0.9999990$  y  $R = 200.00004$  cm, con una desviación (error máximo de ajuste) de  $0.00000498$ . La Fig. 4 muestra el ajuste obtenido de la función encontrada a los datos generados analíticamente.

Ejemplo 3.

Se generaron las coordenadas de 50 puntos distribuidos homogéneamente sobre toda la superficie de un paraboloide, con constante de conicidad  $K= -1$ , y radio de curvatura paraxial  $R = 200$ , pero a las coordenadas (X, Y) se les introdujo un error estadístico del 10 % en sus valores de manera aleatoria (utilizando la función random, ya que este tipo de error

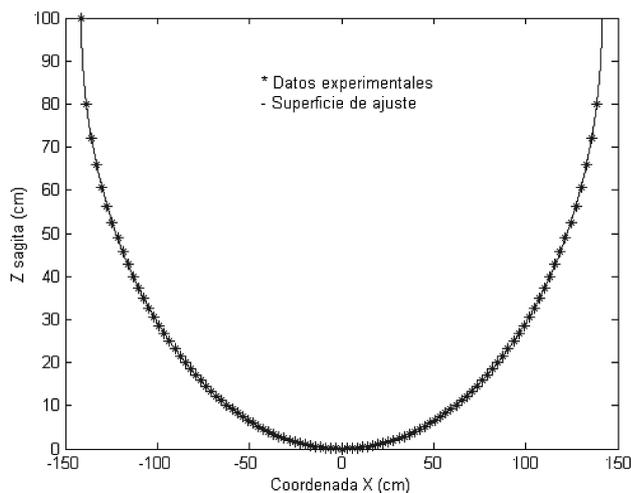


FIGURA 3. Ajuste obtenido en los puntos medido en un elipsoide.

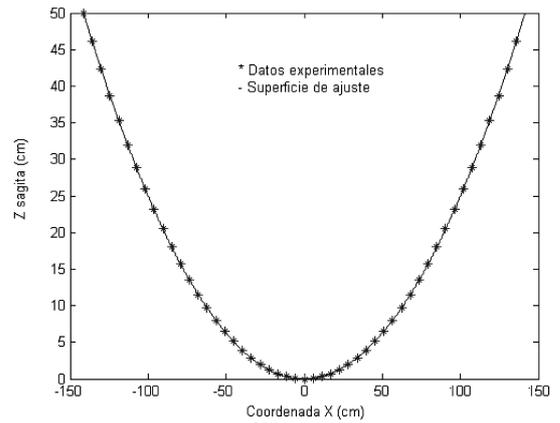


FIGURA 4. Ajuste obtenido en los puntos medido en un paraboloide.

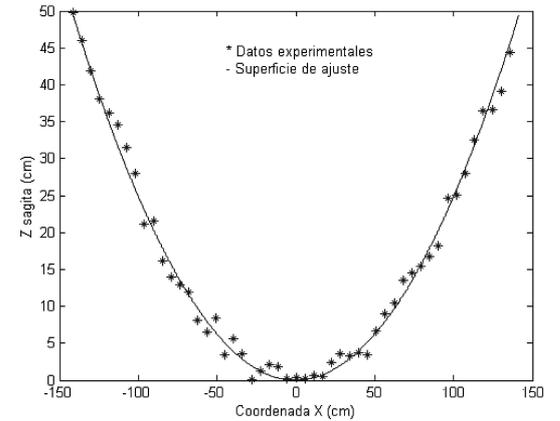


FIGURA 5. Ajuste obtenido en un paraboloide a partir de puntos medidos con errores aleatorios.

es el que esperamos que se pueda presentar). El programa implementado obtuvo los siguientes parámetros geométricos de la superficie que mejor se ajustó en el proceso de optimización:  $K = -1.09312179$  y  $R = 199.848025$  cm, con una desviación (error máximo de ajuste) de  $2.8182250$ . La Fig. 5 muestra el ajuste obtenido de la función encontrada a los datos generados analíticamente.

Ejemplo 4.

Se generaron las coordenadas de 100 puntos distribuidos homogéneamente sobre toda la superficie de un elipsoide, con constante de conicidad  $K= 3$ , y radio de curvatura paraxial  $R = 200$ , nuevamente se introdujo un error estadístico de manera aleatoria en las coordenadas (X, Y) del 10 %. El programa obtuvo como parámetros geométricos  $K = -2.8019045626$  y  $R = 203.69327196$  cm, con una desviación (error máximo de ajuste) de  $0.42730835$ . La Fig. 6 muestra el ajuste obtenido.

Ejemplo 5.

De manera experimental, se midieron las coordenadas de 49 puntos distribuidos homogéneamente sobre una superficie real. El programa implementado obtuvo los siguiente parámetros geométricos  $K = 3.247771$  y  $R = 144.801855$  con un error máximo de  $0.623220$ . Las Figs. 7 y 8 muestran el

ajuste obtenido de la función encontrada y los datos experimentales.

Otra técnica que se utilizó para conocer la forma de la superficie que mejor se ajusta a los datos experimentales fue la técnica híbrida de algoritmos genéticos y mínimos cuadrados amortiguados, donde los resultados fueron muy similares, con la diferencia que esta técnica requiere más tiempo de cómputo.

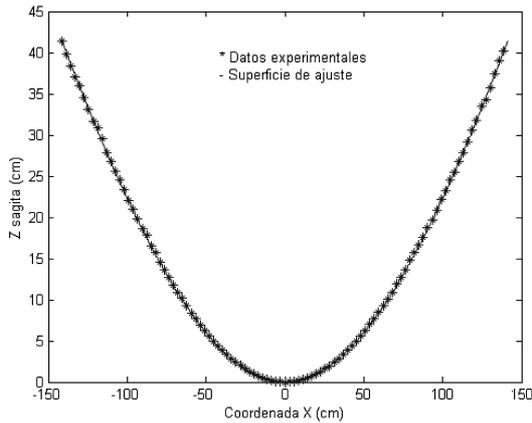


FIGURA 6. Ajuste obtenido en un elipsoide a partir de puntos medidos con errores aleatorios.

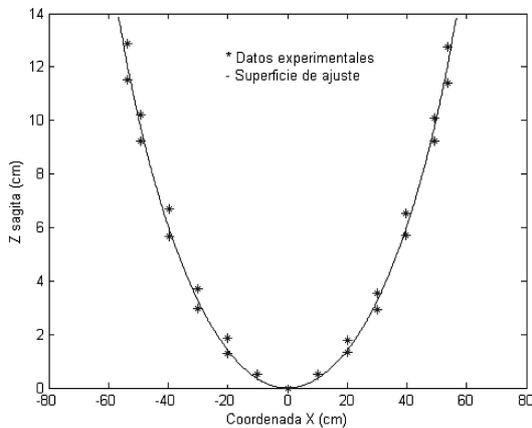


FIGURA 7. Ajuste obtenido en los puntos medido en una superficie real.

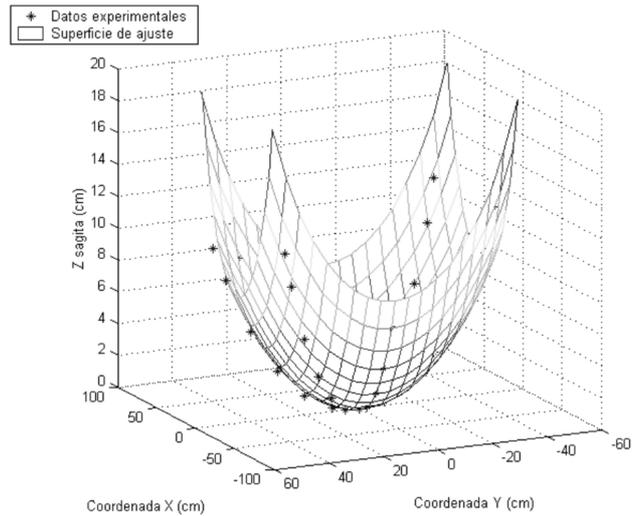


FIGURA 8. Ajuste obtenido en los puntos medido en una superficie real vista espacial.

### 5. Conclusiones

El algoritmo implementado permite conocer la forma analítica de la superficie que mejor se ajusta a los datos proporcionados, con excelente precisión, como se logra ver en los resultados obtenidos de los ejemplos presentados. Esto se logró, debido a que el problema de ajuste se pudo modelar como un problema de aproximación polinomial y se resolvió utilizando el método de programación lineal. Este método permite caracterizar a la superficie bajo prueba relativamente rápido pues el tiempo empleado al evaluar las superficies que se presentaron en los ejemplos previos fue de unos cuantos segundos (se utilizó una computadora con procesador pentium 4 y memoria RAM de 256 MB).

El programa implementado se diseñó especialmente para ajustar con superficies cónicas puntos medidos en superficies ópticas. Si la distribución espacial de los datos no se acerca a un patrón de este tipo, o si se pretende obtener una superficie de ajuste con una forma analítica diferente, deberán probarse otras funciones  $\nu_i$  en (7), diferentes a las empleadas, para encontrar una representación adecuada. Sin embargo, esta metodología se puede generalizar a cualquier tipo de superficies siempre y cuando sea factible modelar el ajuste como un problema de aproximación polinomial en norma uniforme.

En lo futuro se persigue que el proceso de captura y manejo de la información sea de manera automática para que la prueba sea lo más sencilla posible. Se buscará también generalizar el método propuesto a superficies esféricas de revolución.

1. D. Malacara and A. Cornejo, *Appl. Opt.* **9** (1970) 837.
2. B. P. Hildebrand, K. A. Haines, and R. Larkin, *Appl. Opt.* **6** (1967) 1267.
3. J. H. Burge and D. S. Anderson, "Full aperture Interferometric test of convex secondary mirror using holographic test plates," *Proc. SPIE* (1994) 2199.

4. J. Strong, *Procedures in experimental Physics* (Prentice – Hall, Englewood Clifff, N.J., 1958) p. 64.
5. J. H. Burge, “Measurement of Large Convex Aspheres,” *Proc. SPIE* (1996) 2871.
6. O. Masashi, O. Katsuyuki, and T. Jumpei, *Opt. Eng.* **33** (1994) 608.
7. <http://www.lmtgtm.org/>.
8. D. M. Gale, “Marco de metrología para una máquina de medición por coordenadas”, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Física y Naturales, OPTILAS’98.
9. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, (John Wiley and Sons, New York, 1978) p. 479.
10. K. Glashoff and S. A. Gustafson, *Linear Optimization and Approximation* (Berlin, Springer-Verlag, 1978)
11. E.W.Cheney, *Approximation Theory* (McGraw-Hill Book Company 1966)
12. M.S. Bazaraa and J.J. Jarvis, *Programación lineal y flujo en redes* (Edit. Limusa, 1999).