Ecuaciones de Hamilton-Jacobi y de Schrödinger en la dinámica relativista de tiempo propio

R.M. Yamaleev* y A.L. Fernández Osorio,
Facultad de Estudios Superiores UNAM, Av. 1-Mayo, Campo 1,
Edif.A-1, Apdo.Postal 25, Cuautitlán Izcalli
Edo. de Mexico, 54740, México

A.R. Rodríguez Dgz.
Instituto de Física-UASLP,
Alvaro Obregón 64, 78000 San Luis Potosí , México,
e-mail: adnrdz@ifisica.uaslp.mx

Recibido el 9 de junio de 2003; aceptado el 3 de febrero de 2004

Se formula la dinámica de una partícula puntual relativista con respecto al tiempo propio sobre los cascarones hiperbólico $p_0^2 - \vec{p}^2 = M^2c^2$ y esférico $p_4^2 + \vec{p}^2 = \mathcal{E}_0^2/c^2$. Este último se obtiene cuando consideramos el movimiento bajo un potencial escalar de Lorentz. Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi del movimiento, bajo este potencial escalar de Lorentz, son formuladas tanto para partículas con masa ($M^2 = m^2,\ m > 0$), como para partículas sin masa ($M = 0,\ m > 0$), y para el neutrino. Se presenta una primera versión de cuantización del modelo de acuerdo al esquema canónico de cuantización de Schrödinger.

Descriptores: Extensiones de la teorías clásicas de la mecánica; Hamilton-Jacobi; Newton; marco relativista y cuántico; tiempo propio; partículas masivas y sin masa; neutrino.

The dynamics of a relativistic point particle is formulated using the proper time as evolution parameter on the hyperbolic $p_0^2 - \vec{p}^2 = M^2c^2$ and spheric $p_4^2 + \vec{p}^2 = \mathcal{E}_0^2/c^2$ shells. This last case corresponds to considering the motion under a Lorentz invariant potential. The Hamilton-Jacobi equations of motion under this Lorentz scalar potential are formulated both for massive ($M^2 = m^2,\ m > 0$) and massless ($M = 0,\ m > 0$) particles, and for the neutrino. We present additionally a first quatization version of the model following the Schrödinger canonical quatization scheme.

Keywords: Extensions of the classical theories of the mechanics; Hamilton-Jacobi; Newton; to the relativistic and quantum frame; proper time; massive and massless particles; neutrino.

PACS: 03.20.+i, 03.65.Pm, 14.60.Lm.

1. Introducción

En años recientes, la formulación en tiempo propio de la dinámica clásica, así como de la dinámica cuántica relativista, ha sido de interés en varias investigaciones. La teorí a cuántica relativista para una partícula singular, propuesta por Stueckelberg [1], ha sido aún más generalizada por Horwitz y Piron [2] para sistemas de muchos cuerpos. Collins y Fanchi [3] han considerado la ley de conservación de la corriente relativista, realizando muchos estudios sobre las propiedades de la teoría. En particular, Fanchi [4] ha demostrado que no existe la paradoja de Klein. Igualmente, Young-Sea Huang [5] formularon la ecuación de movimiento de onda relativista del tipo de Schrödinger, en el contexto de una representación de potencial efectivo. También demostraron que la solución del problema de una densidad de probabilidad negativa, la del problema del movimiento de Zitter (*Zitterbewegung*), y la de la paradoja de Klein, pueden establecerse en términos de esta formulación.

En este trabajo formulamos las ecuaciones relativistas de Hamilton-Jacobi con respecto al *tiempo propio* como un parámetro de evolución para el movimiento bajo un potencial tanto escalar como vectorial (de Lorentz). Para el primer tipo, obtenemos las ecuaciones relativistas del movimiento sobre el cascarón hiperbólico $\mathcal{H}$: $p_0^2 - \vec{p}^2 = (Mc)^2$. Para el segundo tipo, manejamos el movimiento sobre el cascarón esférico $\mathcal{S}$: $p_4^2 + \vec{p}^2 = \mathcal{E}_0^2/c^2$.

En la Sec. 2 partimos de la fuerza de Lorentz para formular las ecuaciones dinámicas relativistas en tiempo propio, válidas tanto para partículas masivas como para partículas sin masa. Mostramos cómo a través de un potencial efectivo es posible darle a estas ecuaciones una forma newtoniana. Inversamente, mostramos el algoritmo mediante el cual extendemos sistemáticamente las ecuaciones clásicas de Hamilton-Jacobi al terreno relativista. En la Sec. 3 derivamos las ecuaciones de Hamilton-Jacobi sobre la parte positiva del hiperboloide $\mathcal{H}$ para partículas tanto con masa como sin masa. Mostramos también que una característica del impulso relativista es la *factorización* y cómo la formulación relativista en las nuevas variables corresponde alternativamente al formalismo del espacio fase de Nambu. En la Sec. 4 se presentan las soluciones de las ecuaciones relativistas de Hamilton-Jacobi en el campo de un potencial con fronteras monótonamente crecientes. Mostramos que, en particular, es posible resolver para el potencial del oscilador armónico. En la Sec. 5 formulamos las ecuaciones relativistas de Hamilton-Jacobi sobre la esfera, esto es, cuando el potencial es considerado como un escalar de Lorentz. En la Sec. 6 desarrollamos las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en la representación de las matrices de Pauli, aplicando las ecuaciones sin masa, espí n $s = 1/2$ y doble helicidad para el neutrino. En la Sec. 7, las ecuaciones cuánticas tipo de Schrödinger se formulan tanto para partículas masivas con espí n un medio como para el neutrino. En el caso del movimiento espacial en una dimensión, en un potencial estacionario, reproducimos las ecuaciones relativistas de cuasipotencial en el espacio de configuración, elaboradas en la Ref. 6.

2. Ecuaciones de la dinámica relativista para partículas con masa y sin masa

En la mecánica clásica no existe el concepto de partícula sin masa. Nuestro primer objetivo es el de establecer las ecuaciones relativistas del movimiento, que incluyan el caso límite de una partícula sin masa. A continuación discutimos la fuerza de Lorentz, de la que obtendremos directamente las ecuaciones del movimiento. Consideremos una partícula de carga e que se mueve bajo la acción de un campo electromagnético $\{\vec{E}, \vec{B}\}$. El cuadripotencial de Lorentz $(\Phi, \vec{A})$ se relaciona con el campo electromagnético $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ mediante

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}]. \tag{1}$$

El movimiento de la partícula relativista bajo el campo electromagnético, con respecto al tiempo propio τ, es descrito por la ecuación de fuerza de Lorentz [7], la que en su forma covariante expresamos como

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = \frac{e}{mc}F_\mu{}^\nu p_\nu, \quad p_\mu = g_{\mu\nu}\, m\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{2}$$

Obsérvese que no es posible escribir covariantemente la fuerza de Lorentz, prescindiendo del tiempo propio.

Esta misma ecuación deseamos escribirla en componentes:

$$\frac{d}{d\tau}p_0 = \frac{e}{mc}(\vec{E}\cdot\vec{p}), \quad \frac{d}{d\tau}\vec{p} = \frac{e}{mc}(\vec{E}\, p_0 + [\vec{p}\times\vec{B}]), \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{p_0}{mc}. \tag{4}$$

Es notorio que nuestras ecuaciones dinámicas poseen una primera integral de movimiento

$$p_0^2 - \vec{p}^2 = M^2c^2. \tag{5}$$

Las componentes del cuadriimpulso canónico $\{p_{0c}, \vec{p}_c\}$ se definen como

$$p_{0c} = p_0 + \frac{e}{c}\Phi, \qquad \vec{p}_c = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}.$$

En estas variables, la relación (2.4) toma la forma

$$\left(p_{0c} - \frac{e}{c}\Phi\right)^2 - \left(\vec{p}_c - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = M^2c^2. \tag{6}$$

Por tanto, en una formulación manifiestamente covariante de Lorentz, contamos con una constante de movimiento en la dinámica dada por (5), la que, al introducir las relaciones (4) en la fórmula (5), se traduce igualmente a la métrica

$$(cdt)^2 - (d\vec{x})^2 = \frac{M^2}{m^2}(cd\tau)^2. \tag{7}$$

Es claro que necesitamos determinar el valor de esta constante M, lo cual deberí a lograrse a través de alguna característica física de la partícula. Supongamos que $M \neq 0$. Se encuentra fácilmente que al tomar el límite no relativista $c \to \infty$, obtenemos las ecuaciones de movimiento de Newton. De esta correspondencia, encontramos que la constante de movimiento deberí a identificarse con la masa, así que $M^2 = m^2$. Si tomamos $M^2 = m^2$ en (6), obtenemos de esta expresión el intervalo métrico para partículas masivas. Ésta es una razón geométrica para identificar M con m.

Si suponemos que $M = 0$, ya no necesitamos determinar su valor, sin embargo, en este caso se rompe la correspondencia con la mecánica de Newton. Esto significa que, en el caso $M = 0$, perdemos la posibilidad de interpretar la constante de movimiento M como la masa de la partícula. Más aún, perdemos todo argumento para identificar M con m. Por tanto, dentro de la dinámica relativista, tratamos con dos clases de partículas caracterizadas por los valores de M/m dados por

$$i) \quad \left(\frac{M}{m}\right)^2 = 1, \text{partículas masivas},$$

$$ii) \quad \frac{M}{m} = 0, \text{partículas sin masa}.$$

De aquí que resulta importante mantener la distinción entre M como constante del movimiento y m como parámetro de las ecuaciones dinámicas. Una realización importante de una partícula con “masa cero” es el *fotón*.

Procedemos a continuación a escribir las ecuaciones del movimiento relativista bajo la acción del potencial $V(r)$:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{dV}{d\vec{r}}\frac{p_0}{mc}, \quad \frac{dp_0}{d\tau} = -(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\frac{\vec{p}}{mc}), \tag{8}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{p_0}{mc}. \tag{9}$$

Estas ecuaciones son consecuencia de las mismas ecuaciones de Lorentz [Ecs. (3) y (4)] con $\vec{A} = 0$ y $V(\vec{r}) = e\Phi(\vec{r})$. Así escritas, explícitamente en componentes, es claro que estas Ecs. (8) y (9) no son explícitamente covariantes de Lorentz, por lo que debemos saber distinguir entre invariancia y covariancia de Lorentz. Obsérvese, sin embargo, que escribirlas en tiempo propio significa reemplazar el tiempo del observador por el tiempo de la partícula. En el caso del movimiento estacionario, a saber cuando $V(\vec{r}, t) = V(\vec{r})$, de la segunda de las Ecs. (8) y (9) encontramos que la energía $\mathcal{E}_0$ corresponde a una segunda integral del movimiento:

$$cp_0 + V(\vec{r}) = \mathcal{E}_0.$$

Usando la expresión $(1/c)(\mathcal{E}_0 - V(r))$ en vez de p_0 en la primera de las Ecs. (8) y (9), obtenemos

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{dW(\mathcal{E}_0, r)}{d\vec{r}}, \tag{10}$$

donde el *potencial efectivo* lo definimos como

$$W(\mathcal{E}_0, r) = \frac{1}{2mc^2}(2\mathcal{E}_0\, V(r) - V^2(r)).$$

Nos percatamos que la Ec. (10) es una expresión newtoniana. Nos damos cuenta que podemos escribir las ecuaciones relativistas en forma newtoniana gracias al tiempo propio. De inmediato surge la idea de que esta generalización podemos también emprenderla para Hamilon-Jacobi; lo que sistemáticamente desarrollaremos en el presente artículo.

La otra constante del movimiento tiene la forma de una energía newtoniana bajo el potencial efectivo

$$\mathcal{E}_1 = \frac{p^2}{2m} + W(\mathcal{E}_0, r). \tag{11}$$

La relación entre la pareja de constantes del movimiento $\{\mathcal{E}_0, M\}$ y $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1\}$ está dada por

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2mc^2}(\mathcal{E}_0^2 - (Mc^2)^2).$$

Por tanto, al introducir el potencial efectivo, podemos transformar las ecuaciones relativistas (8) y (9) en ecuaciones del tipo de Newton (10). Deberí a enfatizarse, sin embargo, que la representación del potencial efectivo funciona solamente en el caso del movimiento estacionario.

De la última de las ecuaciones en (9) obtenemos

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{p_0}{mc}\frac{d}{dt}. \tag{12}$$

Con esta relación, podemos reformular las Ecs. (8) y (9) con respecto al tiempo coordenado, obteniendo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dV}{d\vec{r}}, \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{(mc)^2 + p^2}}. \tag{13}$$

Con estas ecuaciones, estamos ya en condiciones de pasar a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, las que formularemos primeramente con respecto al tiempo coordenado. Para construir las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, usaremos el método elaborado en la Ref. 10 para la ecuación de Newton.

Suponiendo para el vector de impulso una dependencia tanto del tiempo coordinado como de las coordenadas espaciales $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}, t)$, podemos entonces escribir la derivada total temporal como

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{p} + (\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla})\vec{p} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{p} + \vec{\nabla}(\sqrt{(mc)^2 + p^2}) - [\vec{p} \times [\vec{\nabla} \times \vec{p}]], \tag{14}$$

donde $\vec{\nabla} := (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Usando la Ec. (13), tenemos

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\sqrt{(mc)^2 + p^2}) - [\vec{p} \times [\vec{\nabla} \times \vec{p}]] + \vec{\nabla}V = 0. \tag{15}$$

Introduzcamos ahora la función de acción $S = S(\vec{r}, t)$ mediante la relación

$$\vec{p} := \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}. \tag{16}$$

En este caso la función de acción resulta ser un invariante de Lorentz. Notemos que de (16) se sigue $[\vec{\nabla} \times \vec{p}] = 0$. Finalmente, con esta misma definición (16) podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + p^2} + V(r)\right] = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + p^2} + V(r) = f(t),$$

donde la función $f(t)$ puede tomarse como cero [10], o sea

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c\sqrt{(mc)^2 + p^2} + V(r) = 0.$$

Nuevamente, tomando en cuenta (16), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función de acción:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi(r)\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} - e\vec{A}(r)\right)^2 = (mc)^2, \tag{17}$$

la cual es una primera formulación relativista de Hamilton-Jacobi en tiempo coordenado.

3. Ecuaciones relativistas de Hamilton-Jacobi sobre el hiperboloide

En la sección previa mostramos el método para derivar las ecuaciones de Hamilton-Jacobi a partir de las ecuaciones relativistas de movimiento, escritas como ecuaciones de Newton, en términos del tiempo coordenado. Con el propósito de usar este método para las ecuaciones relativistas en la formulación del tiempo propio, podemos usar las Ecs. (10) y (11) para el potencial efectivo [5]. Sin embargo, esta representación es válida sólamente en el caso de movimiento estacionario. Podemos evitar esta restricción haciendo uso del valor p_0 de la relación (5). De esta forma arribamos a las ecuaciones de movimiento sobre el hiperboloide $\mathcal{H}$.

Empecemos con el caso de una partícula masiva $M^2 = m^2$. De (5) tomemos para p_0 el valor definido por la hoja positiva del cascarón hiperbólico $\mathcal{H}$:

$$p_0 = +\sqrt{(mc)^2 + p^2}. \tag{18}$$

Al introducir este valor en la primera de las Ecs. (2.6a), obtenemos

$$\frac{mc}{\sqrt{(mc)^2 + p^2}}\frac{d}{d\tau}\vec{p} = \vec{U}, \;\; \vec{U} := -\frac{dV}{d\vec{r}}. \tag{19}$$

Esta ecuación puede desdoblarse para la pareja de valores: $p := \sqrt{(\vec{p}\cdot\vec{p})}$ y $\vec{n} := \vec{p}/p$. La ecuación para p se obtiene al realizar una proyección de la Ec.(3.2) sobre la dirección del momento. Obtenemos

$$\frac{d}{d\tau}\Pi = (\vec{U}\cdot\vec{n}). \tag{20}$$

Aquí hemos introducido la nueva variable

$$\Pi = mc \text{ arcsinh}\left(\frac{p}{mc}\right). \tag{21}$$

La ecuación para $\vec{n}$ se obtiene usando las Ecs. (19) y (20). Obtenemos

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} = \coth\left(\frac{\Pi}{mc}\right)[\vec{n}\times[\vec{U}\times\vec{n}]]. \tag{22}$$

En términos de los valores $\{\vec{n},\ p\}$ las ecuaciones de la fuerza de Lorentz (3) pueden ser reescritas como sigue:

$$\frac{d}{d\tau}\Pi = e(\vec{E}\cdot\vec{n}), \tag{23}$$

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} = e([\vec{n}\times\vec{B}] + \coth\left(\frac{\Pi}{mc}\right)[\vec{n}\times[\vec{E}\times\vec{n}]]). \tag{24}$$

Invirtiendo (21) encontramos

$$p = mc\ \sinh\left(\frac{1}{mc}\Pi\right). \tag{25}$$

Podemos extender las fórmulas (21) y (25) para el caso vectorial. Definamos el vector $\vec{\Pi}$ como

$$\vec{\Pi} := \vec{n}\Pi.$$

Entonces, se cumplen también las siguientes expresiones:

$$\vec{p} = \vec{n}\ mc\sinh\left(\frac{1}{mc}\Pi\right),$$

$$\vec{\Pi} = \vec{n}\ mc \text{ arcsinh}\left(\frac{1}{mc}p\right). \tag{26}$$

Usando las Ecs.(20) y (22), podemos comprobar que el vector de impulso $\vec{p}$ definido por (25) efectivamente satisface las Ecs. (19).

A fin de construir las ecuaciones de*Hamilton-Jacobi* en tiempo propio, empleamos nuevamente el método elaborado en la sección precedente.

Suponiendo para el vector de impulso una dependencia tanto del tiempo propio, como de las coordenadas espaciales, entonces podemos escribir la derivada total con respecto al tiempo propio, como sigue

$$\frac{d}{d\tau}\vec{p} = \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{p} + \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{p} = \frac{\partial}{\partial\tau}\vec{p} + \frac{1}{2m}\vec{\nabla}(p^2) - \frac{1}{m}[\vec{p}\times[\vec{\nabla}\times\vec{p}]], \tag{27}$$

donde $\vec{\nabla} := (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Usando la Ec. (19), obtenemos

$$\frac{mc}{\sqrt{(mc)^2+p^2}}\frac{\partial\vec{p}}{\partial\tau} + \frac{c}{2\sqrt{(mc)^2+p^2}}\vec{\nabla}(p^2) - \frac{c}{\sqrt{(mc)^2+p^2}}[\vec{p}\times[\vec{\nabla}\times\vec{p}]] + \vec{\nabla}V = 0. \tag{28}$$

Usando un método formal de integración, esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{n}\ mc \text{ arcsinh}\frac{p}{mc}\right) + \vec{\nabla}(c\sqrt{(mc)^2+p^2}) - \frac{c}{\sqrt{(mc)^2+p^2}}[\vec{p}\times[\vec{\nabla}\times\vec{p}]] + \vec{\nabla}V = 0. \tag{29}$$

Ahora introduzcamos la función de acción $S = S(r,\tau)$ como

$$\vec{\Pi} := \frac{\partial S}{\partial\vec{r}} = \vec{n}\ mc\text{Arcsinh}\frac{p}{mc}. \tag{30}$$

Inversamente, el vector de impulso puede ser definido mediante

$$\vec{p} = \vec{n}\ mc\sinh\left(\frac{1}{mc}|\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}|\right), \tag{31}$$

donde el símbolo $|\vec{a}|$ denota la longitud de $\vec{a}$. Notemos que, de (30) y (31), se sigue que $[\vec{\nabla}\times\vec{p}] = 0$. Introduciendo la definición (30) en la Ec. (29), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left[\frac{\partial S}{\partial\tau} + c\sqrt{(mc)^2+p^2} + V(r)\right] = 0.$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + c\sqrt{(mc)^2+p^2} + V(r) = f(\tau),$$

donde la functión $f(\tau)$, como en la sección anterior, puede tomarse como cero. Finalmente, tomando en cuenta (30), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función de acción:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + mc^2\ \cosh\left(\frac{1}{mc}\left(\left|\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right|\right)\right) + V(r) = 0. \tag{32}$$

En el caso del movimiento estacionario,

$$-\frac{\partial S}{\partial\tau} = \mathcal{E}_0.$$

Hasta ahora hemos manejado el movimiento de una partícula con masa.

Procedamos ahora a derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula sin masa. Formularemos estas ecuaciones de acuerdo al concepto de masa nula, establecido mediante $M = 0$, $m > 0$. En este caso $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2}$, donde los signos $(+/-)$, posteriormente cuando emprendamos la cuantización, corresponderán a los casos de helicidad positiva/negativa, respectivamente (ver Sec. 6). Tenemos

$$\frac{mc}{p_0}\frac{d}{d\tau}p = (\vec{n}\cdot\vec{U}),\ \ p_0 = \pm p. \tag{33}$$

Al integrar, la Ec. (32) se transforma como

$$\frac{d}{d\tau}\Pi = (\vec{U}\cdot\vec{n}), \tag{34}$$

donde

$$\Pi := \pm mc\ \ln\left(\frac{p}{mc}\right). \tag{35}$$

Deberí a enfatizarse que la función logarí tmica en esta fórmula posee una expansión en la vecindad del punto $p = mc$. Para la partícula sin masa, la ecuación de $\vec{n}$ es independiente de Π:

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} = [\vec{n}\times[\vec{U}\times\vec{n}]]. \tag{36}$$

El método anterior de construcción de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula masiva puede usarse igualmente para el caso sin masa. Introduzcamos como función de acción

$$\Pi := \left(\vec{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right) = mc\ \ln\frac{p}{mc}. \tag{37}$$

Inversamente, el impulso de la partícula sin masa para ambas helicidades queda definido como

$$p = mc\ \exp\left(\pm\frac{1}{mc}\left(\vec{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right)\right). \tag{38}$$

Con el empleo de las expresiones anteriores (36) y (37), de manera similar como ya se hizo, obtenemos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula sin masa:

$$-\frac{\partial S}{\partial\tau} = mc^2\ \exp\left(\pm\frac{1}{mc}\left(\vec{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right)\right) + V(r). \tag{39}$$

Como ejemplo mostramos a continuación el esquema de Nambu. Para el caso del movimiento de una partícula en una dimensión, la Ec. (31) puede descomponerse en dos ecuaciones del tipo *no relativistas*, como sigue. Nótese que el impulso de la partícula masiva, dado por la fórmula (30) puede ser factorizado como sigue:

$$p = 2mc\ \sinh\left\{\frac{1}{2mc}\Pi\right\}\ \cosh\left\{\frac{1}{2mc}\Pi\right\}.$$

Introduciendo los dos parámetros m_π, m_q, mediante la relación

$$m = \frac{\sqrt{m_\pi m_q}}{2},$$

encontramos que el impulso queda factorizado como sigue:

$$p = \pi\ q\frac{1}{2c\sqrt{m_\pi m_q}},$$

donde

$$\pi = 2c\sqrt{m_\pi m}\ \sinh\left\{\frac{1}{2mc}\Pi\right\},$$

$$q = 2c\sqrt{m_q m}\ \cosh\left\{\frac{1}{2mc}\Pi\right\}.$$

En términos de $\{\pi,\ q\}$ la Ec.(31) se descompone en las dos ecuaciones no relativistas

$$H_\pi := -\frac{\partial S}{\partial\tau} - mc^2 = \frac{1}{2m_\pi}\ \pi^2 + V(r).$$

$$H_q := -\frac{\partial S}{\partial\tau} + mc^2 = \frac{1}{2m_q}\ q^2 + V(r).$$

De esta manera recobramos de manera alternativa la formulación del espacio fase tridimensional de la dinámica relativista (para más detalles ver la Ref. 11). En esta formulación, el triplete de variables $\{q_1 = \pi,\ q_2 = q,\ q_3 = r\}$ obedece las ecuaciones de Nambu [12]:

$$\frac{dq_a}{d\tau} = \epsilon_{abc}\frac{\partial H_1}{\partial q_b}\frac{\partial H_2}{\partial q_c},\ a,b,c = 1,2,3. \tag{40}$$

Definiendo las funciones de Nambu-Hamilton por $H_1 := H_\pi$, $H_2 := H_q$, obtenemos de (40) como ecuaciones dinámicas relativistas

$$\begin{aligned}\frac{d\pi}{d\tau} &= -\frac{dV}{dr}\frac{q}{m_q c},\\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{dV}{dr}\frac{\pi}{m_\pi c},\\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{\pi}{m_\pi}\frac{q}{m_q c},\end{aligned} \tag{41}$$

las que en su naturaleza podemos comparar con el conjunto de Ecs. (7) y (8).

4. Movimiento relativista bajo un potencial con fronteras monótonamente crecientes

Como un ejemplo de la Ec. (31) obtenida, consideremos el movimiento unidimensional de una partícula relativista dentro de un campo de potencial $V(x)$ con fronteras monótonamente crecientes.

La ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula masiva $M = m$ en movimiento estacionario es

$$\mathcal{E}_0 = mc^2\ \cosh\left(\frac{1}{mc}\frac{dS}{dx}\right) + V(x), \tag{42}$$

la cual integramos de inmediato

$$S = -\mathcal{E}_0\tau + \int \text{arccosh}\frac{\mathcal{E}_0 - V(x)}{mc^2}dx + const. \tag{43}$$

Tomando la derivada parcial de S con respecto a $\mathcal{E}_0$, obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial\mathcal{E}_0} = -\tau + \int\frac{mc\ dx}{\sqrt{(\mathcal{E}_0 - mc^2 - V(x))(\mathcal{E}_0 + mc^2 - V(x))}}. \tag{44}$$

Tomando

$$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}_0} = -\tau_0,$$

obtenemos

$$\tau - \tau_0 = \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau)} \frac{mc\, dx}{\sqrt{(\mathcal{E} - mc^2 - V(x))(\mathcal{E} + mc^2 - V(x))}}. \quad (45)$$

Hay que notar que para un campo de potencial escalar con fronteras monótonamente crecientes, las soluciones son funciones doblemente períodicas. La parte real e imaginaria del período de las soluciones quedan definidas por las siguientes integrales:

$$T_0 = 2 \int_{x(3)}^{x(2)} \frac{mc\, dx}{\sqrt{(\mathcal{E} - mc^2 - V(x))(\mathcal{E} + mc^2 - V(x))}},$$

$$T_1 = 2 \int_{x(2)}^{x(1)} \frac{mc\, dx}{\sqrt{(\mathcal{E} - mc^2 - V(x))(\mathcal{E} + mc^2 - V(x))}},$$

donde $x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4)$ son soluciones de la ecuación algebraica

$$(\mathcal{E} - mc^2 - V(x))(\mathcal{E} + mc^2 - V(x)) = 0.$$

En el caso del potencial del oscilador $V(x) = (m\omega^2 x^2)/2$, la integral (45), que hemos resuelto previamente [11], se reduce a la integral elíptica

$$\phi - \phi_0 = \int_{y(\phi_0)}^{y(\phi)} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}}, \quad (46)$$

con $\phi = \Omega(\tau - \tau_0),\ \Omega = \omega\sqrt{(\mathcal{E} + mc^2)/(2mc^2)}$ y $\kappa = (\mathcal{E} - mc^2)/(\mathcal{E} + mc^2)$. Esta integral elíptica nos suministra la solución del oscilador armónico relativista, via las funciones elípticas de Jacobi

$$x = \sqrt{\frac{2(\mathcal{E} - mc^2)}{m\omega^2}}\ \mathrm{sn}(\phi|\kappa),$$
$$p = \sqrt{2(\mathcal{E} - mc^2)}\ \mathrm{cn}(\phi|\kappa)\ \mathrm{dn}(\phi|\kappa), \quad (47)$$

Las fórmulas para los períodos están dadas por las integrales elípticas

$$T_0 = \frac{2}{\Omega} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}},$$

$$T_1 = \frac{4}{\Omega} \int_{1}^{1/\kappa} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa y^2)}}.$$

Las soluciones (47) se reducen a las bien conocidas soluciones no relativistas del oscilador, en el límite $c \to \infty$, haciendo uso del comportamiento asintótico estándar $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} \to mc^2 + \mathcal{E}_{nr}$, donde $\mathcal{E}_{nr}$ es energía en el límite no relativista. Por tanto, el límite $c \to \infty$ corresponde a $\kappa = 0$. Notando que para $\kappa = 0$ las funciones elípticas de Jacobi se reducen a las funciones seno-coseno [13], obtenemos así las soluciones del oscilador no relativista:

$$x = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{nr}}{m\omega^2}}\ \sin(\phi),\ \ p = \sqrt{2\mathcal{E}_{nr} m}\ \cos(\phi),\ \ \phi = \omega(t - t_0).$$

5. Ecuaciones relativistas de Hamilton-Jacobi sobre la esfera

En la mecánica relativista no se cuenta con una definición del potencial, tan rigurosa, como en el caso de la mecánica de Newton. En general, existen dos versiones relativistas de definición, diferentes: el potencial es considerado como la componente temporal de un cuadrivector, o bien como un escalar de Lorentz.

Hasta ahora hemos venido describiendo el movimiento de una partícula dentro del potencial que representa la componente temporal de un cuadrivector.

Como consecuencia, la función de acción S transforma de la misma manera que la componente temporal de un cuadrivector ante las transformaciones de Lorentz.

Ahora, en cambio, procedamos a derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi del movimiento, tomando el potencial como un invariante de Lorentz.

Algo generalmente aceptado es que un potencial escalar de Lorentz se encuentra acoplado a la masa en reposo de la partícula, de tal manera que la relación relativista energía-momento viene dada como [11-13]

$$\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2 = (mc^2 + V(r))^2 = c^2 p_4^2, \quad (48)$$

donde $V(r)$ es una función invariante de Lorentz. Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo propio y tomando en cuenta las fórmulas (18), obtenemos

$$-\left(\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau}\right) = \frac{dV}{d\vec{r}}(mc^2 + V(r)) \cdot \frac{\vec{p}}{m}.$$

Con base en esta ecuación, formulemos las ecuaciones del movimiento relativista bajo el potencial escalar de Lorentz $V(r)$:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{dV}{d\vec{r}}\frac{p_4}{mc},\ \ \frac{dp_4}{d\tau} = -\left(\frac{dV}{d\vec{r}} \cdot \frac{\vec{p}}{mc}\right), \quad (49)$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{p}}{m},\ \ \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}. \quad (50)$$

Estas ecuaciones admiten dos constantes del movimiento:

$$cp_4 - V(r) = mc^2, \qquad \mathcal{E}_0^2 = p^2c^2 + c^2p_4^2.$$

Estas relaciones son equivalentes a la relación principal (48).

De (48) tomemos como valor de p_4 el definido en el cascarón esférico de radio $\mathcal{E}_0$:

$$cp_4 = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}.$$

Al introducir este valor en la primera de las Ecs. (49), obtenemos

$$\frac{mc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}}\frac{d}{d\tau}\vec{p} = \vec{U}, \qquad \vec{U} := -\frac{dV}{d\vec{r}}. \quad (51)$$

$$\vec{p} = \vec{n}\, mc\, \sinh\left(\frac{\Pi}{mc}\right), \quad \vec{\Pi} = \vec{n}\, mc\, \text{arcsinh}\left(\frac{p}{mc}\right). \quad (52)$$

A fin de construir las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, usaremos el método elaborado en la sección anterior.

Suponiendo para el vector de impulso una dependencia, tanto del tiempo propio como de las coordenadas espaciales, entonces podemos escribir, usando la Ec. (51), la derivada total con respecto al tiempo propio como sigue:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}}\frac{\partial\vec{p}}{\partial\tau} + \frac{c^2}{2\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}}\vec{\nabla}(p^2) - \frac{c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}}[\vec{p}\times[\vec{\nabla}\times\vec{p}]] + \vec{\nabla}V = 0. \quad (53)$$

Usando un método formal de integración, esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{n}\, mc\, \text{arcsin}\frac{cp}{\mathcal{E}_0}\right) + \vec{\nabla}(\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}) - \frac{c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - p^2c^2}}[\vec{p}\times[\vec{\nabla}\times\vec{p}]] + \vec{\nabla}V = 0. \quad (54)$$

Ahora introduzcamos la función de acción $S = S(r,\tau)$ como

$$\vec{\Pi} := \vec{\nabla}S = \vec{n}\, mc\, \text{arcsin}\frac{cp}{\mathcal{E}_0}. \quad (55)$$

Inversamente, el vector de impulso puede definirse mediante

$$c\vec{p} = \mathcal{E}_0\vec{n}\, \sin\left(\frac{1}{mc}|\vec{\nabla}S|\right), \quad (56)$$

donde el símbolo $|\vec{a}|$ denota la longitud de $\vec{a}$. Obsérvese que de (55) y (56) se sigue que $[\vec{\nabla}\times\vec{p}] = 0$. Introduciendo la definición (55) en la Ec. (54), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left[\frac{\partial S}{\partial\tau} + c\sqrt{(mc)^2 + p^2} + V(r)\right] = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - (cp)^2} + V(r) = f(\tau),$$

donde la functión $f(\tau)$ es ahora un invariante de Lorentz. Finalmente, tomando en cuenta (5.8), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función de acción:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \mathcal{E}_0\, \cos\left(\frac{1}{mc}|\vec{\nabla}S|\right) + V(r) = 0. \quad (57)$$

En el caso del movimiento estacionario

$$-\frac{\partial S}{\partial\tau} = mc^2.$$

6. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi en la representación de las matrices de Pauli

En la Sec. 3 dedujimos las ecuaciones de Hamilton-Jacobi sobre el hiperboloide $\mathcal{H}$, descomponiendo las ecuaciones del vector de impulso $\vec{p}$ en términos de las ecuaciones para la pareja: $\{p,\ \vec{n}\}$. Hicimos uso de la relación $p = (\vec{p}\cdot\vec{n})$, la cual, con la elección del signo apropiado, es equivalente a $p^2 = (\vec{p}\cdot\vec{n})^2$.

Debemos notar que una relación similar puede obtenerse en la representación de las matrices de Pauli. Esta base de matrices de Pauli se define como $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ con $\vec{\sigma}^2 = 1$ y $\sigma_k\sigma_l = -\sigma_l\sigma_k,\ k\neq l$, de tal forma que

$$p^2 = (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2. \quad (58)$$

En esta base de Pauli, las Ecs. (7) las escribimos como

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = -\left(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\vec{\sigma}\right)\frac{p_0}{mc},$$
$$\frac{dp_0}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left[(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\left(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\vec{\sigma}\right) + \left(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\vec{\sigma}\right)(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\right]. \quad (59)$$

De acuerdo a estas ecuaciones, podemos construir la siguiente representación para las componentes del cuadriimpulso

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = mc\, \sinh\left\{\frac{1}{mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi}\right\},$$
$$p_0 = mc\, \cosh\left\{\frac{1}{mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})\right\}, \quad (60)$$

donde $\vec{\Pi}$ queda definido como

$$(\vec{\Pi}\cdot\vec{\sigma}) = mc\, \text{arcsinh}\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}$$

y satisface la ecuación de evolución que a continuación obtendremos.

El lector debe ser cuidadoso al evaluar las derivadas de una función matricial $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})$, porque

$$\frac{dp_0}{d\tau} = Mc\,\frac{d}{d\tau}\cosh\left\{\frac{1}{mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})\right\} = Mc\, \sinh\left\{\frac{1}{mc}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})\right\}\frac{d(\vec{\sigma}\cdot\vec{\Pi})}{d\tau} = -(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{dV}{d\vec{r}}\right).$$

Esto es una contradicción, porque la parte del lado derecho depende de $\vec{\sigma}$, mientras que el lado izquierdo es un escalar. A fin de evitar esta contradicción, es necesario recordar que aquí estamos manejando una diferenciación no-conmutativa, donde x y dx no conmutan. Esto es, debemos usar la fórmula

$$d(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = d(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}))\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + (\vec{\sigma}\cdot\ \vec{p})d(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}),$$

en vez de $d(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = 2(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})d(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$. Al usar esta regla, obtenemos entonces

$$\frac{dp_0}{d\tau} = -\frac{1}{2}\left((\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{dV}{d\vec{r}}\right) + \left(\vec{\sigma}\cdot\frac{dV}{d\vec{r}}\right)(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\right)$$

$$= \left(\vec{p}\cdot\frac{dV}{d\vec{r}}\right).$$

Luego resulta

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{\Pi}\cdot\vec{\sigma}) = -\left(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\vec{\sigma}\right). \tag{61}$$

Tomando en cuenta las fórmulas (58) y (60), la ecuación de Hamilton-Jacobi (31) puede escribirse como sigue:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + mc^2\ \cosh\left\{\frac{1}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right)\right\} + V(r) = 0. \tag{62}$$

Las Ecs. (31) y (62) son equivalentes. Esto puede fácilmente verse tomando en cuenta que $\cosh(x)$ es una función par.

Como ya se señaló, la función logarítmica $\ln(p/mc)$ posee una expansión en la vecindad de $p = mc$. Por el contrario, la función logarítmica $\ln(1 \pm p/mc)$ posee una expansión en la vecindad del punto $p = 0$. Este tipo de función logarítmica aparecería en la ecuaciones de movimiento si definieramos p_0 como

$$p_0 = mc \pm (\vec{p}\cdot\vec{n}). \tag{63}$$

Esta fórmula nos sirve como prototipo de la relación operacional

$$p_0 = mc \pm (\vec{p}\cdot\vec{\sigma}),$$

la que corresponde al neutrino de derecha/izquierda con masa (ver Sec. 7).

Consideremos ahora el movimiento de un neutrino bajo un campo potencial. Este campo puede ser, por ejemplo, el campo gravitacional newtoniano, el cual aparece en algún modelo fenomenológico de la física nuclear.

Consideremos primeramente el caso $p_0 = mc - (\vec{p}\cdot\vec{n})$ (del neutrino de izquierda). La ecuación dinámica para este neutrino se obtiene de la Ec. (32) de la partícula sin masa. Usando (63) tenemos

$$mc\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}\right) = \left(\frac{dV}{d\vec{r}}\cdot\vec{\sigma}\right). \tag{64}$$

Para obtener la ecuación de Hamilton-Jacobi, como se hizo anteriormente, supondremos que $\vec{p} = \vec{p}(r,\tau)$. Entonces, la Ec. (64) puede reescribirse como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[mc\ \ln\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}\right)\right] + c\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\left[-(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\right.$$

$$\left. -mc\ \ln\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{mc})\right)\right] - \left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)V(r)=0. \tag{65}$$

Introduzcamos la función de acción mediante la relación

$$(\vec{\Pi}\cdot\vec{\sigma}) := -mc\ \ln\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}\right) = \left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}S\right). \tag{66}$$

Al substituir esta definición en la Ec. (6.8), obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + c\,(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) + mc^2\ \ln\left(1-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{mc}\right) + V(r)=0. \tag{67}$$

De (66) se cumple

$$(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) = mc(1-\exp(-\frac{(\vec{\Pi}\cdot\vec{\sigma})}{mc})).$$

Así arribamos a la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi para el neutrino de izquierda:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + mc^2\ \left(1-\exp\left\{-\frac{1}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right)\right\}\right)$$

$$-c\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right) + V(r) = 0. \tag{68}$$

De la misma forma, podemos derivar la ecuación de Hamilton-Jacobi en el caso del neutrino de derecha $p_0 = mc + (\vec{p}\cdot\vec{n})$. Obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + mc^2\ \left(\exp\left\{\frac{1}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right)\right\} - 1\right)$$

$$-c\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial S}{\partial\vec{r}}\right) + V(r) = 0. \tag{69}$$

Obsérvese que si bien $M = 0$, $m > 0$ es más que nada un parámetro dinámico de las ecuaciones.

7. Ecuaciones cuánticas relativistas sobre el hiperboloide

Haremos a continuación una generalización relativista de la ecuación de Pauli. En el esquema de cuantización de la ecuación de Schrödinger, las derivadas de la acción son reemplazadas por los correspondientes operadores diferenciales. Con base en este esquema

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau},\quad \frac{\partial S}{\partial\vec{r}} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}.$$

Al introducir esta correspondencia en nuestro formalismo, la Ec. (62) se transforma en una ecuación de onda análoga de Schrödinger, pero relativista:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi(r,\tau) = mc^2\ \cosh\left\{-i\frac{\hbar}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\right\}$$

$$\times\Psi(r,\tau) + V(r)\Psi(r,\tau). \tag{70}$$

Aquí $\Psi(\vec{r},\tau)$ se entiende como un espinor de Pauli de dos componentes.

La función de onda semiclásica se define en la forma ordinaria:

$$\Psi(r,\tau) = \rho\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(r,\tau)\right).$$

Inversamente, si introducimos esta función en la Ec. (70) y tomando el límite clásico $\hbar \to 0$, obtenemos nuevamente la Ec. (62) de Hamilton-Jacobi. Hay que notar que la Ec. (70) no depende de las matrices $\vec{\sigma}$ de Pauli. Ello es debido a que $cosh(x)$ es una función par. En un campo electromagnético externo, escribimos la ecuación análoga de Schrödinger:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} - e\Phi\right)\Psi(r,\tau) = mc^2 \times \cosh\left\{\frac{1}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)\right\}\Psi(r,\tau). \quad (71)$$

Por otro lado, podemos pasar al límite no relativista de nuestra ecuación, obtenemos entonces la ecuación de Pauli para una partícula de espín un medio, haciendo uso del límite

$$\lim_{c\to\infty}\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n.r.} + mc^2 :$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi(r,\tau) \to (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + mc^2)\Psi(r,t) + \ldots,$$

Llegando, de esta manera a la bien conocida ecuación de Pauli

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\Phi(r,t) = \frac{1}{2m} \times \left\{\left(\vec{\sigma}\cdot(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right\}^2\Phi(r,t).$$

Debemos enfatizar que la Ec. (70) es realizada sobre el cascarón positivo del hiperboloide $\mathcal{H}$. En el esquema de interpretación de Dirac, la Ec. (70) describe esclusivamente estados de partícula. Para incluir en este esquema estados de antipartícula, necesitamos considerar la parte negativa del cascarón hiperbólico $\mathcal{H}$, para el cual obtenemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi_-(r,\tau) = -mc^2\cosh\left\{-i\frac{\hbar}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\right\} \times\Psi_-(r,\tau) + V(r)\Psi_-(r,\tau). \quad (72)$$

Las Ecs. (70) y (72) juntas contienen a la ecuación de Dirac, obtenida mediante la transformación de Foldy-Wouthuysen [14,15].

Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (38), (68) y(69) dependen del vector unitario en la dirección del impulso. Recordemos que el espín de la partícula sin masa yace en la dirección del impulso. Para la partícula de espín $s = 1/2$, el valor $(\vec{n}\cdot\vec{p})$ es el autovalor del operador $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$. Así que

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\Phi_{L/R} = \pm(\vec{n}\cdot\vec{p})\Phi_{L/R},$$

donde $\Phi_{L/R}$ es una función de onda para el neutrino de izquierda/de derecha, respectivamente.

Tomando este hecho en cuenta, haremos nuevamente las mismas correspondencias cuánticas establecidas al principio de la sección, en el esquema de Schrödinger:

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \left(\vec{n}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)S \to -i\hbar\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right),$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli de espí n $1/2$. Entonces, las ecuaciones (38) de Hamilton-Jacobi dan lugar a las siguientes ecuaciones de onda cuánticas:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_{L/R} = \left[\pm mc^2\ \exp\left(\pm\frac{i\hbar}{mc}\left(\vec{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\right) + V(r)\right]\Phi_{L/R}. \quad (73)$$

Por ejemplo, para el movimiento estacionario unidimensional, la Ec. (70) se reescribe como

$$\mathcal{E}_0\Psi(r){=}mc^2\ \cosh\left\{-i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right\}\Psi(r){+}V(r)\Psi(r). \quad (74)$$

Definamos ahora el siguiente operador de diferencia-diferencial:

$$\nabla_\pm = \pm\frac{mc}{i\hbar}\left(\exp\left(\pm i\frac{\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right) - 1\right),$$

en términos del cual la Ec. (74) se reescribe como

$$(\mathcal{E}_0 - mc^2)\Phi(r){=}i\hbar c\frac{1}{2}(\nabla_+ - \nabla_-)\Phi(r){+}V(r)\Phi(r). \quad (75)$$

Por tanto, la Ec. (74), o bien Ec. (75), es una ecuación de diferencia-diferencial con un “desplazamiento” dado por $-i(\hbar/mc)$. Esta ecuación coincide con la ecuación del cuasipotencial relativista en el espacio de configuración de Kadyshevsky, Mir-Kasimov y Skachkov [6]. Posteriormente, R.Mir-Kasimov [16] elaboró un análogo del modelo del oscilador para esta ecuación de cuasipotencial unidimensional en el espacio de configuración y mostró que el modelo de oscilador de esta ecuación análoga de Schrödinger con operador de diferencia-diferencial no es otra cosa que un q-oscilador.

8. Conclusiones

Con la ayuda de las ecuaciones de Lorentz, en el esquema del tiempo propio τ, podemos construir ecuaciones de movimiento relativistas, válidas tanto para partículas masivas, como sin masa; distinguiendo entre los valores posibles para la constante del movimiento M y su relación con el parámetro m de las ecuaciones dinámicas. Dado el hecho que la dinámica relativista, a través de un potencial efectivo, es expresable como una ecuación del tipo de Newton, de igual manera, nos vimos invitados a sistematizar la generalización de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi al marco relativista. Primeramente en tiempo coordenado, luego, al incorporar el tiempo propio, según que el potencial sea considerado como un cuadrivector, o bien, como un escalar de Lorentz, formulamos las ecuaciones sobre el cascarón hiperbólico de energía o alternativamente, sobre el cascarón esférico. Luego incluimos en la generalización, la representación de las matrices de Pauli, con el objeto de incorporar el espín e incursionar en el terreno de la mecánica cuántica. Con la ayuda del esquema de Schrödinger ganamos, de la ecuación relativista obtenida de Hamilton-Jacobi, una ecuación de onda del tipo Schrödinger. Esta misma ecuación tomada doblemente, resulta equivalente a la ecuación de Dirac, a la vez que, en el límite no relativista se reduce a la ecuación de Pauli. Las ecuaciones sin masa, espín $s = 1/2$ y doble helicidad fueron aplicadas al neutrino. Notamos además fácilmente que la ecuación de onda cuántica del tipo de Schrödinger es coincidente, en el caso unidimensional, con resultados de otros trabajos, como el formalismo del cuasipotencial relativista, o bien con ecuaciones de diferencia-diferencial asociadas al q-oscilador.

∗ De visita en el Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

1. E.C.G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **14** (1941) 372.
2. L.P. Horwitz y C. Piron, *Helv. Phys. Acta* **48** (1974) 316.
3. R.E. Collins y J.R. Fanchi, *Nuovo Cimento A* **48** (1978) 314; J.R. Fanchi y R.E. Collins, *Found.Phys.* **8** (1978) 851.
4. J.R. Fanchi, *Parametrized Relativistic Quantum Theory* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1993); J.R. Fanchi, *Found. Phys.* **11** (1981) 493.
5. Young-Sea Huang, *Found. Phys.* **28** (1998) 1551.
6. V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov y N.B. Skachkov, *Nuovo Cimento A* **55** (1968) 233; V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov y N.B. Skachkov, *Physics of Elementary Particles and Atomic Nucleus* **2** (1972) 635.
7. A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, INC., New York, 1980).
8. E. Schrödinger, *Space-time structure* (Cambridge University Press, 1950).
9. A. Sommerfeld, *Atombau und Spectrallinien*, 5th edn. (Vieweg, Braunschweig 1929).
10. C.C. Yan, *Amer. J. Phys.* **52** (1984) 555.
11. R.M. Yamaleev, *Ann. Phys.* **277** (1999) 1; R.M. Yamaleev, *Ann. Phys.* **285** (2000) 141.
12. Y. Nambu *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2405.
13. N.I. Akhiezer, *Elements of the theory of the elliptic functions* (Moscow, "Nauka", 1970).
14. L.L. Foldy y S.A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78** (1950) 29.
15. J.D. Bjorken y S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics, Relativistic Quantum Fields* (McGraw Hill, 1965).
16. R.M. Mir-Kasimov *J. Phys. A* **24** (1991) 4283; E.D. Kargamanov, R.M. Mir-Kasimov y Sh.M. Nagiyev, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 1733.