

# Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica

A. Fraguera<sup>a</sup>, J. Oliveros<sup>a</sup>, L. Cervantes<sup>a</sup>, M. Morín<sup>a</sup>, and S. Gómez<sup>b</sup>

<sup>a</sup> BUAP, Puebla

<sup>b</sup> IIMAS UNAM México

e-mail: fraguera@fcfm.buap.mx, oliveros@fcfm.buap.mx,  
lcervant@fcfm.buap.mx, mmorin@ece.buap.mx,  
susanag@servidor.unam.mx

Recibido el 23 de enero de 2004; aceptado el 26 de enero de 2005

Se describe un nuevo método para resolver el problema inverso 2-D de identificación de parámetros para la reconstrucción de distribuciones de la permitividad en una sección transversal de una tubería que contiene un fluido multifásico dieléctrico, usando tomografía de capacitancia eléctrica. Este método no es iterativo y consiste en desacoplar el problema original en cinco problemas de menor complejidad, para cada uno de los cuales existen resultados que permiten su tratamiento y análisis. El método toma en cuenta características importantes del problema: su no linealidad, el mal planteamiento y la necesidad de disponer de resultados de regularización justificados teóricamente, ya que los errores en los datos podrían no permitir obtener imágenes de la sección del flujo con la precisión deseada. En este trabajo se estudian tres de los cinco problemas del método propuesto, para cada uno de los cuales se establecen resultados para los algoritmos empleados en cada uno de dichos problemas.

*Descriptores:* Tomografía de capacitancia eléctrica; identificación de distribución de permitividades; mal planteado; regularización.

A novel method is described to solve the 2D inverse parameter identification problem, for image reconstruction of permittivity distribution in the cross section of a pipeline that contain multiphase dielectric fluid, using Electrical Capacitance Tomography. This method is non-iterative and consists of the decomposition of the inverse problem in several simpler problems, each one of them can be solved with a numerically stable procedure, with the necessary theoretical justification. The method takes into account important characteristics of the problem: its non-linearity, its ill posedness and the need to perform a theoretically justified regularization because the errors in data may not allow getting the images of the cross section with all the desired precision. In this paper three of the five problems of the novel method are studied and results for algorithms used for each one are established.

*Keywords:* Capacitance tomography; identification of permittivity distribution; ill posed; regularization.

PACS: 87.63.Pn

## 1. Introducción

La tomografía de capacitancia eléctrica (TCE) ha sido probada recientemente para obtener imágenes en una sección transversal de una tubería en varios problemas industriales que involucran materiales dieléctricos. En particular, estamos interesados en visualizar una sección transversal de un flujo multifásico en tuberías, para poder determinar la distribución de permitividades y, por lo tanto, la distribución de las fases.

Cuando la tubería está compuesta de un material dieléctrico y a su alrededor se coloca un arreglo de electrodos que actúan como superficies equipotenciales, fijando uno de ellos como referencia se pueden medir las capacitancias mutuas entre dicho electrodo y los restantes. Para un electrodo arbitrario  $E$  denotemos mediante  $C_E$  la capacitancia mutua entre dicho electrodo y el electrodo de referencia. Entonces la relación entre la capacitancia  $C_E$ , la distribución de permitividades  $\varepsilon(x, y)$  y el potencial  $V$  generado por el campo de desplazamiento eléctrico, puede expresarse como

$$C_E = -\frac{1}{V} \int_S \varepsilon(z) \frac{\partial V(z)}{\partial n} ds, \quad (1)$$

donde  $S$  es la superficie del electrodo  $E$ . A partir de la Ec. (1) se obtiene una relación funcional entre las capacitancias mutuas  $C$  medidas en el arreglo de electrodos al variar el elec-

trodo de referencia y la distribución de permitividades en la sección transversal:

$$C = F(\varepsilon). \quad (2)$$

Usando esta relación es posible desarrollar métodos alternativos a fin de resolver el problema inverso de determinar la permitividad a través de las mediciones de capacitancias. Sin embargo, la solución del problema (2) tiene las siguientes dificultades:

1. Esta relación es altamente no lineal.
2. El número de mediciones de capacitancia independientes  $N(N-1)/2$ , donde  $N$  es el número de electrodos, es mucho menor que el orden de la discretización requerida para identificar la distribución de permitividades y de esta forma el problema discretizado está indeterminado, por lo cual su solución puede no ser única.
3. Cualquier método que se utilice para obtener una solución particular será inestable, debido a que este problema de identificación es sensible al error en las mediciones.

De aquí se concluye que cualquier método que intente resolver este problema debe considerar su no linealidad y debe incluir técnicas de regularización a fin de brindar una solución numéricamente estable. En la Ref. 1 se muestra el

estado del arte del problema de la TCE y se observa que los métodos que linealizan el problema, olvidando su comportamiento no lineal, han reportado resultados muy malos. Además, los métodos iterativos necesitan resolver un problema de contorno en cada iteración, lo cual resulta en un costo computacional elevado. Algunos problemas sobre la elección del parámetro de regularización, cuando este problema inverso es resuelto con el método tradicional de mínimos cuadrados para lograr el mejor ajuste entre la expresión teórica de la capacitancias y los datos experimentales, pueden hallarse en la Ref. 2. Una descripción detallada sobre la necesidad de proponer un método alternativo no iterativo para resolver este problema inverso, puede hallarse en la Ref. 3.

Este trabajo está organizado como sigue: En la Sec. 2, se describe el modelo y el problema inverso de identificación de la permitividad; en la Sec. 3 se realizan algunas suposiciones adicionales sobre las características del flujo; en la Sec. 4 se describe la nueva metodología la cual está basada en el desacoplamiento del problema original en cinco problemas, para cada uno de los cuales existe teoría suficientemente desarrollada y justificada para su tratamiento; en la Sec. 5 se efectúa una simplificación del problema al desacoplar una subregión anular del área de estudio; en la Sec. 6, se estudia el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un anillo; en la Sec. 7 se estudia el problema de recuperar la permitividad usando los resultados de los problemas anteriores del desacoplamiento y se muestra un ejemplo numérico. Las conclusiones se dan en la Sec. 8.

## 2. El modelo

En nuestro problema la configuración de la sección transversal está formada por tres círculos concéntricos que determinan tres regiones  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  (ver Fig. 1). Dentro del círculo interior  $\Omega_1$  (con radio  $R_1$ ) se tiene un flujo multifásico con una permitividad desconocida  $\varepsilon_1(x, y)$ , mientras que en las regiones anulares  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , con radios exteriores  $R_2$  y  $R_3$ , se tienen materiales con permitividades constantes y conocidas  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Se considera un arreglo de  $N$  (8 a 16) electrodos contiguos  $S_j$  colocados de manera equidistante sobre

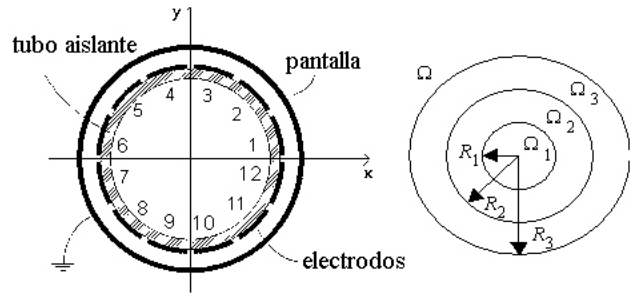


FIGURA 1.

la superficie del círculo intermedio. El potencial  $V^{(i)}$  generado en esta configuración por el campo de desplazamiento eléctrico, cuando los electrodos son considerados como superficies equipotenciales con potencial igual a uno en un electrodo de referencia  $S_i$  y con el resto de los electrodos  $S_j$ ,  $j \neq i, j \in \{1, \dots, N\}$  conectados a tierra, tiene tres componentes  $V_1^{(i)}, V_2^{(i)}$  y  $V_3^{(i)}$  asociadas, de manera natural, a cada una de las regiones  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

La pantalla se modela como una línea equipotencial circular, que corresponde a la frontera exterior de  $\Omega_3$ , con potencial igual a cero. El modelo que satisfacen los potenciales  $V_k^{(i)}, i = 1, \dots, N$  y  $k = 1, 2, 3$  es el siguiente:

$$\nabla(\varepsilon_k(z)\nabla V_k^{(i)}) = 0 \quad \text{en } \Omega_k, k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

donde  $z = (x, y)$  y se cumplen las condiciones de frontera

$$V_1^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z), \varepsilon_1(z)\frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial n_1}(z) = \varepsilon_2\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(z) \quad (4)$$

sobre  $|z| = R_1$ , donde  $n_1$  es el vector normal unitario exterior a este círculo.

Adicionalmente a las Ecs. (4), se tiene

$$V_3^{(i)}(z) = V_2^{(i)}(z) = \psi_i \quad \text{en } |z| = R_2$$

$$\text{y } V_3^{(i)}(z) = 0 \quad \text{en } |z| = R_3. \quad (5)$$

donde  $\psi_i$  es una función definida sobre  $|z| = R_2$  que, en coordenadas angulares, tiene la expresión

$$\psi^{(i)}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2}, \\ \frac{\theta - \theta_i^-}{\theta_0} + 1 & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}, \\ \frac{\theta_i^+ - \theta}{\theta_0} + 1 & \text{si } \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2} < \theta \leq \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{2\pi i}{N} + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta; \end{cases} \quad (6)$$

con

$$\theta_i^- = \frac{2\pi(i-1)}{N} + \frac{\theta_0}{2}$$

y

$$\theta_i^+ = \frac{2\pi i}{N} - \frac{\theta_0}{2}.$$

La capacitancia mutua entre el  $i$ -ésimo electrodo, considerado como electrodo de referencia, y el  $j$ -ésimo electrodo con  $j \neq i$ , está dada por

$$C_{i,j} = K \int_{S_j} \varepsilon(z) \frac{\partial V^{(i)}}{\partial n_2} ds, \tag{7}$$

donde  $n_2$  es el vector unitario normal exterior al círculo de radio  $R_2$  y  $K$  es una constante con unidades de potencial inverso. Se observa que es posible obtener de (7) la relación

$$\nu_{ij} \stackrel{def}{=} \int_{S_j} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} ds = \frac{1}{\varepsilon_2} \left\{ \varepsilon_3 \int_{S_j} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n_2} ds - \frac{C_{i,j}}{K} \right\}. \tag{8}$$

Del hecho de que  $C_{i,j} = C_{j,i}$  y que, como veremos en la Sec. 4, el cálculo de  $V_3^{(i)}$  puede realizarse de forma independiente en el modelo (3)-(5), se considera el problema inverso de la manera siguiente:

Dados los  $1/2N(N-1)$  valores  $\nu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) ( $i < j$ ), obtenidos usando los datos de capacitancias (7), determinar de forma aproximada el valor de  $\varepsilon_1(x, y)$  teniendo en cuenta el modelo (3)-(5).

### 3. Suposiciones adicionales

El método tradicionalmente usado para resolver el problema inverso de identificación consiste en minimizar un funcional de mínimos cuadrados no lineales que depende de  $\varepsilon_1$ , donde se minimiza la diferencia entre los valores teóricamente calculados y las mediciones experimentales de las capacitancias mutuas.

La principal desventaja de esta metodología es que en cada paso de la iteración para resolver el problema de minimización debe resolverse un problema de contorno del tipo (3)-(5), lo cual implica un alto costo computacional. Por otra parte, debido a la no linealidad del funcional que debe minimizarse y al mal planteamiento del problema de identificación, no hay un criterio fundamentado para obtener una solución numérica estable de este proceso de optimización, cuando no hay información *a priori* sobre el tipo de flujo [2].

Por esta razón, en el presente trabajo se propone un nuevo método, el cual utiliza un algoritmo no iterativo, bajo la suposición adicional de que el campo de desplazamiento eléctrico  $J^{(i)} = \varepsilon_1 \nabla V_1^{(i)}$  es irrotacional. Esta condición puede ser considerada como un criterio práctico aceptable para la aplicación de interés en este trabajo, ya que la misma significa que el régimen de flujo no tiene líneas de corriente espirales lo cual ocurre en el caso del flujo de petróleo en tuberías

durante el proceso de extracción [4]. Con esta suposición se obtiene la relación [3]:

$$\varepsilon_1^i(z) \left| \nabla V_1^{(i)} \right| = \frac{\varepsilon_2}{\pi} \left| \int_{|\xi|=R_1} \frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_1}(\xi) \nabla_z (\ln |z - \xi|) ds_\xi \right|, \tag{9}$$

la cual indica que para cada juego de mediciones con un solo electrodo de referencia  $i$ -ésimo, se identifica un único valor de la permitividad  $\varepsilon_1^i(z)$ , siempre que  $V_1^{(i)}$  y  $V_2^{(i)}$  sean conocidos. Posteriormente, al variar el electrodo de referencia se pueden utilizar diferentes procesos de ajuste para estimar el valor de  $\varepsilon_1(z)$  que mejor aproxime a todos  $\varepsilon_1^i(z)$ , calculados mediante la fórmula (9). En la Sec. 4 se describe cómo obtener  $V_1^{(i)}$  y  $V_2^{(i)}$  en este nuevo método y en la Sec. 7 se muestran ejemplos de cómo obtener una representación gráfica de  $\varepsilon_1(z)$  en una sección transversal de la tubería utilizando (9) para un juego de mediciones de capacitancias mutuas calculadas con un único electrodo de referencia.

### 4. Descripción del método

En el nuevo método se calcula primero  $V_3^{(i)}$ , después  $V_2^{(i)}$  para obtener finalmente  $V_1^{(i)}$ , lo cual permite el cálculo de la distribución de permitividades deseada  $\varepsilon_1$  a través de la relación secundaria dada por (9). El método consiste en los pasos siguientes:

- a) Obtener  $V_3^{(i)}$  en  $\Omega_3$  resolviendo un problema de contorno para la Ec. (3) con  $j = 3$  en el anillo  $R_2 \leq |z| \leq R_3$  y las condiciones de contorno de Dirichlet (5) para  $V_3^{(i)}$ . En la Sec. 5, usando series de Fourier, se calcula  $V_3^{(i)}$  junto con el valor de

$$\int_{S_j} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n_2} ds.$$

- b) Obtener un valor aproximado de

$$\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2}$$

sobre el círculo  $|z| = R_2$  usando un algoritmo de interpolación estable como el indicado en la Ref. 5 a partir de los datos conocidos  $\nu_{i,j}$  dados en (8).

- c) Usando los valores calculados de

$$\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2}$$

en el inciso anterior y la expresión de  $\psi_i$  sobre el círculo de radio  $R_2$ , se resuelve un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en la región anular  $\Omega_2$  con el objetivo de obtener el valor de  $V_2^{(i)}$ .

d)  $V_1^{(i)}$  es obtenido a través de un método variacional usando una base conveniente  $\beta = \{W_{nm}^1, W_{nm}^2\}$  de funciones en el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega_1)$  junto con la expresión obtenida de  $V_2^{(i)}$  en c) y teniendo en cuenta las condiciones de frontera (4). Los primeros  $M$  coeficientes del desarrollo en serie de  $V_1^{(i)}$  con respecto a la base  $\beta$  se obtienen resolviendo un problema de mínimos cuadrados lineales que se deduce a partir de un sistema de ecuaciones integrales equivalente al problema (3) para  $j = 1$  con las condiciones de contorno (4) [7]. El problema de mínimos cuadrados se resuelve sujeto a restricciones cuadráticas, las cuales dependen de la información *a priori* sobre las cotas para  $\varepsilon_1$ . El número  $M$  se determina en función del error de medición [7]. El funcional asociado a este problema de optimización tiene la forma siguiente:

$$f_i(x) = |A^{(i)}x|^2 + |Bx - b^{(i)}|^2 + |Cx - d^{(i)}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{10}$$

con restricciones cuadráticas, donde las matrices  $A^{(i)}$  y los vectores  $b^{(i)}$  y  $c^{(i)}$  dependen de los datos de capacitancia, mientras que las matrices  $B$  y  $C$  no dependen de ellos [7]. El vector  $x$  está formado por los coeficientes desconocidos del potencial  $V_1^{(i)}$  en la base  $\beta$  [7].

e) Una vez que  $V_1^{(i)}$  ha sido obtenido, el cálculo de  $\varepsilon_1^{(i)}$  puede hacerse analíticamente a través de (9), lo cual está en dependencia de los valores obtenidos para  $V_1^{(i)}$  y  $V_2^{(i)}$ , respectivamente. Se muestran ejemplos de recuperación de  $\varepsilon_1(z)$  en la Sec. 7 de este trabajo.

### 5. Sobre el desacoplamiento del potencial $V_3^{(i)}$

Para desacoplar el potencial  $V_3^{(i)}$  basta observar que éste satisface el problema

$$\begin{aligned} \Delta V_3^{(i)} &= 0 \quad \text{en } \Omega_3, \\ V_3^{(i)} &= 0 \quad |z| = R_3 \quad \text{y} \\ V_3^{(i)} &= \psi_i \quad |z| = R_2 \end{aligned}$$

si  $V_3^{(i)}$  se expresa en coordenadas polares en la forma

$$\begin{aligned} V_3^{(i)}(r, \theta) &= a_0^{(i)} + b_0^{(i)} \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(i)} r^k + b_k^{(i)} r^{-k}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^{(i)} r^k + d_k^{(i)} r^{-k}) \sin k\theta, \end{aligned}$$

entonces, después de realizar las manipulaciones adecuadas, se encuentra que

$$\begin{aligned} \int_{S_j^+} \frac{\partial V_3^{(i)}}{\partial n_2} d_s &= \hat{a}_0 \ln \left( \frac{R_3}{R_2} \right) - \hat{b}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} R_k \sin \left( \frac{k\theta_0}{2} \right) \\ &\times \sin \left( \frac{k\pi}{N} \right) \sin k \left( \frac{\pi}{N} - \frac{\theta_0}{2} \right) \cos \left( \frac{2k(i-j)\pi}{N} \right), \end{aligned}$$

donde

$$R_k = \frac{R_3^{2k} + R_2^{2k}}{R_3^{2k} - R_2^{2k}}, \quad \hat{a}_0 = \frac{1}{N} (2\pi - \theta_0) \quad \text{y} \quad \hat{b}_0 = \frac{8}{\pi\theta_0}.$$

Esta expresión se calcula una vez y puede sustituirse en (8). De esta forma, el método propuesto permite reducir el problema de identificación al cálculo de  $V_1^{(i)}$  y  $V_2^{(i)}$  para posteriormente obtener  $\varepsilon_1^i(z)$  a partir de la fórmula (9).

### 6. El problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en el anillo circular

De acuerdo con el inciso c) de la Sec. 4, el tercer problema que debe resolverse para poder aplicar el algoritmo propuesto es un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un anillo circular, a saber, hallar la función  $V_2^{(i)}$  que satisfaga el siguiente problema de contorno:

$$\Delta V_2^{(i)} = 0 \quad \text{en } \Omega_2 \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2} = \phi^{(i)}, \quad V_2^{(i)} = \psi^{(i)} \quad \text{en } |z| = R_2 \tag{12}$$

donde  $\phi^{(i)}$  representa el valor recuperado de

$$\frac{\partial V_2^{(i)}}{\partial n_2}$$

por medio del proceso de interpolación indicado en el inciso b) de la Sec. 4.

El problema (11)-(12) es un problema mal planteado [8] y por ello su solución es sensible al error cometido en la determinación de  $\phi^{(i)}$ . Buscaremos la solución de (11)-(12) como la suma de las soluciones de los problemas siguientes:

$$\Delta \tilde{u}_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n_2} &= \phi^{(i)} \quad \text{en } |z| = R_2, \\ \tilde{u}_2 &= 0 \quad \text{en } |z| = R_1, \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

$$\Delta \bar{u}_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \tag{15}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial n_2} &= 0 \quad \text{en } |z| = R_2, \\ \bar{u}_2 &= f \quad \text{en } |z| = R_1, \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

donde  $f$  debe elegirse de manera que  $\tilde{u}_2 + \bar{u}_2 = \psi^{(i)}$  en  $|z| = R_2$ .

El problema (13)-(14) es un problema bien planteado [8]. De hecho si denotamos la serie de Fourier de  $\phi^{(i)}$  mediante

$$\phi^{(i)} = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k^1 \cos k\theta + h_k^2 \sin k\theta,$$

entonces la solución de (13)-(14) está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 = a_0 + b_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k r^k + \tilde{b}_k r^{-k}) \cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{c}_k r^k + \tilde{d}_k r^{-k}) \sin k\theta, \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= -h_0 R_2 \ln(R_1), & b_0 &= h_0 R_2, \\ \tilde{a}_k &= \frac{h_k^1 R_1^{-k+1}}{D_k}, & \tilde{b}_k &= -\frac{h_k^1 R_1^{k+1}}{D_k}, \\ \tilde{c}_k &= \frac{h_k^2 R_1^{-k+1}}{D_k}, & \tilde{d}_k &= -\frac{h_k^2 R_1^{k+1}}{D_k}, \\ D_k &= k [R_1^k R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Por otra parte, existe un operador lineal

$$K : L_2(|z| = R_1) \rightarrow L_2(|z| = R_2)$$

tal que

$$K(f) = g = \psi^{(i)} - h, \quad (19)$$

donde

$$g = \tilde{u}_2|_{|z|=R_2} \quad \text{y} \quad h = \tilde{u}_2|_{|z|=R_2}.$$

Una vez obtenida la solución  $f$  de (19), se debe resolver el problema de contorno (15)-(16) y la solución del problema de Cauchy (11)-(12) se expresa en la forma  $V_2^{(i)} = \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2$ .

El operador  $K$  está bien definido, es inyectivo y compacto. Para ver esto último basta notar que  $K$  es el operador que a cada condición de contorno  $f$  sobre  $|z| = R_1$  le asocia la traza sobre  $|z| = R_2$  de la solución  $u \in H^1(\Omega_2)$  del problema (15)-(16). De los resultados conocidos sobre operadores compactos, se tiene que el operador inverso  $K^{-1}$  no es continuo y, por lo tanto, resolver la Ec. (19) es un problema mal planteado. Describamos el operador  $K$  usando series de Fourier.

Supongamos que

$$f(\theta) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \sin k\theta$$

con

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \langle f, 1 \rangle_{L_2}, & f_k^1 &= \frac{1}{\pi} \langle f, \cos k\theta \rangle_{L_2} \\ \text{y} & & f_k^2 &= \frac{1}{\pi} \langle f, \sin k\theta \rangle_{L_2}. \end{aligned}$$

La solución del problema (15)-(16) está dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(r, \theta) &= \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{a}_k r^k + \bar{b}_k r^{-k}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{c}_k r^k + \bar{d}_k r^{-k}) \sin k\theta, \quad (20) \\ \bar{a}_0 &= f_0, & \bar{a}_k &= \frac{2f_k^1 R_2^{-k}}{E_k}, & \bar{b}_k &= \frac{2f_k^1 R_2^k}{E_k}, \\ \bar{c}_k &= \frac{2f_k^2 R_2^{-k}}{E_k}, & \bar{d}_k &= \frac{2f_k^2 R_2^k}{E_k}, \\ E_k &= R_2^k R_1^{-k} + R_1^k R_2^{-k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20) y evaluando en  $r = R_2$  se obtiene

$$g = f_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^1}{E_k} \cos k\theta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k^2}{E_k} \sin k\theta, \quad (22)$$

con lo cual describimos la acción del operador  $K$  sobre  $f$ , ya que se han expresado los coeficientes de Fourier de  $g$  en términos de los de  $f$ . De (22) se obtiene que los coeficientes de Fourier  $g_0, g_k^1$  y  $g_k^2$  de  $g$  permiten determinar los respectivos coeficientes de  $f$  por medio de las relaciones

$$f_0 = g_0, \quad f_k^1 = \frac{E_k g_k^1}{2}, \quad f_k^2 = \frac{E_k g_k^2}{2}, \quad (23)$$

en el caso en que la Ec. (19) tenga solución.

El operador inverso  $K^{-1}$  queda definido a partir de (23). En nuestro caso  $g = \psi^{(i)} - h$ , donde los coeficientes de Fourier de  $h$  se determinan por medio de la expresión en serie de  $\tilde{u}_2|_{|z|=R_2}$ , obteniéndose

$$h = \tilde{h}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k^2 \sin k\theta, \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0 &= -h_0 R_2 \ln(R_1) + h_0 R_2 \ln(R_2), \\ \tilde{h}_k^1 &= \frac{h_k^1 R_1^{-k+1} R_2^k - h_k^1 R_1^{k+1} R_2^{-k}}{D_k}, \\ \tilde{h}_k^2 &= \frac{h_k^2 R_1^{-k+1} R_2^k - h_k^2 R_1^{k+1} R_2^{-k}}{D_k}, \\ D_k &= k [R_1^k R_2^{-k} + R_2^k R_1^{-k}] = k E_k \end{aligned} \quad (25)$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier  $\tilde{g}_0, \tilde{g}_k^1$  y  $\tilde{g}_k^2$  de  $\psi^{(i)}$  se obtienen por cálculos directos y usando (24) y (25) se encuentran finalmente para los coeficientes de Fourier de  $g$  las relaciones siguientes.

Sustituyendo (25)-(26) y (27) en (24) encontramos los coeficientes de Fourier para  $g = \tilde{g} - \tilde{h}$ :

$$\begin{aligned}
 g_0 &= \tilde{g}_0 - h_0 R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}, \\
 g_k^1 &= \frac{D_k \tilde{g}_k^1 + h_k^1 R_1^{k+1} R_2^{-k} - h_k^1 R_1^{-k+1} R_2^k}{2k}, \\
 g_k^2 &= \frac{D_k \tilde{g}_k^2 + h_k^2 R_1^{k+1} R_2^{-k} - h_k^2 R_1^{-k+1} R_2^k}{2k}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora (26) y (23) en (21) obtenemos los coeficientes de la serie de Fourier (20) de  $\bar{u}_2$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_0 &= \tilde{g}_0 - h_0 R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}, \\
 \bar{a}_k &= \frac{D_k \tilde{g}_k^1 R_2^{-k} + h_k^1 R_1^{k+1} R_2^{-2k} - h_k^1 R_1^{-k+1} R_2^{2k}}{2k}, \\
 \bar{b}_k &= \frac{D_k \tilde{g}_k^1 R_2^k + h_k^1 R_1^{k+1} - h_k^1 R_1^{-k+1} R_2^{2k}}{2k}, \\
 \bar{c}_k &= \frac{D_k \tilde{g}_k^2 R_2^{-k} + h_k^2 R_1^{k+1} R_2^{-2k} - h_k^2 R_1^{-k+1} R_2^{2k}}{2k}, \\
 \bar{d}_k &= \frac{D_k \tilde{g}_k^2 R_2^k + h_k^2 R_1^{k+1} - h_k^2 R_1^{-k+1} R_2^{2k}}{2k}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Sumando (18) y (27) se obtienen los coeficientes de Fourier de la solución del problema de Cauchy (11)-(12).

Finalmente, a partir de las condiciones de solubilidad débil de los problemas de contorno (13)-(14) y (15)-(16), obtenemos el resultado siguiente:

La condición sobre  $\phi^{(i)}$  y  $\psi^{(i)}$  para que exista la solución débil del problema de Cauchy (11)-(12) en el espacio de Sobolev  $H^1(\Omega_1)$  es que

$$\phi^{(i)} \in L_2(|z| = R_2), \quad f \in H^{1/2}(|z| = R_1) \quad (28)$$

donde los coeficientes de Fourier  $f_0, f_k^1$  y  $f_k^2$  de  $f$  se representan a través de los coeficientes de Fourier  $g_0, g_k^1$  y  $g_k^2$  de  $g$  por medio de (23) y estos últimos están dados por las fórmulas (26) que dependen de los coeficientes de Fourier de las condiciones de contorno  $\phi^{(i)}$  y  $\psi^{(i)}$ . Si (28) se cumple entonces la solución del problema de Cauchy (11)-(12) se expresa como la suma de las soluciones de los problemas de contorno (13)-(14) y (15)-(16).

De esta forma se ha encontrado la expresión explícita de la solución del problema de Cauchy (11)-(12) usando series de Fourier.

### 7. Un ejemplo de la recuperación de $\varepsilon_1$ a través de la Ec. (9)

En esta sección se muestra un ejemplo sintético para ver la efectividad de la fórmula (9) para obtener la permitividad cuando ya se obtuvieron de manera aproximada los potenciales  $V_1$  y  $V_2$ . Para ello se construye una solución  $V_1, V_2$  del

problema (3)-(4), donde  $\varepsilon(r, \theta)$  y  $\varepsilon_2$  se eligen apropiadamente y por simplicidad, sobre la frontera  $|z| = R_2$  se toma una condición de contorno para  $V_2$  diferente de  $\psi^{(i)}$ . El caso en el cual  $\varepsilon_1$  es constante y los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  son conocidos ha sido presentado en la Ref. 3.

Para construir el ejemplo se toma

$$\varepsilon_1(r, \theta) = V_1(r, \theta) = (2 - r^2 R_1^{-2} \cos(2\theta))^{\frac{1}{2}},$$

$\varepsilon_2 = 1, R_1 = 1$  y  $R_2 = 1.1$ . En este caso, se cumple que  $\nabla \times (V_1 \nabla V_1) = 0$ , es decir, el vector de desplazamiento eléctrico cumple la condición de irrotacionalidad requerida en la Sec. 3.

Para la elección del potencial  $V_2$ , se supone que

$$\begin{aligned}
 V_2(r, \theta) &= \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^N (\hat{a}_k r^k + \hat{b}_k r^{-k}) \cos k\theta \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N (\hat{c}_k r^k + \hat{d}_k r^{-k}) \sin k\theta
 \end{aligned}$$

y usando las condiciones de contorno (4) se encuentra que  $\hat{a}_0 = a_0$  y que  $\hat{a}_k, \hat{b}_k, \hat{c}_k, \hat{d}_k$  satisfacen los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \hat{a}_k R_1^k + \hat{b}_k R_1^{-k} &= a_k \\ \hat{a}_k R_1^{k-1} - \hat{b}_k R_1^{-k-1} &= 0 \end{aligned} \right\} k \neq 2 \\
 \hat{a}_2 R_1^2 + \hat{b}_2 R_1^{-2} &= a_2, \\
 \hat{a}_2 R_1 - \hat{b}_2 R_1^{-3} &= -\frac{1}{2R_1}, \\
 \hat{c}_k R_1^k + \hat{d}_k R_1^{-k} &= b_k, \\
 \hat{c}_k R_1^{k-1} - \hat{d}_k R_1^{-k-1} &= 0, \quad (29)
 \end{aligned}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \langle V_1 |_{r=R_1}, \cos k\theta \rangle |_{L_2(|z|=R_1)}$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi} \langle V_1 |_{r=R_1}, \sin k\theta \rangle |_{L_2(|z|=R_1)},$$

para  $k \geq 0$  son los coeficientes de Fourier de  $V_1|_{|z|=R_1}$ .

Para recuperar  $\varepsilon_1$  mediante la fórmula (9), en este ejemplo consideramos dos casos:

1. Tomando la expresión exacta para  $V_1$  y una expresión aproximada de la serie de Fourier de  $V_2$  con  $k = 0, 1, \dots, 20$  términos que se calculan por medio de (29). Como condición de contorno  $\hat{\psi}$  sobre la frontera  $|z| = R_2$  se ha tomado la restricción de  $V_2$  obtenido de esta forma a dicha frontera. Los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  han sido calculados usando las fórmulas de cuadratura de Lobato (de MATLAB).
2. Agregando a los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  obtenidos en el caso anterior, un error del orden de  $10^{-2}$  y obteniendo los coeficientes aproximados para  $V_2$  resolviendo el sistema correspondiente (29).

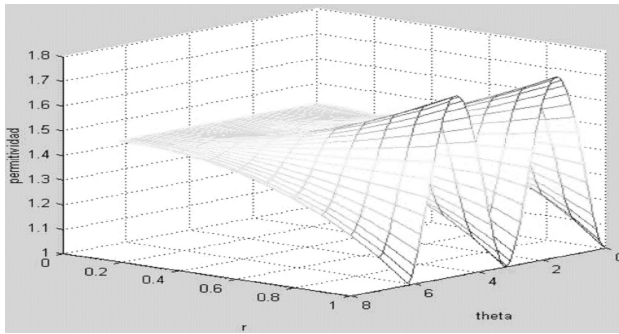


FIGURA 2. Permitividad exacta.

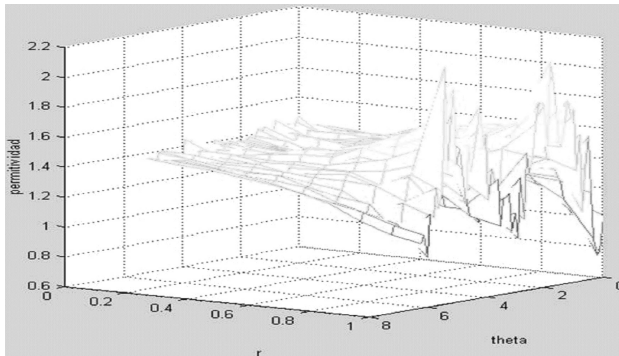


FIGURA 3. Permitividad recuperada por medio de la Ec. (9) para datos con error.

Posteriormente se recobra la permitividad, en ambos casos por medio de (9). En las Figs. 1 y 2 se muestra la permitividad exacta y la recuperada a través de (9), para datos con error.

Para el caso 1 la permitividad recuperada coincide con la exacta y en este caso el error relativo es igual a cero.

En el caso 2 se observa la influencia del error en la permitividad recuperada. En este caso se calcula el error relativo con la norma uniforme, es decir, mediante la fórmula siguiente:

$$E_{rel} = \max_{i,j} \left| \frac{\varepsilon_{1,recuperada}^{i,j}}{\varepsilon_{1,exacta}^{i,j}} - 1 \right|,$$

donde los índices  $i, j$  representan los nodos de la red en los que ha sido efectuado el cálculo de  $\varepsilon_1$ . En este caso  $E_{rel} = 0.34$ . Se concluye de estos ejemplos que debe incluirse técnicas de regularización en el proceso de identificación de la permitividad.

## 8. Conclusiones

1. Este método permite la descomposición del problema inverso en varios problemas más simples, y cada uno de ellos puede resolverse de forma numéricamente estable con la justificación teórica necesaria y no es necesario resolver el problema directo en cada iteración.
2. Se ha establecido un algoritmo para encontrar la solución del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en el anillo circular usando series de Fourier. El estudio del efecto del error en las mediciones sobre la solución encontrada se estudiará en trabajos posteriores. También se muestra, a través de un ejemplo, que la fórmula (9) permite recuperar la permitividad en forma aproximada. De esta forma, el primero, tercero y quinto problema del método propuesto han sido estudiados en este trabajo. En trabajos futuros se estudiarán tanto el segundo como el cuarto problema b) y d) de la Sec. 4 de este método.

1. W. Yang, *Meas. Sci. Technol.* **14** (2003) R1.
2. S. Gomez, M. Ono, C. Gamio y A. Fraguera, *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier **46** (2003) 197.
3. A. Fraguera, J. Oliveros y S. Gomez, *Proceedings of the 3<sup>RD</sup> World Congress of Industrial Process Tomography*, Banff Canada (2003) 864.
4. F. Garaicochea, C. Bernal y O. Lopez, *Transporte de petróleo por ductos*, Colegio de Ingenieros Petroleros de México A.C. (1991).
5. A. Grebennikov, (2002). Local regularization algorithms of solving coefficients inverse problems for some differential equations. 4<sup>th</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering, Rio de Janeiro, Brazil.
6. V.P. Mijailov, *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Moscú: Mir. (1978)
7. A. Fraguera, C. Gamio y D. Hinstroza, *WSEAS Transactions on Systems* **1** (2002) 130.
8. F. Berntsson y E. Lars, *Inverse Problems* **17** (2001) 839.