Solitones en la teoría Einstein–Maxwell–dilatón–axión

A. Herrera–Aguilar
Theoretical Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki,
54006 Thessaloniki, Greece,
e
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Edificio C–3, Ciudad Universitaria, 58040 Morelia, Mich., México

J.O. Téllez–Vázquez
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Edificio C–3, Ciudad Universitaria, 58040, Morelia, Mich., México

Recibido el 10 de junio de 2004; aceptado el 28 de septiembre de 2005

En el presente trabajo de investigacón se obtienen soluciones solitónicas por medio de dos de las técnicas no lineales más exitosas de la física moderna: el método de dispersión inversa y la aplicación de simetrías de Lie–Bäcklund. Se muestra que dichas técnicas pueden ser implementadas en el marco de la teoría efectiva de cuerdas heteróticas a bajas energías en cuatro dimensiones denominada teoría Einstein–Maxwell–dilatón–axión. De esta manera se obtiene una solución solitónica exacta para la ecuación de campo de la matriz quiral P, que involucra la componente g_{tt} del tensor métrico, el campo escalar dilatónico y un campo eléctrico, a partir del espaciotiempo plano. Posteriormente se aplica una simetría no lineal de toda la teoría efectiva sobre este solitón para generar una nueva configuración de campo que también involucra el campo pseudoescalar denominado axión, un campo magnético y la componente $g_{t\phi}$ de la métrica (ésta, a su vez, genera la rotación del campo gravitatorio). Se analizan algunas propiedades de dichas configuraciones solitónicas.

Descriptores: Solitones; método de dispersión inversa; transformaciones no lineales de Lie–Bäcklund; teoría de cuerdas heteróticas a bajas energías.

In the present research work we obtain solitonic solutions by means of two of the most successful nonlinear techniques of the modern physics: the inverse scattering method and the application of Lie–Bäcklund symmetries. We show that these techniques can be applied in the framework of the four–dimensional low–energy effective field theory of the heterotic string better known as Einstein–Maxwell–dilaton–axion theory. Thus, we obtain an exact soliton solution for the field equation of the chiral matrix P, which involves the g_{tt}–component of the tensor field, the dilaton and a electric field, starting from pure flat space–time. We further apply a nonlinear symmetry of the full effective theory on this soliton solution in order to generate a new field configuration which also involves the pseudoscalar field axion, a magnetic field and the $g_{t\phi}$–component of the metric tensor (which describes gravitational rotation). We analize as well some properties of these solitonic configurations.

Keywords: Solitons; inverse scattering method; nonlinear Lie–Bäcklund transformations; low–energy heterotic string theory.

PACS: 11.10.Lm; 04.50.+h; 11.30.Rd

1. Introducción

Los solitones son soluciones clásicas de ecuaciones de campo no lineales que poseen energía finita, densidad de energía localizada y que viajan con una velocidad uniforme sin dispersión. De este modo, se habla de soluciones solitónicas si inicialmente tenemos un número arbitrario n de dichas soluciones ampliamente separadas, para tiempos asintóticamente negativos ($t \longrightarrow -\infty$), que se aproximan con una velocidad constante y sin deformarse, que chocan e interactúan durante un intervalo de tiempo finito Δt para, finalmente, separarse asintóticamente ($t \longrightarrow +\infty$) después de la colisión como paquetes de onda que conservan su forma y velocidad iniciales [1].

Por el hecho de que los solitones constituyen paquetes de energía localizados que se mueven uniformemente y no se disipan, éstos parecen partículas extendidas, a pesar de ser soluciones de ecuaciones de onda no lineales. Además las soluciones solitónicas están caracterizadas por cierto índice topológico relacionado con su comportamiento en el infinito. Dicho índice resulta ser una cantidad que se conserva, y para la versión cuántica de la teoría, resulta ser un número cuántico que caracteriza el estado del solitón y que también se conserva. Uno de los métodos más eficaces en la construcción de solitones es el método de dispersión inversa, con su ayuda se ha construido la solución multisolitónica del modelo Sine-Gordon.

El método de dispersión inversa fue generalizado para el caso de la teoría general de la relatividad, en la que el campo gravitatorio posee una naturaleza tensorial [2, 3]. Por tal razón, las propiedades de los solitones de campos gravitatorios son muy distintas de las propiedades de los solitones de campos escalares o vectoriales [4]. Recientemente dicho método ha sido implementado en el marco de teorías efectivas de supercuerdas a nivel clásico [7-14], sin embargo, las investigaciones en esta dirección aún tienen un carácter incipiente, presentan algunas dificultades y deben ser desarrolladas en un futuro cercano.

Entre las dificultades mencionadas con anterioridad se encuentra la dimensionalidad de las matrices quirales que parametrizan los campos de la teoría en cuestión, así como el hecho de que dicha matriz deba pertenecer a determinado grupo de simetría. De este modo, como consecuencia de que la dimensionalidad de las matrices quirales que representan una teoría dada sea mayor que 2, el número de condiciones de frontera impuestas a los solitones construidos por medio del método de dispersión inversa se ve incrementado. Por otro lado, suele suceder con frecuencia que estas matrices quirales también pertenecen a, o poseeen, cierto grupo de simetrías, hecho que impone más condiciones que deben ser satisfechas por los solitones obtenidos. Sin duda alguna, estas condiciones restringen fuertemente las configuraciones de campo solitónicas y en algunos casos las reducen a soluciones triviales, es decir, al espaciotiempo plano [11, 14].

El presente artículo está abocado a la construcción de soluciones solitónicas clásicas en el marco de un modelo tetradimensional de la teoría de cuerdas heteróticas a bajas energías mejor conocido como teoría Einstein–Maxwell–dilatón–axión (EMDA). Dichos solitones se obtienen haciendo uso de dos técnicas no lineales de generación de soluciones exactas: el método de dispersión inversa y la aplicación de las transformaciones de Lie-Bäcklund.

De este modo, en la Sec. 2 se realiza una breve exhibición del método de dispersión inversa y de las condiciones que involucra su aplicación en el contexto de la teoría general de la relatividad. En la Sec. 3 se introduce la teoría efectiva de cuerdas heteróticas a bajas energías (EMDA), se considera su límite estacionario y su parametrización en términos de la matriz quiral M. Posteriormente, para poder implementar el método de dispersión inversa se impone también la simetría axial a los campos de la teoría. Por otro lado, también se presenta una parametrización de la teoría efectiva a nivel estacionario en términos de un solo potencial matricial complejo Z. Con ayuda de este potencial se muestra que la teoría es invariante bajo las transformaciones no lineales de tipo Lie-Bäcklund. Finalmente, se introduce una representación compleja de los potenciales de la teoría en la que éstos se transforman de manera lineal bajo la acción del grupo de simetrías de carga. En la Sec. 4 se procede a generar soluciones solitónicas haciendo uso tanto del método de dispersión inversa como de la aplicación de las simetrías de Lie-Bäcklund. Asimismo se analizan ciertas propiedades físicas de los solitones obtenidos. En la Sec. 5 se presentan algunas conclusiones y algunas líneas de investigación que surgen de manera natural del presente artículo.

2. El método de dispersión inversa en la relatividad general

En esta sección daremos una breve introducción al método de dispersión inversa en general para, posteriormente, formularlo en el marco de la teoría general de la relatividad para espaciotiempos estacionarios con simetría axial.

Dicho método consiste principalmente de dos pasos: en el primero de ellos, dada una ecuación no lineal, el problema consiste en hallar un conjunto de ecuaciones lineales diferenciales (ecuaciones espectrales) cuyas condiciones de integrabilidad constituyan precisamente la ecuación no lineal a resolver. El segundo paso consiste en hallar la clase de soluciones solitónicas de las ecuaciones espectrales. Resulta que dada una solución particular de la ecuación no lineal, se pueden generar nuevas soluciones solitónicas mediante operaciones puramente algebraicas.

En el caso de la teoría general de la relatividad, las ecuaciones de Einstein en el vacío se pueden escribir de tal manera que constituyan las condiciones de integrabilidad de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales para las cuales se formula el problema de dispersión inversa. El desarrollo de dicho método ha mostrado que la mayoría de las ecuaciones bidimensionales conocidas pueden ser representadas como las condiciones consistentes de integrabilidad de las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\psi_{,z} = U^{(1)}\psi, \qquad \psi_{,t} = V^{(1)}\psi, \tag{1}$$

donde las matrices $U^{(1)}$ y $V^{(1)}$ dependen racionalmente del parámetro espectral complejo λ y de dos coordenadas espaciotemporales z y t (del mismo modo que la matriz columna ψ), es decir, de la siguiente forma:

$$U^{(1)}_{,t} - V^{(1)}_{,z} + U^{(1)}V^{(1)} - V^{(1)}U^{(1)} = 0. \tag{2}$$

Esta condición debe cumplirse para todos los valores de λ; precisamente este requerimiento coincide con la ecuación diferencial (integrable) que se debe resolver. En este punto debemos mencionar que desde el punto de vista matemático, la naturaleza física de las variables z y t en las Ecs. (1) es completamente irrelevante y podemos interpretarlas como sea conveniente. En términos de las coordenadas del cono de luz

$$\sigma \equiv (z+t)/2, \qquad \rho \equiv (z-t)/2,$$

las Ecs. (1) y (2) adoptan la forma siguiente:

$$\psi_{,\sigma} = U^{(2)}\psi, \qquad \psi_{,\rho} = V^{(2)}\psi, \tag{3}$$

y

$$U^{(2)}_{,\rho} - V^{(2)}_{,\sigma} + U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = 0, \tag{4}$$

respectivamente, donde

$$U^{(2)} = U^{(1)} + V^{(1)}$$

y

$$V^{(2)} = U^{(1)} - V^{(1)}.$$

Supongamos que las matrices $U^{(2)}$ y $V^{(2)}$ son regulares en el infinito del plano definido por el parámetro espectral complejo λ y poseen polos simples sólo para valores finitos de éste. Resulta que en este caso se pueden construir las matrices $U^{(2)}$ y $V^{(2)}$ de tal manera que éstas se anulen cuando

$|\lambda| \longrightarrow \infty$ debido a que las Ecs. (3) y (4) poseen cierta libertad en la elección de la norma. Supongamos que cada una de las matrices $U^{(2)}$ y $V^{(2)}$ poseen un solo polo; sin perder generalidad, podemos elegir la posición de dichos polos del modo siguiente: $\lambda = \lambda_0$ y $\lambda = -\lambda_0$ donde λ_0, es una constante arbitraria.

De este modo tenemos

$$U^{(2)} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0}, \qquad V^{(2)} = \frac{L}{\lambda + \lambda_0}, \tag{5}$$

donde K y L son independientes del parámetro λ. Al sustituir estas expresiones en (4) el primer miembro se anula si y sólo si se cumplen las siguientes igualdades:

$$K_{,\rho} - L_{,\sigma} = 0 \tag{6}$$

y

$$K_{,\rho} + L_{,\sigma} + \frac{1}{\lambda_0}(KL - LK) = 0. \tag{7}$$

La Ec. (7) sugiere que podemos representar las matrices K y L en términos de las 'derivadas logarítmicas' de cierta matriz g:

$$K = -\lambda_0 g_{,\sigma} g^{-1}, \qquad L = \lambda_0 g_{,\rho} g^{-1}. \tag{8}$$

Así, la Ec. (7) representa la condición de integrabilidad de las relaciones (8) para la matriz g, mientras que la igualdad (6) constituye la ecuación de campo de cierto modelo relativista integrable:

$$\left(g_{,\sigma} g^{-1}\right)_{,\rho} + \left(g_{,\rho} g^{-1}\right)_{,\sigma} = 0. \tag{9}$$

Esta ecuación matricial está asociada al modelo del denominado *campo quiral principal*.

De este modo, a partir de cualquier solución dada $\psi(\sigma, \rho, \lambda)$ de las Ecs. (3) se puede obtener directamente una solución de la ecuación de campo (9) para la matriz quiral g. A partir de las Ecs. (3), (5) y (8) se infiere que

$$\psi_{,\sigma}\psi^{-1} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0} = \frac{-\lambda_0 g_{,\sigma} g^{-1}}{\lambda - \lambda_0} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} g_{,\sigma} g^{-1}, \tag{10}$$

$$\psi_{,\rho}\psi^{-1} = \frac{L}{\lambda + \lambda_0} = \frac{\lambda_0 g_{,\rho} g^{-1}}{\lambda + \lambda_0} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} g_{,\rho} g^{-1}; \tag{11}$$

hecho que significa que la matriz que nos interesa es precisamente la función $\psi(\sigma, \rho, \lambda)$ evaluada en el punto $\lambda = 0$, es decir,

$$g(\sigma, \rho) = \psi(\sigma, \rho, 0). \tag{12}$$

Puesto que estamos interesados en obtener soluciones solitónicas para la Ec. (9), lo único que necesitamos es conocer una solución exacta particular (g_0, ψ_0) de las Ecs. (3) y (9), que en adelante denominaremos *solución inicial*, y construir una nueva solución solitónica a partir de ésta con ayuda del método de dispersión inversa.

2.1. Espaciotiempo estacionario con simetría axial

Ahora consideremos el caso en que la matriz g representa parte de un espaciotiempo estacionario con simetría axial. La métrica tetradimensional de dicho espaciotiempo tiene la forma siguiente:

$$ds_4^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f\left(d\rho^2 + dz^2\right) + g_{ab} dx^a dx^b, \tag{13}$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, \rho, z)$, los índices $a, b, c, \ldots = 0, 1$ (corresponden a las coordenadas t y φ, respectivamente) y las funciones f y g_{ab} sólo dependen de ρ y z.

Sin perder generalidad, se puede imponer la siguiente condición sobre la matriz g_{ab}:

$$\det g = -\rho^2. \tag{14}$$

Resulta que todo el sistema de ecuaciones de Einstein en el vacío que corresponde a la métrica (13) con la condición (14) se divide en dos grupos. El primero determina la matriz g y tiene la siguiente forma:

$$\left(\rho g_{,\rho} g^{-1}\right)_{,\rho} + \left(\rho g_{,z} g^{-1}\right)_{,z} = 0. \tag{15}$$

El segundo se puede representar del modo siguiente:

$$(\ln f)_{,\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\mathrm{Tr}\left(U^2 - V^2\right),$$
$$(\ln f)_{,z} = \frac{1}{2\rho}\mathrm{Tr}\left(UV\right), \tag{16}$$

donde

$$U = \rho g_{,\rho} g^{-1}, \qquad V = \rho g_{,z} g^{-1}. \tag{17}$$

La integración de la Ec. (15) está asociada a las siguientes ecuaciones espectrales:

$$D_1\psi = \left(\frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2}\right)\psi,$$
$$D_2\psi = \left(\frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2 + \rho^2}\right)\psi, \tag{18}$$

donde los operadores diferenciales D_1 y D_2 están definidos por

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda, \qquad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2}\partial_\lambda. \tag{19}$$

La matriz requerida g es nada más y nada menos que la matriz generatriz $\psi(\lambda, \rho, z)$ evaluada en el punto donde el parámetro espectral se anula $\lambda = 0$:

$$g(\rho, z) = \psi(0, \rho, z). \tag{20}$$

La función ψ puede ser obtenida en la forma

$$\psi = \chi\psi_0. \tag{21}$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones diferenciales para la matriz χ es el siguiente:

$$D_1\chi = \frac{\rho V - \lambda U}{\lambda^2 + \rho^2}\chi - \chi\frac{\rho V_0 - \lambda U_0}{\lambda^2 + \rho^2}, \tag{22}$$

$$D_2\chi = \frac{\rho U + \lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\chi - \chi\frac{\rho U_0 + \lambda V_0}{\lambda^2+\rho^2}. \quad (23)$$

Consideremos que la matriz χ posee n polos, si éstos son simples, entonces dicha matriz puede representarse de la siguiente forma:

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{\lambda-\mu_k}. \quad (24)$$

Las respectivas trayectorias de cada polo k están dadas por

$$\mu_k(\rho,z) = w_k - z \pm [(w_k-z)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}, \quad w_k = \text{const.} \quad (25)$$

Las matrices R_k son degeneradas y pueden expresarse del siguiente modo:

$$(R_k)_{ab} = n_a^k m_b^k, \quad (26)$$

donde los vectores m_b^k poseen dos componentes y pueden ser escritos como

$$m_a^k = [\psi_0^{-1}(\mu_k,\rho,z)]_{ca} m_{c0}^k, \quad (27)$$

donde m_{c0}^k son constantes arbitrarias.

Omitiendo algunos cálculos intermedios, obtenemos la siguiente expresión explícita de la solución n– solitónica para el tensor métrico:

$$g_{ab}^f(\rho,z) = -\rho^{-n}(\prod_{p=1}^{n}\mu_p)\,[(g_0)_{ab}$$
$$-\sum_{k,l=1}^{n}\Gamma_{kl}{}^{-1}\mu_k{}^{-1}\mu_l{}^{-1}N^{(k)}{}_a N^{(l)}{}_b], \quad (28)$$

donde

$$N^{(p)} = g_0\,[\psi_0{}^{-1}(\mu_p,\rho,z)]^T m_0{}^{(p)}, \quad (29)$$

$$\Gamma_{kl} = (\rho^2+\mu_k\mu_l)^{-1} N^{(k)T} g_0{}^{-1} N^{(l)}, \quad (30)$$

y la columna $m_0{}^{(p)}$ consiste de constantes arbitrarias:

$$m_0{}^{(p)} = \begin{pmatrix} C_0{}^{(p)} \\ C_1{}^{(p)} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Cabe señalar que en calidad de solución inicial se puede emplear una solución trivial a pesar de que ésta no constituya un solitón. De este modo, en el marco de la teoría general de la relatividad, por medio del método de dispersión inversa, a partir de la solución de Minkowski se ha generado el agujero negro rotatorio de Kerr como solución bisolitónica, es decir, para el caso $n = 2$ [3].

3. Teoría efectiva de cuerdas heteróticas

Dentro del marco del límite de bajas energías de la teoría efectiva de cuerdas heteróticas, uno de los modelos efectivos tetradimensionales que más interés ha despertado es la denominada teoría EMDA, parametrizada por la siguiente acción:

$${}^4S = \int d^4x|g|^{\frac{1}{2}}\left[-R + 2\,(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}e^{4\phi}\partial\kappa^2\right.$$
$$\left.-e^{-2\phi}F^2 - \kappa F\tilde{F}\right], \quad (32)$$

donde R es el escalar de Ricci para la métrica del campo gravitatorio $g_{\mu\nu}$, el tensor electromagnético está dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (33)$$

y su tensor dual por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}E^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}, \quad (34)$$

ϕ es el campo escalar dilatónico y κ es el campo pseudoescalar denominado axión.

Para espaciotiempos estacionarios la métrica tetradimensional puede expresarse en la forma

$$ds_4^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f(dt-\omega_m dx^m)^2 - f^{-1}ds_3^2, \quad (35)$$

donde ds_3^2 es el intervalo espacial tridimensional representado por la siguiente expresión:

$$ds_3^2 = h_{mn}dx^m dx^n \quad (36)$$

con $m,n = 1,2,3$. En el trabajo de investigación de la Ref. 15 se ha mostrado que una parte de las ecuaciones de campo de dicho sistema puede ser usada para pasar de las componentes espaciales del potencial vectorial A_i y del vector ω_i a los potenciales magnético u y rotacional $\tilde{\chi}$, respectivamente. Dichas magnitudes están relacionadas a través de las siguientes ecuaciones:

$$\nabla u = fe^{-2\phi}(\sqrt{2}\nabla\times\vec{A} + \nabla v\times\vec{\omega}) + \kappa\nabla v, \quad (37)$$

$$\nabla\chi = u\nabla v - v\nabla u - f^2\nabla\times\vec{\omega}, \quad (38)$$

donde el operador ∇ está definido por la métrica tridimensional h_{mn} y $v = \sqrt{2}A_0$.

En los artículos de las Refs. 16 y 17 se ha demostrado que el modelo estacionario de la teoría EMDA se puede expresar de la siguiente manera:

$$S = \int d^3xh^{\frac{1}{2}}\left[-{}^3R + \frac{1}{4}Tr(J^M)^2\right], \quad (39)$$

donde $J^M = \nabla MM^{-1}$ y M es una matriz simétrica que posee la forma

$$M = \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1}Q \\ QP^{-1} & P+QP^{-1}Q \end{pmatrix} \quad (40)$$

y pertenece al espacio cociente $Sp(4,R)/U(2)$; este hecho es equivalente a satisfacer las siguientes propiedades:

$$M^TLM = L, \qquad \text{y} \qquad M^T = M, \quad (41)$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Por otro lado, las matrices P y Q poseen la siguiente estructura:

$$P = \begin{pmatrix} f - v^2 e^{-2\phi} & -ve^{-2\phi} \\ -ve^{-2\phi} & -e^{-2\phi} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\tilde{\chi} + vw & w \\ w & -\kappa \end{pmatrix}, \tag{44}$$

donde $w = u - \kappa v$.

Consideremos que nuestra configuración de campo también posee simetría axial, entonces el intervalo tridimensional adopta la siguiente forma:

$$ds_3^2 = e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2. \tag{45}$$

Por otro lado, la acción del sistema efectivo bidimensional está dada por la expresión

$$^2S = \frac{1}{2}\int d\rho dz \rho Tr(J^M)^2, \tag{46}$$

mientras la ecuación matricial de Euler–Lagrange correspondiente es

$$\nabla(\rho J^M) = 0. \tag{47}$$

Así, las ecuaciones de Einstein se transforman en las relaciones que definen la función métrica γ:

$$\begin{aligned} \gamma_{,z} &= \frac{\rho}{2}Tr[J_\rho^M J_z^M], \\ \gamma_{,\rho} &= \frac{\rho}{4}Tr[(J_\rho^M)^2 - (J_z^M)^2]. \end{aligned} \tag{48}$$

De este modo, el sistema de campo estacionario con simetría axial está completamente descrito por las Ecs. (47) y (48), es decir, por las ecuaciones de campo para el sector de materia y el sector gravitatorio de la acción (39), respectivamente.

3.1. Simetrías no lineales de la teoría EMDA

En esta sección parametrizaremos la teoría efectiva tridimensional de la cuerda heterótica en términos de un potencial matricial complejo que simplifica las expresiones de sus simetrías. Sin embargo, aun después de la introducción de dicho potencial, el carácter altamente no lineal de las simetrías de la acción dificulta la implementación de las técnicas de generación de nuevas soluciones exactas. Por tal razón, para poder aplicar dichas técnicas se hace uso de unos potenciales que linealizan la acción del grupo de las denominadas *simetrías de carga* [18, 19].

Si tomamos la traza en la acción (39), ésta adopta la forma siguiente en términos de las matrices P y Q:

$$S = \int d^3x h^{\frac{1}{2}} \left\{ -^3R + \frac{1}{2}Tr\left[(J^P)^2 + (J^Q)^2\right] \right\}, \tag{49}$$

donde $J^P = \nabla P P^{-1}$ y $J^Q = \nabla Q P^{-1}$. El sector de materia de dicha acción, es decir, la parte que no corresponde a la gravitación (a la parte geométrica), posee una estructura particularmente simétrica, pues al intercambiar las magnitudes J^P y J^Q, la acción permanece invariante. Dicha simetría adopta una forma aún más sencilla al introducir el siguiente potencial matricial complejo:

$$Z = Q + iP. \tag{50}$$

En términos de esta matriz, la acción (49) se expresa

$$S = \int d^3x h^{\frac{1}{2}} \left[-^3R + 2Tr\left(J^Z J^{\bar{Z}}\right)\right], \tag{51}$$

donde $J^Z = \nabla Z(Z - \bar{Z})^{-1}$ Aquí es conveniente introducir los siguientes potenciales complejos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \kappa + ie^{-2\phi}, \\ \mathcal{F} &= u - \mathcal{Z}v, \\ \mathcal{E} &= if - \chi + v\mathcal{F}, \end{aligned} \tag{52}$$

que parametrizan el potencial matricial Z del siguiente modo:

$$Z = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & -\mathcal{Z} \end{pmatrix}.$$

Una de las características más importantes de esta parametrización de la acción consiste en su invariancia con respecto a la siguiente transformación de Lie–Bäcklund:

$$Z = S^T\left(I_2 + iZ_0\Lambda\right)^{-1} Z_0 S + R. \tag{53}$$

Si usamos como solución inicial un potencial Z_0 real, después de realizar la transformación de Lie–Bäcklund (53) obtenemos un potencial $Z = Q + iP$ complejo, es decir, a partir de una solución solitónica que involucra sólo la matriz real $Q = ReZ$, se puede generar otra solución solitónica que también involucre la matriz $P = ImZ$ mediante la transformación de Lie–Bäcklund.

Así, si se conocen soluciones para uno de los potenciales, ya sea P o Q, mientras el otro permanece nulo se pueden generar soluciones para ambos potenciales haciendo uso de la simetría existente entre los mismos. Aquí debemos señalar que dicha simetría no adquiere su forma más simple en el lenguaje de la matriz Z, debido a su carácter altamente no lineal. Por otro lado, la transformación (53) está parametrizada por las matrices Λ, R y S, mismas que conforman el grupo total de simetrías de la teoría (51). Entre ellas se encuentran simetrías conformes, simetrías de norma y las denominadas simetrías de carga. Con la finalidad de entender mejor cuál es la ventaja que tienen las transformaciones que linealizan la acción del grupo de simetrías consideremos las configuraciones de campo asintóticas, es decir, aquellas para las cuales el potencial matricial puede ser expresado de la siguiente manera:

$$Z_{as} = i(\sigma_3 - 2\widehat{\mathcal{M}}/r),$$

a medida que $r \longrightarrow \infty$. La matriz contante $\widehat{\mathcal{M}}$ posee la siguiente forma:

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q} & -\mathcal{D} \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{M} = \tilde{M} + i\tilde{N}$, $\tilde{M}$ es la masa, $\tilde{N}$ denota el parámetro de Newmann-Unti-Tamburino (NUT), $\mathcal{D} = D + iA$ es una combinación de las cargas del dilatón y del axión y la carga compleja electromagnética se representa por $\mathcal{Q} = Q_e + iQ_m$ Un hecho formidable consiste en que las componentes de la matriz $\widehat{\mathcal{M}}$ se transforman linealmente bajo la acción de las simetrías de carga [18,19] (véase también el artículo [20] para el caso en que la teoría original está definida en un número arbitrario de dimensiones). En dichos artículos se mostró que

$$\widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow T^T \widehat{\mathcal{M}_0} T, \tag{54}$$

donde la matriz T debe satisfacer la siguiente relación

$$T^\dagger \sigma_3 T = \sigma_3. \tag{55}$$

Si la formulación de la teoría está hecha en términos de las variables complejas $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{F})$, éstas se transforman de un modo altamente no lineal bajo la acción del grupo de simetrías de carga, mientras que las variables $(\mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{Q})$ lo hacen de manera lineal. Por tal razón es lógico suponer que exista otra representacion de la teoría en la que los potenciales complejos se transformen linealmente bajo la acción del grupo de simetrías de carga.

Dichos potenciales fueron derivados en la Ref. 19, poseen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1 + \mathcal{E}\mathcal{Z} + \mathcal{F}^2 + i(\mathcal{E} - \mathcal{Z})}{1 - \mathcal{E}\mathcal{Z} - \mathcal{F}^2 - i(\mathcal{E} + \mathcal{Z})}, \\ w_2 &= -\frac{1 + \mathcal{E}\mathcal{Z} + \mathcal{F}^2 - i(\mathcal{E} - \mathcal{Z})}{1 - \mathcal{E}\mathcal{Z} - \mathcal{F}^2 - i(\mathcal{E} + \mathcal{Z})}, \\ w_3 &= \frac{2i\mathcal{F}}{1 - \mathcal{E}\mathcal{Z} - \mathcal{F}^2 - i(\mathcal{E} + \mathcal{Z})} \end{aligned} \tag{56}$$

y parametrizan la matriz simétrica

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_1 & w_3 \\ w_3 & w_2 \end{pmatrix},$$

misma que se transforma del modo siguiente:

$$\mathcal{W} \longrightarrow T^T \mathcal{W}_0 T \tag{57}$$

bajo la acción del subgrupo de simetrías de carga.

Éstos poseen la siguiente propiedad:

$$\mathcal{W}_{as} = \frac{\widehat{\mathcal{M}}}{r}, \tag{58}$$

es decir, que los potenciales w_1, w_2 y w_3 son asintóticamente planos.

De este modo, si iniciamos con unos potenciales complejos que correspondan a la matriz P y efectuamos una transformación de Lie–Bäcklund, entonces obtendremos como resultado una solución que involucre ambas matrices P y Q. Una vez que se tengan las expresiones explícitas para dichos potenciales deberemos regresar a nuestras variables originales con ayuda de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= i\frac{(1 - w_1)(1 - w_2) - w_3^2}{(1 + w_1)(1 - w_2) + w_3^2}, \\ \mathcal{Z} &= i\frac{(1 + w_1)(1 + w_2) - w_3^2}{(1 + w_1)(1 - w_2) + w_3^2}, \\ \mathcal{F} &= -\frac{2iw_3}{(1 + w_1)(1 - w_2) + w_3^2}, \end{aligned} \tag{59}$$

y

$$\begin{aligned} \kappa &= Re\mathcal{Z}, \\ e^{-2\phi} &= Im\mathcal{Z}, \\ v &= -\frac{Im\mathcal{F}}{Im\mathcal{Z}}, \\ f &= Im\mathcal{E} + \frac{(Im\mathcal{F})^2}{Im\mathcal{Z}}, \\ u &= Re\mathcal{F} - \frac{Re\mathcal{Z} Im\mathcal{F}}{Im\mathcal{Z}}, \\ \chi &= -\left(Re\mathcal{E} + \frac{Re\mathcal{F} Im\mathcal{F}}{Im\mathcal{Z}}\right). \end{aligned} \tag{60}$$

Más adelante haremos uso de esta útil herramienta para construir una solución solitónica que involucre ambos potenciales P y Q a partir de una solución solitónica con $n = 2$ obtenida para la matriz P por medio del método de dispersión inversa.

4. Generación de soluciones solitónicas en la teoría EMDA

En esta sección aplicaremos el método de dispersión inversa a la teoría EMDA con la finalidad de obtener una solución solitónica exacta para la matriz P de la acción (49), es decir, para el modelo simplificado en el que la matriz $Q \equiv 0$. Posteriormente, sobre esta matriz realizaremos una transformación no lineal de Lie–Bäcklund que corresponde al subgrupo de simetrías de carga con el objetivo de generar una nueva solución solitónica que posea una matriz Q no trivial, recobrando, de esta manera, el sector que fue anulado en un principio. Cabe mencionar que en el marco de la teoría general de la relatividad, estas transformaciones se denominan simetrías ocultas y llevan el nombre de los investigadores que las descubrieron: transformaciones de tipo Ehlers–Harrison.

4.1. Aplicación del método de dispersión inversa

Iniciaremos con la aplicación del método de dispersión inversa a la teoría EMDA limitada a la siguiente restricción: la matriz $Q = 0$.

De este modo, las ecuaciones de campo de la acción (49) adquieren la siguiente forma:

$$\nabla(\rho J^P) = 0; \tag{61}$$

mientras que las ecuaciones de Einstein se expresan de la siguiente manera:

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho}{2} Tr[J^P_\rho J^P_z],$$
$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho}{4} Tr[(J^P_\rho)^2 - (J^P_z)^2]. \tag{62}$$

El único requerimiento que tenemos para la matriz P es que los campos que contiene desaparezcan asintóticamente, es decir, que se cumpla la siguiente condición

$$P_\infty = \sigma_3, \tag{63}$$

donde $\sigma_3 = \mathrm{diag}(1, -1)$ es la matriz de Pauli.

Por esta razón es necesario definir la matriz física

$$P^f = -(-\det P)^{-\frac{1}{2}} P,$$

que también es una solución de las ecuaciones de campo (61). Dicha matriz nos lleva a la siguiente restricción $\det P^f = -1$; en otras palabras, nuestra solución va a estar restringida a las configuraciones de campo que satisfagan la siguiente relación entre el campo dilatónico y la componente g_{tt} del tensor métrico

$$f = e^{2\phi}. \tag{64}$$

Con la finalidad de facilitar los cálculos es conveniente pasar a las coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$\rho = [(r-m)^2 - \sigma^2]^{\frac{1}{2}} \sin\theta,$$
$$z - z_1 = (r-m)\cos\theta, \tag{65}$$

donde se han introducido las nuevas constantes dadas por

$$\sigma = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$$

y

$$z_1 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2).$$

También es importante tomar en cuenta la siguiente relación entre las constantes del modelo

$$C_1{}^{(1)} C_0{}^{(2)} - C_0{}^{(1)} C_1{}^{(2)} = \sigma,$$
$$C_1{}^{(1)} C_0{}^{(2)} + C_0{}^{(1)} C_1{}^{(2)} = -m,$$
$$C_1{}^{(1)} C_1{}^{(2)} - C_0{}^{(1)} C_0{}^{(2)} = a,$$
$$C_1{}^{(1)} C_1{}^{(2)} + C_0{}^{(1)} C_0{}^{(2)} = -b, \tag{66}$$

donde $\sigma^2 = m^2 - b^2 + a^2$.

Si además introducimos la siguiente notación:

$$\Delta = r^2 - 2mr + b^2 - a^2,$$
$$\delta^2 = r^2 - (b - a\cos\theta)^2, \tag{67}$$

entonces las componentes de la matriz P pueden representarse del siguiente modo:

$$f = e^{2\phi} = \frac{\Delta + a^2 \sin^2\theta}{\delta^2},$$
$$v = 2\,\frac{-br + m(b - a\cos\theta)}{\delta^2}. \tag{68}$$

El intervalo tetradimensional adopta la siguiente forma

$$ds_4^2 = \frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\delta^2}\, dt^2 - \frac{\delta^2}{\Delta + a^2 \sin^2\theta}\, \Delta \sin^2\theta\, d\varphi^2 - \frac{\Delta + a^2\sin^2\theta}{\Delta + \sigma^2\sin^2\theta}\, \delta^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right), \tag{69}$$

por lo tanto, realizando un análisis asintótico de las magnitudes f y v podemos deducir que m es la masa del campo gravitatorio (que define también la carga dilatónica de acuerdo a la restricción (64)) y b es proporcional a la carga eléctrica.

De este modo, la métrica obtenida describe un solitón gravitatorio estático (puesto que la componente $g_{t\varphi}$ que define su rotación es nula) com masa m y dotado de cargas eléctrica y dilatónica.

A simple vista, esta solución semeja, por un lado, al agujero negro de Kerr, no obstante, posee un carácter estático, pues la métrica es diagonal. Por otro lado, es bastante similar al agujero negro de Schwarzschild, sin embargo, constituye una solución no homogénea, pues las componentes g_{rr} y $g_{\theta\theta}$ dependen de la coordenada θ, eliminando de este modo la simetría esférica.

Es interesante analizar las propiedades físicas de dicha configuración solitónica en base a sus invariantes, pero su estudio rebasa los objetivos del presente trabajo de investigación.

Ahora bien, si consideramos el caso particular en que $a = b = 0$, dicha configuración describe un ente estático semejante al agujero negro de Schwarzschild y acoplado al campo dilatónico. A pesar de que en este límite la métrica tampoco es esféricamente simétrica (pues las componentes g_{rr} y $g_{\theta\theta}$ aún conservan su dependencia del ángulo θ), ésta describe el agujero negro de Schwarzschild asintóticamente, donde la dependencia angular puede ser despreciada. Además, a partir de la componente g_{tt} es fácil observar que la métrica posee una singularidad en el origen $r = 0$. Debido a la complejidad de las componentes del tensor métrico, sin realizar un análisis de los invariantes de la configuración de campo, es díficil afirmar de manera consistente cúales son las propiedades de la superficie $r = 2m$ que corresponde al horizonte de eventos en la solución de Schwarzschild, pues ésta podría ser singular.

Es importante señalar que una de las características peculiares relevantes de esta solución solitónica radica en su carácter singular (debido a su naturaleza gravitatoria o tensorial), hecho que contrasta notablemente con las propiedades regulares de los solitones clásicos de teorías de campo escalar.

4.2. Aplicación de la simetría no lineal de Lie–Bäcklund

Como fue indicado con anterioridad, ahora procederemos a aplicar una transformación no lineal de tipo Lie–Bäcklund sobre la solución solitónica que acabamos de construir (para la matriz P).

La aplicación de dicha simetría no lineal se hace con la finalidad de generar una nueva solución solitónica que posea un sector no trivial para la matriz Q y, consecuentemente, para los campos que ésta parametriza.

De esta forma, al aplicar la transformación lineal (57) con la matriz compleja

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}, \tag{70}$$

que satisface la condición (55), sobre el potencial matricial $\mathcal{W}_0$, que corresponde a la solución solitónica de la matriz P y cuyas componentes están dadas por las siguientes relaciones:

$$(w_1)_0 = (w_2)_0 = \frac{1-f^2+v^2}{(1+f)^2-v^2},$$
$$(w_3)_0 = \frac{2v}{(1+f)^2-v^2}, \tag{71}$$

obtenemos las siguientes expresiones para las componentes del potencial matricial transformado:

$$w_1 = (t_{11}^2+t_{21}^2)(w_1)_0 + 2t_{11}t_{21}(w_3)_0,$$
$$w_2 = (t_{12}^2+t_{22}^2)(w_1)_0 + 2t_{12}t_{22}(w_3)_0,$$
$$w_3 = (t_{11}t_{12}+t_{21}t_{22})(w_1)_0 + (t_{11}t_{22}+t_{21}t_{12})(w_3)_0. \tag{72}$$

A pesar de que estas igualdades son lineales con respecto a las variables $((w_1)_0, (w_2)_0, (w_3)_0)$, las expresiones explícitas en términos de las coordenadas (r,θ) son muy voluminosas y no vamos a presentarlas aquí. No obstante, dicha solución también representa un solitón puesto que fue obtenida mediante la combinación del método de dispersión inversa y la aplicación de las simetrías de Lie–Bäcklund, que transforman solitones en solitones e involucra, además, los dos potenciales matriciales P y Q. A partir de la relación (58) podemos hacer un análisis del comportamiento asintótico del potencial matricial $\mathcal{W}$. De este modo tenemos

$$(w_1)_{as} = \left[(t_{11}^2+t_{21}^2)m - 2t_{11}t_{21}b\right]/r,$$
$$(w_2)_{as} = \left[(t_{12}^2+t_{22}^2)m - 2t_{12}t_{22}b\right]/r,$$
$$(w_3)_{as} = \left[(t_{11}t_{12}+t_{21}t_{22})m - (t_{11}t_{22}+t_{21}t_{12})b\right]/r, \tag{73}$$

y, por lo tanto, la masa y las cargas de la nueva configuración de campo solitónica están definidas por las siguientes expresiones:

$$\tilde{M} = Re\left[(t_{11}^2+t_{21}^2)m - 2t_{11}t_{21}b\right],$$
$$\tilde{N} = Im\left[(t_{11}^2+t_{21}^2)m - 2t_{11}t_{21}b\right],$$
$$D = Re\left[2t_{12}t_{22}b - (t_{12}^2+t_{22}^2)m\right],$$
$$A = Im\left[2t_{12}t_{22}b - (t_{12}^2+t_{22}^2)m\right],$$
$$Q_e = Re\left[(t_{11}t_{12}+t_{21}t_{22})m - (t_{11}t_{22}+t_{21}t_{12})b\right],$$
$$Q_m = Im\left[(t_{11}t_{12}+t_{21}t_{22})m - (t_{11}t_{22}+t_{21}t_{12})b\right]. \tag{74}$$

Finalmente, cabe señalar que las componentes complejas de la matriz T deben satisfacer la relación (58) y, por lo tanto, poseen cuatro restricciones reales.

De esta manera se hace evidente el carácter no trivial de la matriz Q, puesto que los campos parametrizados por este potencial matricial ya no son nulos y son generados por las cargas (74).

Esta configuración de campo fue construida de tal manera que fuese asintóticamente plana. Por tal razón, dicha solución no constituye un solitón topológico.

5. Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha implementado el método de dispersión inversa en el marco de la teoría EMDA en cuatro dimensiones para una configuración de campo estacionaria con simetría axial, es decir, que depende sólo de dos coordenadas espaciales. Como resultado, a partir del espacio-tiempo plano se obtuvo una solución solitónica exacta para la ecuación de campo correspondiente a la matriz quiral P, que involucra la componente g_{tt} del tensor métrico, el campo dilatónico y un campo eléctrico. Posteriormente se hizo uso de la simetría Lie–Bäcklund que posee la teoría para generar una nueva solución solitónica a partir de una ya conocida (la correspondiente a la matriz P) y obtener una configuración de campo solitónica que involucra ya los dos potenciales matriciales P y Q.

De este modo se obtuvieron dos soluciones solitónicas mediante dos de los métodos no lineales más poderosos en la física moderna: el método de dispersión inversa y la aplicación de simetrías o transformaciones de Lie–Bäcklund.

Las soluciones construidas en este trabajo semejan las soluciones halladas en los artículos de las Refs. 7 a 9, 11 y 14, donde algunas de éstas también poseen propiedades poco comunes, no obstante, son distintas. Cabe señalar que nuestras soluciones no son topológicas debido al carácter asintóticamente plano de las mismas. Otra propiedad importante de las soluciones obtenidas consiste en el carácter singular que poseen (a diferencia de la naturaleza localizada y regular que las soluciones solitónicas poseen en general) y que dificultan la interpretación de éstas como solitones genuinos de la teoría. Esta peculiaridad se debe a que las propiedades tensoriales intrínsecas del campo gravitatorio son mucho más complejas que las del campo escalar. En este punto se debe señalar que aún se requiere hacer un análisis detallado de las propiedades físicas de los objetos gravitatorios construidos con métodos no lineales. Es probable que futuras investigaciones en este marco den luz a este problema.

Como futuro desarrollo de esta línea de investigación, se planea aplicar dichas técnicas de generación de soluciones a modelos de cuerdas más complejos que no posean restricción alguna del tipo (64) y que estén definidos en espaciotiempos con un número mayor de dimensiones. También es de sumo interés intentar construir soluciones solitónicas con propiedades similares a las de los solitones de la teoría de campo escalar.

Agradecimientos

AHA desea expresar su agradecimiento al Departamento de Física Teórica de la Universidad Aristóteles de Salónica, Grecia, por proporcionar una atmósfera estimulante durante la escritura de la versión final del presente artículo, así como al Gobierno Griego por el otorgamiento de una beca posdoctoral.

JOTV agradece al CONACYT por la beca de tesista otorgada durante la realización de este trabajo de investigación, misma que coadyuvó a la obtención del grado de Licenciado en Ciencias Físico–Matemáticas.

Ambos autores dan gracias al IMATE–UNAM y al CINVESTAV–IPN por el servicio bibliotecario facilitado a lo largo de la presente investigación. Asimismo, agradecen el apoyo proporcionado a través de los proyectos de investigación 4.18 del CIC de la UMSNH y J34245-E y P42064-F del CONACYT.

1. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North Holland, Amsterdam, 1996).
2. V.A. Belinsky and V.E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **48** (1978) 985.
3. V.A. Belinsky and V.E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **50** (1979) 1.
4. V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
5. H.J. de Vega and N. Sánchez, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 3394.
6. F. Combes, H.J. de Vega, A.V. Mikhailov, and N. Sánchez, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2754.
7. I. Bakas, *Nucl. Phys. B* **428** (1994) 374.
8. I. Bakas, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 6424.
9. M.V. Yurova, *Gen. Rel. Grav.* **32** (2000) 2219.
10. M.V. Yurova, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 024022.
11. M.V. Yurova, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 024024.
12. O.V. Kechkin, *Class. Quantum Grav.* **20** (2003) 2157.
13. O.V. Kechkin, *Class. Quantum Grav.* **20** (2003) L225.
14. A. Herrera-Aguilar and R.R. Mora-Luna, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 105002.
15. D.V. Galtsov, A.A. García, and O.V. Kechkin, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 2887.
16. D.V. Gal'tsov, A.A. García, and O.V. Kechkin, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5023.
17. D.V. Gal'tsov and O.V. Kechkin, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 7394.
18. O. Kechkin and M. Yurova, *Gen. Rel. Grav.* **29** (1997) 1283.
19. A. Herrera-Aguilar and O. Kechkin, *Mod. Phys. Lett. A* **13** (1998) 1907.
20. A. Herrera-Aguilar and O. Kechkin, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 124006.